

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Лангаршоев М. Р., Хоразмшоев С. С., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-56-65>

УДК 517.5, 519.65



О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций в пространстве L_2

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ¹,Саидджобир Саиднасиллоевич ХОРАЗМШОЕВ²¹ АНО ВО «Московский гуманитарно-технологический университет – Московский архитектурно-строительный институт»

117342, Российская Федерация, г. Москва, ул. Введенского, 1А

² Таджикский технический университет им. академика М. С. Осими

734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Академиков Раджабовых, 10

Аннотация. Рассматривается множество $L_2^{(r)}$ 2π -периодических функций $f \in L_2$, у которых производная $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывна, а производная r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Решается экстремальная задача нахождения точной константы типа Джексона–Стечкина, связывающей наилучшее полиномиальное приближение функций из $L_2^{(r)}$ и усредненное значение обобщенного модуля непрерывности m -го порядка их производной $f^{(r)}$ в пространстве L_2 . Также рассмотрены классы $W_m^{(r)}(u)$ и $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ функций из $L_2^{(r)}$ таких, что усредненное значение обобщенного модуля непрерывности m -го порядка их производной $f^{(r)}$ ограничено сверху единицей и, соответственно, значением некоторой функции $\Phi(u)$. Вычислены точные значения известных n -поперечников (по Бернштейну, по Гельфанду, колмогоровского, линейного и проекционного) класса $W_m^{(r)}(u)$. Затем решена экстремальная задача нахождения точного значения наилучшего приближения для класса $W_m^{(r)}(u, \Phi)$. Полученные результаты развивают и дополняют некоторые известные результаты о наилучшем приближении в L_2 различных классов функций. В работе мы используем методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах, а также метод оценки снизу n -поперечников функциональных классов в банаховых пространствах, разработанный В. М. Тихомировым.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение в L_2 , экстремальная характеристика — обобщенный модуль непрерывности, n -поперечники

Для цитирования: Лангаршоев М.Р., Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций в пространстве L_2 // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 56–65.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-56-65>



On the best approximation of some classes of periodic functions in the space L_2

Mukhtor R. LANGARSHOEV¹, Saidjobir S. KHORAZMSHOEV²

¹ Moscow University of Humanities and Technology – Moscow Institute of Architecture and Construction
1A, Vvedenskogo St., Moscow 117342, Russian Federation

² Tajik Technical University named after academician M. S. Osimi
10, Academicians Rajabov's Av., Dushanbe 734042, Republic of Tajikistan

Abstract. We consider the set $L_2^{(r)}$ of 2π -periodic functions $f \in L_2$ whose $(r-1)$ -th order derivative is absolutely continuous, and the r -th order derivative $f^{(r)} \in L_2$. We solve the extremal problem of finding an exact Jackson–Stechkin type constant that connects the best polynomial approximation of functions from $L_2^{(r)}$ with the average value of the generalized m -th order modulus of continuity of their derivative $f^{(r)}$ in the space L_2 . We also consider the classes $W_m^{(r)}(u)$ and $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ of functions from $L_2^{(r)}$ such that the average value of the generalized m -th order modulus of continuity of their derivative $f^{(r)}$ is bounded from above by unity and, accordingly, by the value of some function $\Phi(u)$. We calculate the exact values of the known n -widths (according to Bernstein, to Gelfand, to Kolmogorov, linear, and projection) of the class $W_m^{(r)}(u)$. Then we solve the extremal problem of finding the exact value of the best approximation for the class $W_m^{(r)}(u, \Phi)$. The obtained results develop and complement some known results on the best approximation of various classes of functions in L_2 . In the paper, we use methods for solving extremal problems in normed spaces, as well as the method developed by V. M. Tikhomirov for estimating from below the n -widths of functional classes in Banach spaces.

Keywords: best polynomial approximation in L_2 , extremal characteristic — generalized modulus of continuity, n -widths

Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A17, 41A44.

