

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Финогенко И.А., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182>

УДК 517.93



Об асимптотическом поведении решений неавтономных дифференциальных включений с набором нескольких функций Ляпунова

Иван Анатольевич ФИНОГЕНКО

ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН»
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Аннотация. Для неавтономных дифференциальных включений рассматриваются вопросы притяжения и асимптотического поведения решений. Основой исследований служит развитие метода предельных дифференциальных уравнений в сочетании с прямым методом Ляпунова с несколькими функциями Ляпунова. Это дает возможность более точно проводить локализацию и определять структуру ω -предельных множеств решений. Основными проблемами исследований являются отсутствие свойств типа инвариантности ω -предельных множеств неавтономных систем и построение предельных дифференциальных соотношений. Они решаются с использованием предельных дифференциальных включений, построенных с использованием сдвигов (трансляций) исходных дифференциальных включений. Результаты имеют форму обобщений принципа инвариантности Ла-Салля и дают предварительную информацию о предельном поведении решений. Набор дополнительных функций Ляпунова позволяет уточнять это поведение и выделять те точки из множества нулей производной основной функции Ляпунова, которые заведомо ω -предельным множествам не принадлежат. Результаты иллюстрируются на примере линейного осциллятора с сухим трением.

Ключевые слова: предельное дифференциальное включение, функция Ляпунова, принцип инвариантности, асимптотическое поведение решений, притяжение

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1210401300060-4).

Для цитирования: *Финогенко И.А.* Об асимптотическом поведении решений неавтономных дифференциальных включений с набором нескольких функций Ляпунова // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 170–182.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182>

SCIENTIFIC ARTICLE

© I. A. Finogenko, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182>

On the asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential inclusions with a set of several Lyapunov functions

Ivan A. FINOGENKO

V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. For non-autonomous differential inclusions, the issues of attraction and asymptotic behavior of solutions are considered. The basis of the research is the development of the method of limit differential equations in combination with the direct Lyapunov method with several Lyapunov functions. This makes it possible to more accurately localize and determine the structure of ω -limit sets of solutions. The main problems of the research are the absence of properties of the invariance type of ω -limit sets of non-autonomous systems and the construction of limit differential relations. They are solved using limit differential inclusions constructed using shifts (translations) of the main differential inclusions. The results have the form of generalizations of the LaSalle invariance principle and provide preliminary information on the limit behavior of solutions. A set of additional Lyapunov functions allows one to refine this behavior and to single out those points from the set of zeros of the derivative of the main Lyapunov function that obviously do not belong to the ω -limit sets. The results are illustrated by the example of a linear oscillator with dry friction.

Keywords: limit differential inclusion, Lyapunov function, invariance principle, asymptotic behavior of solutions, attraction

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1210401300060-4).

Mathematics Subject Classification: 34A60

For citation: Finogenko I.A. On the asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential inclusions with a set of several Lyapunov functions. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 170–182.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182>

Введение

Исследования асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений в рамках прямого метода функций Ляпунова со знакопостоянными производными восходят к известным теоремам Барбашина–Красовского [1] для автономных систем

$$\dot{x} = f(x), \quad (0.1)$$

где функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ определена на некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При этом требовался анализ множества $E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$ на наличие в нем целых траекторий уравнения (0.1). Впоследствии выводы, которые вытекают лишь из знакопостоянства производной функции Ляпунова, были аккумулированы в теореме Ла-Салля [2], известной в настоящее время, как принцип инвариантности.

Эти исследования в том или ином виде распространены и на другие классы автономных систем, в частности — на автономные дифференциальные включения.

При рассмотрении неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (0.2)$$

на этом пути возникает ряд трудностей, связанных с описанием множества нулей знакопостоянной производной функции Ляпунова и с отсутствием свойств типа инвариантности у ω -предельных множеств решений неавтономных систем.

