

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ступин Д. Л., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

УДК 517.53, 517.54



Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами

Денис Леонидович СТУПИН

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Пусть Ω_0^r — класс функций ω , голоморфных в единичном круге Δ , с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям $|\omega(z)| < 1$, $\omega(0) = 0$, $z \in \Delta$. Проблема коэффициентов на классе Ω_0^r формулируется следующим образом: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на действительные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \dots$ являлся рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0^r .

Класс B^r состоит из функций f , голоморфных в Δ , с действительными коэффициентами, для которых выполняются условия $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$. Подклассы B_t^r , $t \geq 0$, определяются как множество функций $f \in B^r$, нормированных условием $f(0) = e^{-t}$. Задача точной оценки $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классах B^r или B_t^r известна как проблема Кшижа для соответствующего класса. Очевидно, объединение всех классов B_t^r исчерпывает класс B^r с точностью до вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$).

На основе решения проблемы коэффициентов для класса Ω_0^r решена задача точной оценки функционала $|\{f\}_3|$ на классах B_t^r при каждом $t \geq 0$. Для этого задача была сведена к задаче оценки функционала над классом Ω_0^r , после чего задача сведена к задаче о поиске глобального условного экстремума функции двух действительных переменных с ограничениями типа неравенств.

Экстремальные функции найдены в двух формах: в форме выпуклой комбинации ядер Шварца, связанной с классом Каратеодори, и в форме произведений Бляшке, связанной с классом Ω_0^r .

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченная не обращающаяся в нуль функция, точная оценка коэффициента, тело коэффициентов

Для цитирования: Ступин Д. Л. Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 79–92.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. L. Stupin, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

Sharp estimate of the third coefficient for bounded non-vanishing holomorphic functions with real coefficients

Denis L. STUPIN

Tver State University

33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. Let Ω_0^r be a class of holomorphic functions ω in the unit disk Δ , with real coefficients, and such that $|\omega(z)| < 1$, $\omega(0) = 0$, $z \in \Delta$. The coefficients problem in the class Ω_0^r is formulated as follows: find the necessary and sufficient conditions to be imposed on the real numbers $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$ in order for the series $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \dots$ to be the Taylor series of a function in the class Ω_0^r .

The class B^r consists of holomorphic functions f in Δ with real coefficients and such that $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$. The classes B_t^r , $t \geq 0$, are defined as the sets of functions $f \in B^r$ such that $f(0) = e^{-t}$. The problem of obtaining a sharp estimation of $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, on the class B^r or B_t^r is commonly referred to as the Krzyz problem (for the class B^r or B_t^r). It is clear that the union of all classes B_t^r exhausts the class B^r up to rotations in the plane of variable w ($w = f(z)$).

Based on the solution of the coefficients problem for the class Ω_0^r , the problem of obtaining a sharp estimation of the functional $|\{f\}_3|$ on the classes B_t^r for every $t \geq 0$ is solved by transitioning to the functional over the class Ω_0^r , after which the problem is reduced to finding the global constrained extremum of a function of two real variables with inequality-type constraints.

The extreme functions are found in two forms: as a convex combination of Schwartz kernels related to the Caratheodory class, and as Blaschke products related to the class Ω_0^r .

Keywords: the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded non-vanishing function, sharp coefficient estimate, coefficient body

Mathematics Subject Classification: 30C50.

For citation: Stupin D.L. Sharp estimate of the third coefficient for bounded non-vanishing holomorphic functions with real coefficients. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 79–92.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

Введение

Пусть $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Классом B будем называть множество голоморфных в единичном круге Δ функций f , удовлетворяющих условиям $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$. Тейлоровские коэффициенты функции f обозначим через $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

В 1968 году Ян Кшиж высказал гипотезу [1] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание многих математиков. В настоящее время она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [2]. Существование экстремалей в проблеме Кшижа очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, ставящий в соответствие каждой функции из B ее тейлоровский коэффициент с номером n , является непрерывным на B .

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), поэтому можно ограничиться изучением только тех функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t . Как известно из теории подчиненных функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \quad (0.1)$$

где Ω_0 — класс функций ω , голоморфных в Δ и таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t .

Класс, состоящий из функций $\omega \in \Omega_0$ с действительными коэффициентами, обозначим через Ω_0^r , класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами, обозначим через B_t^r , а класс, состоящий из функций $f \in B$ с действительными коэффициентами, обозначим через B^r .