For citation: Langarshoev M.R., Khorazmshoev S.S. On the best approximation of some classes of periodic functions in the space L_2 . *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 56–65.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-56-65>

Введение

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения для изучения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2$ часто используют различные модификации обычного модуля непрерывности m -го порядка

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h) \right\|_{L_2} : |h| \leq t \right\}.$$

Указанные модификации, как отмечается в [1], в большинстве случаев связаны со специфическими условиями исследуемых задач и позволяют раскрыть их содержательную сущность. Например, в работах [2–6] при аппроксимации 2π -периодических функций из L_2 вместо оператора сдвига $T_h(f, x) := f(x + h)$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, был использован оператор Стеклова

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, \quad h > 0.$$

Данная работа продолжает указанную тематику и посвящена дальнейшему применению характеристик гладкости, использующих оператор $S_h(f, x)$.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси. Рассмотрим пространство $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ измеримых по Лебегу 2π -периодических функций с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество 2π -периодических функций $f \in L_2$, у которых производная $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывна, а производная r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежит пространству L_2 . Символом $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$ (размерности $\leq 2n-1$), т. е.

$$\mathcal{T}_{n-1} = \left\{ T_{n-1}(x) : T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}.$$

Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \right\} \\ &= \left\| f - S_{n-1}(f, x) \right\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} := \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— частичная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f \in L_2$.

Пусть

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x + h) dx, \quad h > 0$$

— функция Стеклова элемента $f \in L_2$. Через функцию Стеклова определим операторы

$$S_{h,i}(f) = S_h(S_{h,i-1}(f)), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad S_{h,0}(f) \equiv f.$$

Пусть E — единичный оператор в пространстве L_2 . Следуя работе [2], равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f, x) &= S_h(f, x) - f(x) = (S_h - E)(f, x), \\ \Delta_h^m(f, x) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, x), x) = (S_h - E)^m(f, x) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_{h,k}(f, x), \quad m = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

определим конечные разности первого и высших порядков, соответственно.

Величина

$$\Omega_m(f, t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|_2 : 0 < h \leq t\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

называется специальным модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Следует отметить, что характеристика гладкости $\Omega_1(f, t)_p$ при $0 < p < 1$ была использована в работе [7] для изучения поведения наилучшего приближения функций полиномами по системе Хаара.

Нетрудно показать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$

$$\|\Delta_h^m(f^{(r)}, \cdot)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m},$$

согласно которой равенство (1.2) принимает вид (см. [4])

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = \sup_{0 < h \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}.$$

В данной работе для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $u \in (0, \frac{\pi}{n}]$ введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt\right)^m}. \quad (1.3)$$

2. Точные константы в неравенстве Джексона–Стечкина

Теорема 2.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при любом $u \in (0, \frac{3\pi}{4n}]$ имеет место равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m}.$$

Доказательство. В [2] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh} \rho_k^2 + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \cdot \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h). \quad (2.1)$$

Умножаем обе части неравенства (2.1) на h , имеем

$$h E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kh}{k} \rho_k^2 + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h). \quad (2.2)$$

Теперь интегрируем неравенство (2.2) по переменной h от 0 до t :

$$\frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1 - \cos kt}{k^2} \rho_k^2 + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh.$$

А из этого неравенства, учитывая соотношение (1.1) и равенство

$$\max_{k \geq n} \left\{ \frac{1 - \cos kt}{k^2} \right\} = \frac{1 - \cos nt}{n^2},$$

получаем

$$\frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1 - \cos nt}{n^2} E_{n-1}^2(f) + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh,$$

или

$$\frac{t^2}{2} \leq \frac{1 - \cos nt}{n^2} + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh. \quad (2.3)$$

Интегрируем соотношение (2.3) по переменной t от 0 до u , запишем

$$\frac{u^3}{6} \leq \frac{nu - \sin nu}{n^3} + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^u \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh dt. \quad (2.4)$$

Для нахождения интеграла в (2.4) воспользуемся интегрированием по частям, получим

$$\int_0^u \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh dt = \int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt.$$

Таким образом, из неравенства (2.4) вытекает, что

$$\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^m} \leq \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m}, \quad (2.5)$$

а из (2.5) сразу получаем оценку сверху для величины $\mathcal{K}_{m,n,r}(u)$.