Попытки распространить принцип инвариантности на системы (0.2) привели к рассмотрению сдвигов (трансляций) $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функции $f(t, x)$. При условии, что существуют в том или ином смысле пределы $f'(t, x)$ последовательностей вида $f(t + t_k, x)$, $t_k \rightarrow +\infty$, аналоги принципа инвариантности исходной системы (0.2) были получены в терминах предельных уравнений

$$\dot{x} = f'(t, x). \quad (0.3)$$

Такой подход в настоящее время известен как метод предельных уравнений, начало которому положили работы Дж. Селла [3, 4] и З. Артштейна [5] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений.

При рассмотрении неавтономных дифференциальных включений

$$\dot{x}(t) \in F(t, x) \quad (0.4)$$

или неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, представленных в форме дифференциальных включений, возникают еще проблемы, связанные с построением предельных дифференциальных соотношений на основе последовательностей сдвигов многозначных отображений, так как нет подходящих теорем математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости возникающих функциональных последовательностей. Впервые эти проблемы были рассмотрены в [6] и для разрывных систем — в [7, 8].

В настоящее время принцип инвариантности и его обобщения являются эффективными методами исследования асимптотической динамики различных систем. При этом для локализации ω -предельных множеств во множестве нулей производной функции Ляпунова могут использоваться различные средства, в том числе наборы вспомогательных функций Ляпунова $V_i(t, x)$.

Идея использования в теории устойчивости нескольких функций Ляпунова является весьма содержательной и рассматривалась в работах многих авторов. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с использованием двух функций Ляпунова впервые дана В. М. Матросовым [9].

Целью данной статьи является использование метода предельных дифференциальных включений и обобщений принципа инвариантности с набором вспомогательных функций Ляпунова для изучения асимптотических свойств решений неавтономных дифференциальных включений.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для любого непустого множества A и точки a из пространства $\mathbb{R}^n$ через $d(a, A) = \inf_{b \in A} \|b - a\|$ обозначается расстояние от точки a до множества A , $A^\epsilon = \{x : d(x, A) < \epsilon\}$ — ϵ -окрестность множества A (где $\epsilon > 0$). Через $\bar{A}$ обозначим замыкание множества A , символом $\overline{\text{co}} A$ обозначим выпуклую оболочку множества A и $\text{conv } \mathbb{R}^n$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$.

Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ обозначается $\rho(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A)$. Очевидно, что значение $\rho(B, A)$ не изменится, если множество B или A заменить на его замыкание, а неравенство $\rho(B, A) < \epsilon$ равносильно вложению $B \subset A^\epsilon$. Через $\text{dist}(A, B) = \max\{\rho(B, A), \rho(A, B)\}$ в пространстве $\text{conv } \mathbb{R}^n$ обозначается метрика Хаусдорфа.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot, \cdot)$. Отображение $G : X \rightarrow \text{conv } \mathbb{R}^n$ называется *полу непрерывным сверху* в точке x_0 , если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $\varrho(x, x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset G^\epsilon(x_0)$.

Здесь и далее для многозначных отображений используем символ $G^\epsilon(x)$ для обозначения ϵ -окрестности $(G(x))^\epsilon$ множества $G(x)$ в каждой точке x .

Полунепрерывность сверху означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \rho(G(x), G(x_0)) = 0$ и для ограниченного многозначного отображения необходимым и достаточным условием полунепрерывности сверху является замкнутость графика (см. [10, с. 35–40]).

Будем рассматривать дифференциальное включение (0.4) с многозначным отображением $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{conv } \mathbb{R}^n$, для которого с помощью многозначного оператора сдвига $F(t + \tau, x)$ вводится два типа многозначных отображений:

$$F'(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \bigcup_{k \geq n} F(t + t_k, x), \quad F^*(t, x) = \bigcap_{b \geq 0} \overline{\text{co}} \bigcup_{\tau > b} F(t + \tau, x). \quad (1.1)$$

Они называются *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ и, соответственно, *предельным*. Оказывается, что отображение $F^*(t, x)$ не зависит от переменной t , поэтому можно полагать, например, что $F^*(x) = F^*(0, x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Соответствующие этим предельным отображениям дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F'(t, x) \quad (1.2)$$

и

$$\dot{x} \in F^*(x) \quad (1.3)$$

будем называть *предельными дифференциальными включениями*.