При каждом $t > 0$ формула (0.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами Ω_0^r и B_t^r .

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t .

Цель данной статьи состоит в нахождении точной оценки модуля третьего тейлоровского коэффициента на классах B_t^r , $t > 0$. Классы B_t^r являются весьма важным частным случаем. Действительно, $F(z, t) \in B_t^r$, если $f \in B_t$, то экстремальные функции для функционалов $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ лежат в B_t^r . Как будет показано ниже, экстремальные функции

для функционала $|\{f\}_3|$ на B_t лежат вне B_t^r лишь на малом интервале изменения параметра t .

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через ее тейлоровские коэффициенты. В геометрической теории функций изучению классов функций, ограниченных в Δ , уделяется значительное внимание. Теория ограниченных голоморфных функций представляет собой богатую и бурно развивающуюся область с большим количеством открытых проблем. Многие задачи геометрической теории функций сводятся к задачам на классах ограниченных функций.

Проблема Кшижа формулируется для подклассов ограниченных функций, не обращающихся в нуль, и имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций. Последняя, в свою очередь, тесно связана с теорией подчиненных функций [3] и теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n является задачей на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнзначной функции $2n - 3$ действительных переменных [4]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и находят разнообразные применения.

Класс B посредством класса Ω_0 связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звездных функций. Соответственно, проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также существуют параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибераха).

1. Подчиненные функции и начальные коэффициенты

Коснемся представлений вида (0.1). Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в Δ . Функция $f(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $F(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ .

Понятие подчинения восходит к Е. Линделефу [5], однако термин был введен Д. И. Литлвудом [6] и В. Рогозинским [3]; они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [7–10]).

В случае проблемы Кшижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z, t)$.

Теория подчинения позволяет легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций f , подчиненных функции F . Известно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$, $|\{f\}_1| \leq |\{F\}_1|$, $|\{f\}_2| \leq \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|)$; все оценки точные [3] и равенство достигается только на вращениях $F(z)$ или $F(z^2)$ в плоскости переменной z .

Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \dots, n$. Если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \dots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n. \quad (1.1)$$

2. Неравенства для коэффициентов

На Ω_0 имеет место точное неравенство (см. [11] или [4])

$$\left| \{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1} \{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2} \right| \leq \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}. \quad (2.1)$$

Заметим, что из неравенства (2.1) сразу следует неравенство Пика [12, с. 219]

$$|\{\omega\}_2| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2, \quad (2.2)$$

а из неравенства (2.2) сразу следует неравенство Шварца [12, с. 29]

$$|\{\omega\}_1| \leq 1. \quad (2.3)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно преобразовать неравенства $r_3 \geq 0$ и $r_2 \geq 0$, где r_3 и r_2 — правые части неравенств (2.1) и (2.2), соответственно. Неравенства (2.3) и (2.2) можно найти также в [11] или в [4].

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из n комплексных чисел $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n)$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0 , будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n -м телом коэффициентов класса Ω_0 .

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$ для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \dots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0 .

Третье тело коэффициентов на Ω_0 полностью характеризуется неравенством (2.1), второе — неравенством (2.2), а первое — неравенством (2.3).

Множество A называется абсолютно выпуклым, если оно выпуклое и сбалансированное, то есть $aA \subset A$, $|a| \leq 1$. Здесь a является действительным или комплексным числом.

Отметим, что класс Ω_0 является абсолютно выпуклым множеством ($a \in \mathbb{C}$). Класс Ω_0^r также является абсолютно выпуклым множеством ($a \in \mathbb{R}$).

Из неравенства (2.1) с учетом действительности коэффициентов вытекает следующее утверждение (см. [13]).

Утверждение 2.1. *Первое тело коэффициентов класса Ω_0^r определяется неравенством (2.3) и является отрезком $[-1, 1]$ оси x . Второе тело коэффициентов класса Ω_0^r определяется неравенством (2.2), лежит в плоскости xu и является абсолютно выпуклым компактом, заключенным между параболой $y = -1 + x^2$ и $y = 1 - x^2$. Проекция второго тела на ось x есть первое тело. Третье тело коэффициентов класса Ω_0^r определяется неравенством (2.1), лежит в пространстве xuz и является абсолютно выпуклым компактом, ограниченным поверхностями*

$$z = -(1 - x^2) + \frac{y^2}{1 + x} \quad \text{и} \quad z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 - x}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 + x^2 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Проекция третьего тела на плоскость xu есть второе тело.