Для получения аналогичной оценки снизу величины $\mathcal{K}_{m,n,r}(u)$ нам потребуется функция $f_0(x) = \cos nx$, очевидно принадлежащая множеству $L_2^{(r)}$. Для этой функции из (1.1) и (1.2) находим

$$E_{n-1}(f_0)_2 = 1, \quad \Omega_m(f_0^{(r)}, t) = n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^m} &\geq \left(\int_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f_0^{(r)}, t)dt\right)^m \\ &= \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из сопоставления неравенств (2.5) и (2.6) получаем утверждение теоремы 2.1. $\square$

3. Поперечники классов $W_m^{(r)}(u)$ в пространстве L_2

Пусть S — единичный шар в L_2 , $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 , $\Lambda_n \subset L_2$ — n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство ко-размерности n , $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n .

Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \} \end{aligned}$$

называют, соответственно, бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n -поперечниками. В силу специфики гильбертова пространства для указанных поперечников выполнены (см. например, [8, с. 239]) следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (3.1)$$

Для множества $\mathfrak{M}$ определим еще число

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup \{ E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (3.2)$$

Следуя работе [4], через t_* обозначим величину аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ функции $\frac{\sin t}{t}$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t = \operatorname{tg} t$ ($4,49 < t < 4,51$). Также обозначим

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \begin{cases} 1 - \frac{\sin t}{t}, & \text{если } 0 < t \leq t_*; \\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t \geq t_* \end{cases}.$$

Через $W_m^{(r)}(u)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in (0, +\infty)$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{6}{u^3} \int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \leq 1.$$

Теорема 3.1. При $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in (0, +\infty)$ справедливы равенства

$$\sigma_{2n}(W_m^{(r)}(u), L_2) = \sigma_{2n-1}(W_m^{(r)}(u), L_2) = \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u)) = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m,$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Доказательство. Используя определение класса $W_m^{(r)}(u)$, неравенство (2.5) и соотношения (3.1), (3.2), получаем оценку сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\leq \pi_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \leq \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(h)) \\ &= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника введем в рассмотрение $(2n+1)$ -мерный шар тригонометрических полиномов $S_{2n+1} \in \mathcal{T}_n \cap L_2$, определяемый формулой

$$S_{2n+1} = \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \frac{n^{3m-r} u^{3m}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m} \right\},$$

и покажем, что $S_{2n+1} \in W_m^{(r)}(u)$. В работе [4] для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ доказано неравенство

$$\Omega_m^{1/m}(T_n^{(r)}, t) \leq n^{r/m} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)_* \|T_n\|^{1/m}.$$

Используя это соотношение, для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{u^3} \int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^m &\leq \left(\frac{6}{u^3} n^{r/m} \int_0^u t(u-t) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt \right)^m \|T_n\|^m \\ &= \left(\frac{6}{u^3} n^{r/m} \frac{u^3 n^3 - 6nu + 6 \sin nu}{6n^3} \right)^m \frac{n^{3m-r} u^{3m}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m} = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $S_{2n+1} \in W_m^{(r)}(u)$. Согласно теореме В. М. Тихомирова [9] о поперечнике шара получим оценки снизу для бернштейновского n -поперечника

$$\begin{aligned} b_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\geq b_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \geq b_{2n}(S_{2n+1}, L_2) \\ &= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Утверждение теоремы 3.1 вытекает из сопоставления неравенств (3.3) и (3.4). $\square$

4. Верхние грани классов $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ в пространстве L_2

Пусть $\Phi(u)$ — непрерывная неубывающая на полуоси $0 \leq u < \infty$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in (0, +\infty)$ обозначим через $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых выполнено неравенство

$$\left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^m \leq \Phi(u).$$

Для этого класса вычислим экстремальную аппроксимационную характеристику (1.3).