Как обычно, точка $z \in \mathbb{R}^n$ называется ω -предельной для решения $x(t)$, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$, такая, что $x(t_k) \rightarrow z$. Множество всех ω -предельных точек называется ω -предельным множеством решения $x(t)$ и обозначается $\Lambda^+(x)$.

Следующие свойства ω -предельных множеств (см., например, [11, с. 98]) справедливы для любой непрерывной кривой L ($\phi(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$) в $\mathbb{R}^n$.

1. Множество $\Lambda^+(L)$ замкнуто и

$$\Lambda^+(L) = \bigcap_{\tau' \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau'} (z(t))}.$$

2. Множество $\Lambda^+(L)$ пусто тогда и только тогда, когда $\|\phi(t)\| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

3. Множество $\Lambda^+(L)$ ограничено тогда и только тогда, когда кривая $\Lambda^+(L)$ ограничена.

4. Если кривая L ограничена, то множество $\Lambda^+(L)$ непусто, компактно, связно и $d(\phi(t), \Lambda^+(L)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

5. Если $\phi(t)$ является решением дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x) \tag{1.4}$$

с полунепрерывной сверху, выпуклозначной и ограниченной многозначной функцией $F(x)$, то через каждую точку $z \in \Lambda^+(x)$ проходит целая траектория решения включения (1.4) (свойство инвариантности для автономных систем).

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ *полуинвариантно* (*квазиинвариантно*), если для любой точки $y \in D$ существует решение $y(t)$ включения (1.3) (включения (1.2) с некоторым отображением $F'(t, x)$ в правой части), такое, что $y(0) = y$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Заметим, что свойство квазиинвариантности влечет свойство полуинвариантности для любого множества D , в том числе — для множества $\Lambda^+(x)$.

Сформулируем общие условия, при которых будет изучаться дифференциальное включение (0.4).

A1. Для каждой (t, x) множество $F(t, x)$ непусто, выпукло и компактно.

A2. Многозначное отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно сверху.

A3. Для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(t, x)$ ограничено на множестве $\mathbb{R}^1 \times K$, т. е. существует константа M , такая, что для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times K$ и $v \in F(t, x)$ выполняется неравенство $\|v\| \leq M$.

При выполнении условий A1–A3 для любых начальных условий (t_0, x_0) существует локальное решение задачи Коши включения (0.4), которое может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, \omega)$, и любое ограниченное, непродолжимое вправо решение определено на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Сформулируем дополнительное условие, при котором будут изучаться предельные дифференциальные включения (1.2) и (1.3).

A4. Для любых x и $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и γ , такие, что

$$F(t, x') \subset F^\epsilon(t, x)$$

для всех $t > \gamma$ и $\|x' - x\| < \delta$.

Отметим, что условие A4 означает $\lim_{t \rightarrow +\infty, x' \rightarrow x} \rho(F(t, x'), F(t, x)) = 0$. Оно выполняется, если отображение $F(t, x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно относительно t .

Пусть $x(t)$ — решение включения (0.4). Если при некоторых условиях предел $y(t)$ последовательности функций $y_k(t) = x(t + t_k)$ является решением дифференциального включения (1.2) или (1.3), то это позволяет устанавливать для ω -предельных множеств исходного включения (0.4) свойства типа инвариантности, которое лежит в основе доказательства аналогов принципа инвариантности для неавтономных дифференциальных включений.