По поводу абсолютной выпуклости см. [4, 13]. Здесь только заметим, что

$$-\left(-(1 - (-x)^2) + \frac{y^2}{1 + (-x)} \right) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 - x}. \quad (2.4)$$

Теорема 2.1 (Каратеодори, Фейер). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каков бы ни был полином

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \dots + \{\omega\}_n z^n \neq 0,$$

существует, и притом единственная, дробь вида

$$\lambda z \frac{\bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_{n-2} z + \dots + \bar{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \quad \lambda > 0,$$

регулярная в Δ и имеющая в своем тейлоровском разложении n первых коэффициентов, соответственно равных $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$.

Полную формулировку этой теоремы, а также метод поиска λ можно найти в монографии [12, с. 480] или в статье [4, с. 283].

3. Анализ задачи

Согласно формуле (1.1), если $f \in B_t$, то найдется $\omega \in \Omega_0$ такая, что

$$\{f\}_3 = \{F\}_1 \{\omega\}_3 + 2\{F\}_2 \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \{F\}_3 \{\omega\}_1^3. \quad (3.1)$$

Области значений функционалов $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \{\omega\}_3$ на классе Ω_0 , взятые в совокупности, различаются, что затрудняет решение задачи. Поэтому перепишем неравенства (2.3), (2.2) и (2.1) в виде $|m_1| \leq r_1$, $|m_2| \leq r_2$ и $|m_3| \leq r_3$ соответственно. Обозначив $z_k := m_k/r_k$, $k = 1, 2, 3$, получим

$$z_1 := \{\omega\}_1, \quad z_2 := \frac{\{\omega\}_2}{r_2}, \quad z_3 := \frac{\{\omega\}_3 + r_2 \bar{z}_1 z_2^2}{r_3}, \quad (3.2)$$

откуда

$$\{\omega\}_1 = z_1, \quad \{\omega\}_2 = r_2 z_2, \quad \{\omega\}_3 = r_3 z_3 - r_2 \bar{z}_1 z_2^2. \quad (3.3)$$

Подставив эти значения в (3.1), получим

$$\{f\}_3 = \{F\}_1 (r_3 z_3 - r_2 \bar{z}_1 z_2^2) + 2\{F\}_2 r_2 z_1 z_2 + \{F\}_3 z_1^3. \quad (3.4)$$

Ясно, что $|z_k| \leq 1$, $k = 1, 2, 3$. Заметим еще, что $z_1 = z_1(\{\omega\}_1)$, $z_2 = z_2(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$, а $r_2 = r_2(\{\omega\}_1)$ и т. д. В дальнейшем, ради краткости записи, мы будем опускать эти подробности.

Так как функционал $|\{f\}_3|$ достигает своего максимума на границе полидиска $\bar{\Delta}^n$ (см. об этом подробнее в [4]), то $|z_3| = 1$ и $\{\omega\}_3 = r_3 e^{i\varphi_3} - r_2 \bar{z}_1 z_2^2$, где $\varphi_3 := \arg z_3$. Поделив равенство (3.4) на $\{F\}_1$, получим

$$\frac{\{f\}_3}{\{F\}_1} = r_3 e^{i\varphi_3} - r_2 \bar{z}_1 z_2^2 + 2\alpha r_2 z_1 z_2 + \beta z_1^3, \quad \alpha := \frac{\{F\}_2}{\{F\}_1}, \quad \beta := \frac{\{F\}_3}{\{F\}_1}.$$

Поскольку в этой работе нас интересуют функции с действительными коэффициентами ($f \in B_t^r$), то задача об оценке модуля функционала (3.1) свелась к задаче исследования функций

$$h^\pm(x_1, x_2) = \pm r_3 - r_2 x_1 x_2^2 + 2\alpha r_2 x_1 x_2 + \beta x_1^3$$

на условный глобальный экстремум при ограничениях $-1 \leq x_k \leq 1$, $k = 1, 2$.