Теорема 4.1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $u \in (0; \frac{3\pi}{4n}]$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi)) = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u).$$

Доказательство. Из соотношения (2.5) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m} \left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m.$$

Отсюда, используя определение класса $W_m^{(r)}(u, \Phi)$, получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi)) &= \sup \{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(u, \Phi) \} \\ &\leq \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u) \sin nx.$$

Легко показать, что для этой функции имеют место следующие соотношения:

$$E_{n-1}(f_1)_2 = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u). \quad (4.2)$$

$$\Omega_m^{1/m}(f_1, u) = n^3 \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right) \Phi^{1/m}(u) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right).$$

Заметим, что $f_1 \in W_m^{(r)}(u, \Phi)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u) du \right)^m \\ &= \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u) \left(n^3 \int_0^u t(u-t) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt \right)^m \\ &= \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u) \left(\frac{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu}{6} \right)^m = \Phi(u), \end{aligned} \quad (4.3)$$

а равенство (4.3) означает принадлежность функции f_1 классу $W_m^{(r)}(u, \Phi)$. Теперь с учетом равенства (4.2) запишем требуемую оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi)) &= \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(u, \Phi)\} \geq E_{n-1}(f_1)_2 \\ &= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Сравнив оценки (4.1) и (4.4), получим утверждение теоремы 4.1. $\square$

Благодарности: Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

References

- [1] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **92**:4 (2012), 497–514; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “Jackson–Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 ”, *Math. Notes*, **92**:4 (2012), 458–472.
- [2] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, “Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ ”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 803–811; англ. пер.: V. A. Abilov, F. V. Abilova, “Problems in the approximation of 2π -periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$ ”, *Math. Notes*, **76**:6 (2004), 749–757.
- [3] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson inequalities”, *East J. Approx.*, **14**:4 (2008), 411–421.
- [4] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “A sharp inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 306–313.
- [5] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 ”, *Сиб. мат. журн.*, **52**:6 (2011), 1414–1427; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, “Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2 ”, *Siberian Math. J.*, **52**:6 (2011), 1124–1136.
- [6] М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев, “Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 ”, *Матем. заметки*, **94**:6 (2013), 908–917; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, K. Tukhliiev, “Polynomial approximations and the widths of function classes in L_2 ”, *Math. Notes*, **94**:6 (2013), 930–937.
- [7] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **98**(140):3(11) (1975), 395–415; англ. пер.: È. A. Storozhenko, V. G. Krotov, P. Oswald, “Direct and converse theorems of Jackson type in L^p spaces, $0 < p < 1$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:3 (1975), 355–374.
- [8] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [9] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.: V. M. Tikhomirov “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Mathematical Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.

Информация об авторах

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных дисциплин, Московский гуманитарно-технологический университет – Московский архитектурно-строительный институт, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Хоразмшоев Саиджобир Саиднасилоевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Таджикский технический университет им. академика М. С. Осими, г. Душанбе, Таджикистан. E-mail: skhorazmshoev@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1345-3757>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Лангаршоев Мухтор Рамазонович
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2024 г.
Поступила после рецензирования 27.02.2025 г.
Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the authors

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Social and Humanitarian Disciplines Department, Moscow University of Humanities and Technology – Moscow Institute of Architecture and Construction, Moscow, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Saidjobir S. Khorazmshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi, Dushanbe, Tajikistan. E-mail: skhorazmshoev@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1345-3757>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Mukhtor R. Langarshoev
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Received 20.12.2024
Reviewed 27.02.2025
Accepted for press 13.03.2025