Справедлива следующая

Теорема 1.1 (см. [7]). Пусть для многозначного отображения F выполняются условия A1–A4. Тогда:

1. Для предельных многозначных отображений F^* и F' , определенных равенствами (1.1), выполняются условия A1–A3.
2. Дифференциальное включение (0.4) и предельные дифференциальные включения (1.2), (1.3) для любых начальных данных (t_0, x_0) имеют решения, и любое их ограниченное непродолжимое вправо решение определено на правом максимальном промежутке существования $[t_0, +\infty)$.
3. Любое решение включения (1.2) является одновременно решением включения (1.3).
4. Если $x(t)$ — ограниченное решение включения (0.4) и $y^k(t) = x(t + t_k)$, то для любой последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ и для любого числа $T > 0$ из последовательности функций $y^k(t)$ можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $I = [0, T]$ подпоследовательность.
5. Предел $y(t)$ любой равномерно сходящейся на отрезке I последовательности функций $y^k(t)$ является решением включения (1.2) с предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части, и выполняется начальное условие $y(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k)$.
6. Для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (0.4) множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, квазиинвариантно и $d(x(t), \Lambda^+(x)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Для применения теоремы 1.1 важным является вопрос о построении и о свойствах предельных многозначных отображений F' и F^* . Для этого может быть полезным следующее

Утверждение 1.1 (см. [7]). Пусть x фиксировано и многозначное отображение $t \mapsto F(t, x)$ с выпуклыми компактными значениями ограничено. Обозначим $H(t) = F(t, x)$, $H^* = F^*(x)$ и для последовательности точек $t_n \rightarrow +\infty$ обозначим $H'(t) = F'(t, x)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Множества H^* и $H'(t)$ — непустые, выпуклые, компактные и справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\overline{\bigcup_{s \geq t} H(s)}, H^*) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\overline{\bigcup_{k \geq n} H(t + t_k)}, H'(t)) = 0.$$

2. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(H(t), P) = 0$, то $H'(t) = H^* = P$ для любого отображения $H'(t)$ и для любого t .

3. Если $\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \text{dist}(H(t + t_n), P(t)) = 0$, то $H'(t) = P(t)$ для любого t .

4. Если отображение $H(t)$ однозначно, то отображение $H'(t)$ в общем случае многозначно. При этом множество H^* одноточечно (соответственно, множество $H'(t)$ одноточечно) тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = H^*$ (соответственно, тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{t_n \rightarrow +\infty} H(t + t_n) = H'(t)$).

5. Если отображение $H(t)$ однозначно и непрерывно, то $H^* = [a, b]$, где a и b — нижний и, соответственно, верхний пределы функции $H(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

6. Множество H^* представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $h(t) \in H(t)$ при условии, что $t \rightarrow +\infty$.

7. При любом фиксированном t множество $H'(t)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов $z_n \in H(t + t_n)$, где $\{t_n\}$ — последовательность, которая определяет отображение $H'(t)$.

Пусть $V : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Обозначим

$$\dot{V}^+(t, x) = \sup_{y \in F(t, x)} (\langle \nabla_x V, y \rangle + V_t), \quad \dot{V}^-(t, x) = \inf_{y \in F(t, x)} (\langle \nabla_x V, y \rangle + V_t),$$

где $\nabla_x V$ — градиент функции V по переменной x , V_t — частная производная по t , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Утверждение 1.2. Пусть $x(t)$ — решение включения (0.4), определенное на некотором промежутке $[t_0, t_1]$. Тогда справедливы неравенства

$$\dot{V}^-(t, x(t)) \leq D_* v(t) \leq D^* v(t) \leq \dot{V}^+(t, x(t))$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$, где $D_* v(t)$ и $D^* v(t)$ — правое нижнее и, соответственно, правое верхнее производные числа Дини функции $v(t) = V(t, x(t))$.

Утверждение 1.2 представляет собой переформулировку теоремы 3 для функционально-дифференциальных включений из [8] применительно к дифференциальному включению (0.4).

Через $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ будем обозначать измеримую по t , непрерывную по x и ограниченную на каждом множестве $\mathbb{R}^1 \times K$ неотрицательную функцию, где множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для любого x справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty, x' \rightarrow x} |w(t, x') - w(t, x)| = 0,$$

которое означает, что для функции w выполняется условие A4.