Так как $r_2 = 1 - x_1^2$, а $r_3 = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)$ и $h^+(x_1, x_2) = -h^-(-x_1, x_2)$ (см. также (2.4)), то, окончательно, целевой функцией можно считать

$$h(x_1, x_2) = r_3 - r_2 x_1 x_2^2 + 2\alpha r_2 x_1 x_2 + \beta x_1^3.$$

Если считать, что $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то мы решим задачу в существенно более общем виде, чем изначальная (в [14] аналогичная задача решена для произвольных комплексных значений параметров α и β). Здесь мы ограничимся частным случаем

$$\alpha = t - 1, \quad \beta = \frac{2}{3}t^2 - 2t + 1, \quad t > 0.$$

Заметим, что, упростив ограничения, мы несколько усложнили целевую функцию. Действительно, без всякой подготовки целевая функция выглядела бы следующим образом

$$\tilde{h}(\{w\}_1, \{w\}_2) = 1 - \{w\}_1^2 - \frac{\{w\}_2^2}{1 - \{w\}_1} + 2\alpha \{w\}_1 \{w\}_2 + \beta \{w\}_1^3,$$

а ограничения $-1 \leq \{w\}_1 \leq 1$, $-(1 - \{w\}_1^2) \leq \{w\}_2 \leq 1 - \{w\}_1^2$.

Изначально перед нами стояла задача оценки простого функционала $|\{f\}_3|$ на сложно устроенном множестве — третьем теле коэффициентов класса B_t^r . Затем мы свели эту задачу к промежуточной задаче оценки сложного функционала (3.4) на множестве, устроенном несколько проще — третьем теле коэффициентов класса Ω_0^r , которое, как известно [4], является абсолютно выпуклым компактом. Эта задача, в свою очередь, была сведена к задаче поиска экстремума действительнзначной функции на обычном квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

С геометрической точки зрения, мы установили биекцию между третьим телом коэффициентов класса B_t^r и третьим телом коэффициентов класса Ω_0^r , при котором границы этих тел переходят друг в друга. Затем верхняя половина границы третьего тела коэффициентов класса Ω_0^r была биективно отображена на $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Утверждение 2.1 говорит о том, что верхняя половина границы этого тела является явно заданной двумерной поверхностью, следовательно, такое отображение возможно. Формулы (3.2) и (3.3) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между z_k и ω_k , причем они справедливы для любого натурального n (см. [4]).

Как известно [12, с. 480], каждой внутренней точке третьего тела коэффициентов класса B_t^r соответствует бесконечно много функций класса B_t^r , а каждой граничной точке — только одна функция. Таким образом, между функциями класса B_t^r , которые полностью определяются коэффициентами $\{f\}_1$, $\{f\}_2$ и $[-1, 1] \times [-1, 1]$, установлено взаимно-однозначное соответствие. В частности, имеет место (см. [4])

Утверждение 3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$. Точка $\omega^{(n)}$ является граничной точкой n -го тела коэффициентов класса Ω_0 тогда и только тогда, когда $|z_n| = 1$.

4. Исследование на экстремум

Исследование целевой функции h на экстремум проведем методами дифференциального исчисления.

4.1. Исследование функций $h(\pm 1, \cdot)$ на экстремум

Если $|z_1| = 1$, то $|z_2| = 1$. (Действительно, если $|z_1| \rightarrow 1$, то $|m_2| \rightarrow r_2$ и, следовательно, $|z_2| = |m_2|/r_2 \rightarrow r_2/r_2 = 1$.) Кроме того, если $|z_1| = 1$, то $r_2 = r_3 = 0$. Таким образом, для $f \in B_t^r$ имеем, что если $x_1 = \pm 1$, то $x_2 = \pm 1$, и вычисления дают

$$h_1 := -h(-1, x_2) = h(1, x_2) = \beta, \quad t > 0.$$

4.2. Исследование функции $h(\cdot, -1)$ на экстремум

Если $x_2 = -1$, то $r_3 = 0$. Вычисления дают

$$h(x_1, -1) = (2\alpha + \beta + 1)x_1^3 - (2\alpha + 1)x_1,$$

откуда

$$(h(x_1, -1))'_{x_1} = 3(2\alpha + \beta + 1)x_1^2 - (2\alpha + 1),$$

т. е. точки

$$x_{1(1,2)} := \mp \sqrt{\frac{2\alpha + 1}{3(2\alpha + \beta + 1)}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2t - 1}}{t}$$

являются стационарными и

$$h_{2,3} := h(x_{1(1,2)}, -1) = \pm \sqrt{\frac{4(2\alpha + 1)^3}{27(2\alpha + \beta + 1)}} = \pm \frac{\sqrt{2(2t - 1)^3}}{3t}.$$

Заметим, что $0 \leq x_{1(1,2)}^2 < 1$, при $t \geq 1/2$.

4.3. Исследование функции $h(\cdot, 1)$ на экстремум

Если $x_2 = 1$, то $r_3 = 0$. Вычисления дают

$$h(x_1, 1) = -(2\alpha - \beta - 1)x_1^3 + (2\alpha - 1)x_1,$$

откуда

$$(h(x_1, 1))'_{x_1} = -3(2\alpha - \beta - 1)x_1^2 + (2\alpha - 1),$$

т. е. точки

$$x_{1(3,4)} := \mp \sqrt{\frac{2\alpha - 1}{3(2\alpha - \beta - 1)}} = \mp \sqrt{\frac{3 - 2t}{t^2 - 12t + 12}}$$

являются стационарными и

$$h_{4,5}(t) := h(x_{1(3,4)}, 1) = \mp \sqrt{\frac{4(2\alpha - 1)^3}{27(2\alpha - \beta - 1)}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(3 - 2t)^3}{t^2 - 6t + 6}}.$$

Заметим, что $0 \leq x_{1(3,4)}^2 \leq 1$, при $t \in [0, (5 - \sqrt{7})/2] \cup [3/2, (5 + \sqrt{7})/2]$.

4.4. Исследование функции $h(x_1, \cdot)$ на экстремум

Вычисления дают

$$h(x_1, x_2) = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) - (1 - x_1^2)x_1x_2^2 + 2\alpha(1 - x_1^2)x_1x_2 + \beta x_1^3,$$

откуда

$$(h(x_1, x_2))'_{x_2} = 2(1 - x_1^2)(\alpha x_1 - (1 + x_1)x_2).$$

Случай $x_1 = \pm 1$ разобран в пункте 4.1. Таким образом, точка

$$x_2^* := \frac{\alpha x_1}{1 + x_1}$$

является точкой максимума, так как

$$(h(x_1, x_2))''_{x_2} = -2(1 - x_1^2)(1 + x_1) < 0, \quad |x_1| < 1, \quad |x_2| \leq 1.$$

Далее

$$h(x_1, x_2^*) = 1 - (\alpha^2 - \beta)x_1^3 + (\alpha^2 - 1)x_1^2,$$

т. е.

$$(h(x_1, x_2^*))'_{x_1} = (2(\alpha^2 - 1) - 3(\alpha^2 - \beta)x_1)x_1.$$

Откуда получаем стационарные точки

$$x_{1(5)} := 0, \quad x_{1(6)} := \frac{2(\alpha^2 - 1)}{3(\alpha^2 - \beta)} = 2\frac{t - 2}{t},$$

причем

$$h_6(t) := h(x_1, x_2^*)|_{x_1=x_{1(5)}} = 1,$$

$$h_7(t) := h(x_1, x_2^*)|_{x_1=x_{1(6)}} = 1 + \frac{4(\alpha^2 - 1)^3}{27(\alpha^2 - \beta)^2} = 1 + \frac{4}{3} \frac{(t - 2)^3}{t}.$$

Заметим, что $-1 \leq x_{1(6)} \leq 1$, при $4/3 \leq t \leq 4$, но

$$|x_2^*(x_{1(6)})| = \left| 2 \frac{(t - 1)(t - 2)}{3t - 4} \right| \leq 1,$$

при $t \in [3/2, t^*]$, где $t^* := 9/4 + \sqrt{17}/4 \approx 3.281$. То есть $h_7(t)$ можно рассматривать только при $t \in [3/2, t^*]$.

5. Анализ результатов

5.1. Максимумы

Пусть $M(t) := \{|h_1(t)|, h_2(t), h_5(t), h_6(t), |h_7(t)|\}$, а $m_r(t) := \max M(t)$. Например, уравнение $h_2(t) = h_6(t)$ при $t > 0$ эквивалентно уравнению $p_1(t) = 0$, где $p_1(t) := 16t^3 - 33t^2 + 12t - 2$. Следовательно, $h_2(t) \geq h_6(t)$, при $t \geq t_1$, где t_1 — наибольший корень многочлена p_1 . Аналогичным образом мы получим промежутки, на которых график каждой функции $h \in M$ лежит не ниже графиков всех остальных функций из M .

5.2. Экстремали

В общем случае ($x_3 = \pm 1$) экстремальная функция имеет вид

$$\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \{\omega\}_3 z^3 + \dots,$$

и коэффициенты с номерами $n > 3$ выражаются через первые три коэффициента. В случае ($x_2 = \pm 1$) коэффициенты с номерами $n > 2$ выражаются через первые два коэффициента. В случае ($x_1 = \pm 1$) коэффициенты с номерами $n > 1$ выражаются через первый коэффициент. Эти выводы справедливы в силу утверждения 3.1.