Сформулируем две теоремы, которые являются аналогами принципа инвариантности для неавтономных дифференциальных включений и будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 1.2 (см. [6]). Пусть для дифференциального включения выполняются условия A1–A4 и существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, ограниченная снизу на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1 \times K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, такая, что выполняется условие

$$\dot{V}^+(t, x) \leq -w(t, x).$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (0.4) множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = 0\}, \quad (1.5)$$

где $\alpha(x)$ — нижний предел функции $t \rightarrow w(t, x)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим, что для каждого фиксированного x значение функции $\alpha(x)$ реализуется на некоторой последовательности $w(t_k, x)$ при $t_k \rightarrow +\infty$. Поэтому формуле (1.5) можно придать вид

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \rightarrow +\infty, \lim_{k \rightarrow +\infty} w(t_k, x) = 0\}.$$

Теорема 1.3 (см. [7]). Пусть функция $V(t, x)$ не зависит от переменной t и является непрерывно дифференцируемой. Введем обозначения:

$$\dot{V}^*(x) = \sup_{u \in F^*(x)} \langle \nabla V, u \rangle, \quad \dot{V}'(t, x) = \sup_{u \in F'(t, x)} \langle \nabla V, u \rangle$$

и через $\alpha(x)$ обозначим нижний предел при фиксированном x функции $-\dot{V}'(t, x)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Тогда для любого ограниченного решения включения (0.4) с ω -предельным множеством $\Lambda^+(x)$ справедливы следующие утверждения.

1. Для любой точки $y \in \Lambda^+(x)$ существуют предельное относительно некоторой последовательности $\{t_k\}$ отображение $F'(t, x)$ и решение $y(t)$ включения (1.2) с начальным условием $y(0) = y$, такие, что выполняется равенство

$$\dot{V}'(t, y(t)) = 0$$

для п. в. $t \geq 0$.

2. Множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}^*(x) = 0\}$.

2. Теоремы о притяжении

Пусть $V_j(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j \in \{1, \dots, m\}$. Введем обозначения:

$$\dot{V}_j'^+(t, x) = \sup_{u \in F'(t, x)} \langle \nabla V_j, u \rangle, \quad \dot{V}_j^{*+}(x) = \sup_{u \in F^*(x)} \langle \nabla V_j, u \rangle$$

и

$$\dot{V}_j'^-(t, x) = \inf_{u \in F'(t, x)} \langle \nabla V_j, u \rangle, \quad \dot{V}_j^{*-}(x) = \inf_{u \in F^*(x)} \langle \nabla V_j, u \rangle.$$

Теорема 2.1. Пусть выполняются все условия теоремы 1.2, $M \subset E_w$ — замкнутое множество, и существуют непрерывно дифференцируемые функции $V_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, такие, что для любого $x \in E_w \setminus M$ найдется индекс $j \in \{1, \dots, m\}$ такой, что

$$V_j(x) = 0, \quad (2.1)$$

и для любого предельного отображения $F'(t, x)$ выполняется одно из условий:

$$\dot{V}_j'^+(0, x) < 0, \quad \dot{V}_j'^-(0, x) > 0 \quad (2.2)$$

для всех $x \in E_w \setminus M$.

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (0.4) выполняется

$$\Lambda^+(x) \subset M. \quad (2.3)$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и существует точка $y_0 \in \Lambda^+(x) \setminus M$. В соответствии с теоремой 1.2 множество $\Lambda^+(x)$ квазиинвариантно. Тогда существует решение $y^1(t)$ включения (1.2) с начальным условием $y^1(0) = y_0$, удовлетворяющее соотношению $y^1(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$. Поскольку множество M замкнуто, то $y^1(t) \notin M$ для всех $t \in [0, h_0]$ для некоторого достаточно малого $h_0 > 0$, а в соответствии с теоремой 1.2 выполняется $y^1 \in E_w$ для всех $t \geq 0$. Тогда в соответствии с неравенствами (2.2) и утверждением 1.2, примененным к включению (1.2), найдутся функция V_{j_1} и достаточно малое число $0 < h_1 < h_0$ такие, что

$$V_{j_1}(y^1(0)) = 0, \quad V_{j_1}(y^1(h_1)) \neq 0, \quad y^1(h_1) \in \Lambda^+(x) \setminus M.$$