По утверждению 3.1, если $x_1 = \pm 1$ (пункт 4.1.), то точка $(\{\omega\}_1)$ находится на границе первого тела коэффициентов класса Ω_0 . По формуле (3.3) получаем, что $\omega(z) = z$.

В пункте 4.2. $x_1 = x_{1(1)}$, $x_2 = -1$, поэтому, по утверждению 3.1, точка $(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$ принадлежит границе второго тела коэффициентов класса Ω_0 . Формула (3.3) дает экстремальную функцию в виде $\omega_{-1}(z) = p_{-1}(z) + o(z^2)$, где $p_{-1}(z) := \{\omega_{-1}\}_1 z + \{\omega_{-1}\}_2 z^2$, а

$$\begin{aligned} \{\omega_{-1}\}_1 &= x_{1(1)}, \quad x_{1(1)} = -\sqrt{\frac{2\alpha + 1}{3(2\alpha + \beta + 1)}}, \\ \{\omega_{-1}\}_2 &= x_{1(1)}^2 - 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Точный вид функции ω_{-1} найдем в виде произведений Бляшке. Для этого мы будем пользоваться теоремой Каратеодори–Фейера (теорема 2.1). Согласно этой теореме, многочлен p_{-1} можно продолжить единственным образом до голоморфной функции ω_{-1} , лежащей в Ω_0 , причем так как точка $(\{\omega_{-1}\}_1, \{\omega_{-1}\}_2)$ принадлежит границе второго тела коэффициентов класса Ω_0 , то $\lambda = \pm 1$ и

$$\omega_{-1}(z) = \lambda z \frac{\alpha_1 + \alpha_0 z}{\alpha_0 + \alpha_1 z}.$$

Взяв $\lambda = 1$ и вычислив параметры α_0, α_1 , видим, что соотношение (5.1) не выполняется. Повторив это же действие при $\lambda = -1$, получим

$$\omega_{-1}(z) = -z \frac{x_{1(1)} - z}{-1 + x_{1(1)} z}.$$

По аналогии мы найдем экстремальную функцию ω_1 для случая $x_2 = 1$ из пункта 4.3.

Как было указано в пункте 3., $x_3 = 1$. Следовательно, согласно утверждению 3.1, точка $(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \{\omega\}_3)$ находится на границе третьего тела коэффициентов класса Ω_0 . Так как, согласно пункту 4.4., $x_1 = x_{1(5)} = 0$, $x_2 = x_2^* = \alpha x_1 / (1 + x_1) = 0$, $x_3 = 1$, то с помощью формулы (3.3) мы получим экстремальную функцию $\omega_3(z) := z^3$.

5.3. Основной результат

Теорема 5.1. Если $f \in B_t^r$, то имеет место точная, при каждом $t \geq 0$, оценка

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{\sqrt{t^2 - 6t + 6}}, & t \in [t_1, t_2], \\ \frac{2}{3} t^2 - 2t + 1, & t \geq t_3, \end{cases} \quad (5.2)$$

где числа $t_1 \approx 1.655$, $t_2 \approx 3.304$ и $t_3 \approx 3.823$ — наибольшие положительные корни полиномов $16t^3 - 33t^2 + 12t - 2$, $8t^4 - 40t^3 + 50t^2 - 18t + 3$ и $2t^2 - 10t + 9$, соответственно. Экстремальные функции имеют вид (0.1) с точностью до вращения на угол π радиан в плоскости переменной z , где вместо ω подставлены функции

$$\omega_3(z) := z^3, \quad \omega_{-1}(z) := -z \frac{z + x_{1(1)}}{1 + x_{1(1)}z}, \quad \omega_1(z) := z \frac{z + x_{1(4)}}{1 + x_{1(4)}z}, \quad \omega(z) := z.$$

Исследовав правую часть неравенства (5.2) на максимум, при $t \geq 0$, видим, что строгий глобальный максимум равен $2/e$ и достигается при $t = 1$.