Аналогично вышесказанному, существуют решение $y^2(t)$ включения (1.2) с начальным условием $y^2(0) = y^1(h_1)$, удовлетворяющее соотношению $y^2(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$, число $h_2 > 0$ и функция V_{j_2} , $j_1 \neq j_2$, такие, что

$$V_{j_2}(y^2(h_1)) = 0, \quad V_{j_2}(y^2(h_2)) \neq 0, \quad y^2(h_2) \in \Lambda^+(x) \setminus M.$$

Так как $V_{j_1}(y^1(h_1)) \neq 0$, то число h_2 можно взять настолько малым, что $V_{j_1}(y^2(h_2)) \neq 0$. Продолжая этот процесс, получим точку h_m такую, что $y(t_m) \in E_w \setminus M$ и $V_j(y(h_m)) \neq 0$ для всех $j = 1, \dots, m$. Последнее противоречит условию (2.1) и теорема доказана. $\square$

Теорема 2.2. Пусть выполняются все условия теоремы 1.2, $M \subset E_w$ — замкнутое множество и существуют непрерывно дифференцируемые функции $V_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, такие, что для любого $x \in E^* \setminus M$ выполняется (2.1) и одно из условий:

$$\dot{V}_j^{*+}(0, x) < 0, \quad \dot{V}_j^{*-}(0, x) > 0. \quad (2.4)$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (0.4) выполняется (2.3).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.1 с заменой производных $\dot{V}^{'+}(t, x) = \dot{V}'^-(t, x)$ на $\dot{V}^{*+}(x)$ и $\dot{V}^{*-}(x)$, соответственно, и использовании неравенств (2.4).

Следствие 2.1. В рамках предположений теоремы 2.1 или теоремы 2.2 для любого ограниченного решения дифференциального включения (0.4) выполняется $d(x(t), M) \rightarrow 0$.

Отметим, что в теоремах 2.1 и 2.2 множество $\Lambda^+(x)$ можно заменить на любое квазиинвариантное или полуинвариантное множество $D \subset E_w$.

Пример 2.1. Уравнение движения линейного осциллятора (материальной точки единичной массы) с сухим трением под действием упругой силы $F(x) = -kx$ ($k > 0$) на горизонтальной прямой Ox имеет вид.

$$\ddot{x} = -kx - f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}. \quad (2.5)$$

Здесь $P = mg$ — вес тела, $F^T(t, \dot{x}) = -f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}$ — сила сухого трения Кулона при условии $\dot{x} \neq 0$, $f(t) \geq 0$ — коэффициент трения, $\operatorname{sgn} \dot{x}$ — функция знака скорости $v = \dot{x}$.

Задача состоит в наиболее полном описании множества точек, к которому стремятся решения уравнения (2.5) при $t \rightarrow +\infty$.

Простейшее выпуклое доопределение силы трения в точке $\dot{x} = 0$ правой части уравнения (2.5) по Филиппову приводит к дифференциальному включению

$$\ddot{x} \in -kx + F^{fr}(t, \dot{x}), \quad (2.6)$$

где $F^{fr}(t, \dot{x}) = -f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}$ при условии $\dot{x} \neq 0$ и $F^{fr}(t, 0) = [-f(t)P, f(t)P]$.

Функция $f(t)$ предполагается непрерывной и ограниченной на всей числовой прямой с условием

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty, t \rightarrow +0} (f(t + \xi) - f(\xi)) = 0, \quad (2.7)$$

которое обеспечивает выполнение для дифференциального включения (2.6) условия A4. Неравенство (2.7) выполняется, если, например, функция $f(t)$ равномерно непрерывна.

Обозначим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{s \in (t, +\infty)} f(s) = a, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{s \in (t, +\infty)} f(s) = b. \quad (2.8)$$

Для произвольной последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ через $f'(t)$ обозначим предельное (вообще говоря, многозначное) отображение для функции $f(t)$, порожденное последовательностью точек t_k . Согласно утверждению 1.1 множество $f'(t)$ в каждой точке $t \geq 0$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательности значений $f(t + t_k)$. Тогда значением отображения $f'(t)$ в каждой точке t является некоторый отрезок $f'(t) = [m'(t), M'(t)]$, и выполняется $a \leq m'(t) \leq M'(t) \leq b$. Обозначим $f^* = [a, b]$. Тогда предельными дифференциальными включениями для (2.6) будут

$$m\ddot{x} \in -kx + F'(t, \dot{x}), \quad m\ddot{x} \in -kx + F^*(\dot{x}), \quad (2.9)$$

где

$$F'(t, \dot{x}) = \begin{cases} [-M'(t)P, -m'(t)P], & \text{если } \dot{x} > 0, \\ [-M'(t)P, M'(t)P], & \text{если } \dot{x} = 0, \\ [m'(t)P, M'(t)P], & \text{если } \dot{x} < 0, \end{cases} \quad F^*(\dot{x}) = \begin{cases} [-bP, aP], & \text{если } \dot{x} > 0, \\ [-bP, bP], & \text{если } \dot{x} = 0, \\ [aP, bP], & \text{если } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + kx^2).$$

Тогда $\dot{V}^+(t, x, \dot{x}) = -f(t)P|\dot{x}| \leq 0$ и, полагая $w(t, x, \dot{x}) = f(t)P|\dot{x}|$, из первого равенства (2.8) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{s \in (t, +\infty)} w(s, x, \dot{x}) = aP|\dot{x}|.$$

Сделаем некоторые выводы.

1. Так как функция $V(x, \dot{x})$ является ограниченной снизу и бесконечно большой при $\|(x, \dot{x})\| \rightarrow +\infty$, то все решения уравнения (2.5) ограничены. Поэтому в соответствии с теоремой 2.1 ω -предельное множество $\Lambda^+(x, \dot{x})$ любого решения $(x(t), \dot{x}(t))$ включения (2.6) принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества E_w .

2. Если $a > 0$, то $\Lambda^+(x, \dot{x}) \subset \{(x, \dot{x}) : \dot{x} = 0\}$.

3. Для любого решения $(x(t), \dot{x}(t))$ включения (2.6) функция $t \mapsto V(x(t), \dot{x}(t))$ является невозрастающей и поэтому имеет предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t), \dot{x}(t)) = c \geq 0$. Следовательно, $\Lambda^+(x, \dot{x})$ принадлежит линии уровня функции Ляпунова $V(x, \dot{x})$ и является параболой при $\dot{x} = 0$. Поэтому $\Lambda^+(x, \dot{x})$ содержит не более двух точек, которые определяются из уравнения $kx^2 = c$ и являются положениями равновесия предельных дифференциальных включений (2.9). Таким образом, множество $\Lambda^+(x, \dot{x})$ состоит из точек $(x, \dot{x})$, для которых $|x| \leq M'(t) \leq b$ для всех $t \leq 0$ и $\dot{x} = 0$.

4. В силу связности множества $\Lambda^+(x, \dot{x})$ оно всегда состоит лишь из одной точки $(x_0, 0)$ или $(-x_0, 0)$. Очевидно, это может быть точка $(0, 0)$.