Следствие 5.1. *Гипотеза Кишижа для B^r справедлива при $n = 3$. То есть, если $f \in B^r$, то $|\{f\}_3| \leq 2/e$, причем равенство достигается только на вращениях функции $F(z^3, t)$ в плоскостях переменных z и w на углы, кратные π радиан.*

5.4. Экстремали на B_t

Д. В. Прохоров и Я. Шиналь получили точную для каждого $t \geq 0$ оценку $|\{f\}_3|$ на классе B_t в работе [14]. Отметим, что в общем случае $f \in B_t$ (именно B_t , а не B_t^r) формула (5.2) должна быть дополнена еще одной строкой [14]:

$$|\{f\}_3| \leq 2 \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t} (2t^2 - 6t + 3) \sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, \quad t \in [t_2^*, t_3^*],$$

где числа $t_2^* = 2 + \sqrt{6}/2 \approx 3.225$ и $t_3^* \approx 3.476$, — наибольшие положительные корни полиномов $2t^2 - 8t + 5$ и $2t^3 - 12t^2 + 21t - 12$, соответственно. Экстремальные на B_t , $t \in [t_2^*, t_3^*]$, функции имеют вид (0.1) с точностью до вращений в плоскости переменной z , где вместо $\omega(z)$ подставлены функции

$$\omega_{\frac{-b}{2a}}(z) := z e^{i\varphi} \frac{z + x_1(\frac{-b}{2a}) e^{-i\varphi_{1,2}}}{1 + x_1(\frac{-b}{2a}) e^{i\varphi_{1,2}} z},$$

где

$$x_1(\frac{-b}{2a}) := \sqrt{\frac{3\alpha^2 - 2(\alpha^2 + 2)\beta}{3(1 - \beta)(\alpha^2 - 4\beta)}},$$

$$\varphi_{1,2} := \pm \arccos \frac{\alpha(2(\alpha^2 + 2) - (\alpha^2 + 8)\beta)}{2(3\alpha^2 - 2(\alpha^2 + 2)\beta)}, \quad \beta \neq 1, \quad \beta \neq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Также из формулы (5.2) видно, что

$$\max_{f \in B} |\{f\}_3| = \max_{f \in B^r} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_t} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_1} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_t^r} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_1^r} |\{f\}_3| = \frac{2}{e}.$$

Экстремальные функции из B_t допускают вращения в плоскости переменной z , а экстремальные функции из B допускают также вращения в плоскости переменной w ($w = f(z)$).

5.5. Еще одно представление экстремалей на B_t

По аналогии с формулой (0.1), каждую функцию f класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-th(z)}, \quad h(z) \in C, \quad (5.3)$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$.

Перейдем от представления (0.1) к представлению (5.3) для экстремальных функций. Экстремальные функции имеют вид (5.3) с точностью до вращения в плоскости переменной z , где вместо h подставлены функции

$$\begin{aligned} h(z) &:= \frac{1+z}{1-z}, \\ h_{-1}(z) &:= \lambda \frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda) \frac{1-z}{1+z}, \quad \lambda := \frac{1+x_{1(1)}}{2}, \\ h_{\frac{-b}{2a}}(z) &:= \lambda \frac{1+e^{i\varphi_{1,2}}z}{1-e^{i\varphi_{1,2}}z} + (1-\lambda) \frac{1-e^{i\varphi_{1,2}}z}{1+e^{i\varphi_{1,2}}z}, \quad \lambda := \frac{1+x_{1(\frac{-b}{2a})}}{2}, \\ h_1(z) &:= \lambda \frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda) \frac{1-z}{1+z}, \quad \lambda := \frac{1+x_{1(4)}}{2}, \\ h_3(z) &:= \frac{1+z^3}{1-z^3}. \end{aligned}$$

Функции ω , ω_1 и ω_3 преобразованы в функции h , h_1 и h_3 при помощи отображения $\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$, функция ω_{-1} преобразована в функцию h_{-1} при помощи $\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}$, а функции $\omega_{\frac{-b}{2a}}$ преобразованы в функции $h_{\frac{-b}{2a}}$ посредством $\frac{1+e^{i\varphi}\omega(z)}{1-e^{i\varphi}\omega(z)}$.

Интересно заметить, что ω есть произведение, состоящее из одного множителя, ω_{-1} , $\omega_{\frac{-b}{2a}}$ и ω_1 есть произведения двух множителей, а ω_3 есть произведение трех множителей. Соответственно, h есть сумма одного слагаемого, h_{-1} , $h_{\frac{-b}{2a}}$ и h_1 есть суммы двух слагаемых, а h_3 есть сумма трех слагаемых. Далее

$$\begin{aligned} h(z) &= 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + o(z^3), \\ h_{-1}(z) &= 1 + 2x_{1(1)}z + 2z^2 + 2x_{1(1)}z^3 + o(z^4), \\ h_{\frac{-b}{2a}}(z) &= 1 + 2e^{i\varphi_{1,2}}x_{1(\frac{-b}{2a})}z + 2e^{2i\varphi_{1,2}}z^2 + 2e^{3i\varphi_{1,2}}x_{1(\frac{-b}{2a})}z^3 + o(z^4), \\ h_1(z) &= 1 + 2x_{1(4)}z + 2z^2 + 2x_{1(4)}z^3 + o(z^4), \\ h_3(z) &= 1 + 2z^3 + o(z^3). \end{aligned}$$

Отметим, что $\{h\}_1 = \{h_{-1}\}_2 = \left| \left\{ h_{\frac{-b}{2a}} \right\}_2 \right| = \{h_1\}_2 = \{h_3\}_3 = 2$.

6. Заключение

По геометрическим соображениям очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точная оценка $|\{f\}_1|$ впервые появилась в [15]. Я. Кшиж, располагая точными оценками $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$, высказал свою гипотезу в 1968 году в [1].

В статье [7] при помощи вариационного метода была впервые получена точная оценка модуля третьего коэффициента на классе B .

Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t была добыта в работе [14]. Однако, из этого результата не вытекает теорема 5.1, для $t \in (t_2^*, t_3^*)$.

В настоящей статье решена задача получения точной оценки функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t^r путем перехода к функционалу над классом Ω_0^r . Далее, полученная задача сведена к задаче о поиске глобального условного экстремума функции двух действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что позволило применить стандартные методы дифференциального исчисления для получения основного результата. Отметим еще, что данный метод приводит ограничения к нормированному виду $|x_k| \leq 1$.

В обзоре [16] отмечается, что наиболее убедительным доказательством неравенства

$$|\{f\}_4| \leq 2/e$$

стало доказательство В. Шапеля [9]. Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [2]. По поводу гипотезы Кшижа для $n \geq 6$ см. [17, 18].

References

- [1] J. G. Krzyz, “Coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *Ann. Polon. Math.*, **70** (1968), 314.
- [2] N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48** (2003), 753–766.
- [3] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82.
- [4] Д. Л. Ступин, “Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **28**:143 (2023), 277–297. [D. L. Stupin, “The coefficient problem for bounded functions and its applications”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297 (In Russian)].
- [5] E. Lindelöf, “Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.
- [6] J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford university press, 1947.
- [7] J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J. d’Analyse Mathématique*, **31** (1977), 169–190.
- [8] R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3–4 (1992), 213–222.
- [9] W. Szapiel, “A new approach to the Krzyz conjecture”, *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A.*, **48** (1994), 169–192.
- [10] D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem”, arXiv: [abs/1104.3984](https://arxiv.org/abs/1104.3984).
- [11] J. E. Brown, “Iterations of functions subordinate to schlicht functions”, *Compl. Var.*, **9** (1987), 143–152.
- [12] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966, 628 с.; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Translations of Mathematical Monographs, **26**, American Mathematical Society, Rhode Island, 1969, 676 pp.
- [13] Д. Л. Ступин, “Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$ ”, *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, **24**:3 (2024), 342–359. [D. L. Stupin, “A new proof of the Krzyz conjecture for $n = 3$ ”, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, **24**:3 (2024), 342–350 (In Russian)].
- [14] D. V. Prokhorov, J. Szynal, “Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions”, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, **29**:5–6 (1981), 223–230.
- [15] V. I. Levin, W. Fenchel, E. Reissner, “Losing der Aufgabe 163”, *Jahresber. DM.*, **44**:2 (1934), 80–83.

- [16] D. V. Prokhorov, “Coefficients of holomorphic functions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **106**:6 (2001), 3518–3544.
- [17] Д. Л. Ступин, “Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 98–120. [D. L. Stupin, “A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on the class of bounded non-vanishing functions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120 (In Russian)].
- [18] Д. Л. Ступин, “Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчиненных функций”, *Вестник Воронежского государственного университета. Физика. Математика.*, 2024, № 2, 71–84. [D. L. Stupin, “One method of estimation of moduli of Taylor coefficients of subordinated functions”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2024, № 2, 71–84 (In Russian)].

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Поступила в редакцию 03.02.2025 г.

Поступила после рецензирования 09.03.2025 г.

Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Fundamental Mathematics and Digital Technologies Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Received 03.02.2025

Reviewed 09.03.2025

Accepted for press 13.03.2025