5. Существует последовательность $t_k^{inf} \rightarrow +\infty$, такая, что $f(t_k^{inf}) \rightarrow a$. При этом для любого $t \geq 0$ выполняется $(x(t + t_k), \dot{x}(t + t_k)) \rightarrow (x_0, 0)$ для любой последовательности такой, что $t_k \rightarrow +\infty$ и в том числе — для последовательности $\{t_k^{inf}\}$. Поэтому выполнено $a = m'(0) = M'(0)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию Ляпунова $V_1(x, \dot{x}) = \dot{x}$ и множество $M = \{(x, \dot{x}) : |x| \leq aP/k, \dot{x} = 0\}$. Тогда $V_1(x, 0) = 0$ и для первого включения из (2.9) выполняется $\dot{V}_1^+(x, 0) = -kx + aP$ для любого x . Следовательно, если окажется, что $|x| > aP/k$, то выполняется одно из неравенств: $\dot{V}_1^+(x, 0) < 0$ или $\dot{V}_1^-(x, 0) > 0$, и тогда в силу теоремы 2.1 выполняется $\Lambda^+(x, \dot{x}) \subset M$.

Проведенный анализ показывает, что при условии $a > 0$ любое решение $(x(t), \dot{x}(t))$ уравнения (2.5) стремится к точке $(x_0, 0)$ такой, что $|x_0| \leq aP/k$, где a — нижний предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

В ситуации, когда $b = a > 0$, предельные дифференциальные включения (2.9) совпадают, и любое решение уравнения (2.5) стремится к точке $(x, 0)$, которая удовлетворяет условию $|x| \leq fP/k$ и является положением равновесия автономного уравнения

$$\ddot{x} = -kx - f \operatorname{sgn} \dot{x}. \quad (2.10)$$

Множество всех таких точек (неизолированных положений равновесия уравнения (2.10) линейного осциллятора с постоянным коэффициентом трения $f = a = b$) называется «зоной застоя».

Если же $b = 0$, то зона застоя отсутствует, и любое решение уравнения (2.5) стремится к какой-либо замкнутой траектории периодического решения уравнения $\ddot{x} = -kx$ линейного математического маятника.

3. Заключение

Теоремы 2.1 и 2.2 не позволяют в полной мере решать задачу притяжения для включения (0.4), так как множество M заранее неизвестно и может формироваться, по сути, лишь в ходе анализа множеств E_w и V^* . Набор вспомогательных функций V_j не однозначен, и чем он будет богаче, тем точнее определяется притягивающее множество M . Отметим также, что в теоремах 2.1 и 2.2 требуется ограниченность решений дифференциального включения (0.4).

Теория ограниченности решений систем дифференциальных уравнений на основе метода функций Ляпунова развита в работе Т. Иосидзавы [12].

Различные типы ограниченности решений и их сравнительный анализ имеется в [2]. В [9] к теории ограниченности решений применяются методы вектор-функций Ляпунова. Здесь мы сформулируем лишь одно простое заключение: если для любого числа $A > 0$

существует число $B > 0$ такое, что $|V(t, x)| > A$ для всех $t > B$, $\|x\| > B$, то любое решение включения (0.4) ограничено.

Вопрос о справедливости теорем 2.1 и 2.2 остается открытым для неограниченных решений. В этой ситуации может оказаться полезной теория ограниченности решений по Пуассону, развитая в [13].

Сделаем несколько замечаний о механических системах с кулоновым трением.

Вопросы притяжения для механических систем в форме уравнений Лагранжа второго рода с использованием набора вспомогательных функций Ляпунова в автономном случае рассмотрены в [14]. Здесь наибольший интерес представляет вопрос притяжения для множества положений равновесия. Если к качеству основной функции Ляпунова рассматривать полную энергию системы, то исследования сведутся к анализу множества нулей производной этой функции. В статье [15] это множество удалось описать достаточно конструктивно. Вопрос о том, стремится ли ограниченное решение исходной системы к какому-либо конкретному положению равновесия, остается открытым и требует дополнительного исследования. Для этого могут использоваться какие-либо предположения и любые подходящие для этой цели средства и факты, свойства ω -предельных множеств, структура исходных и предельных дифференциальных включений. В общем виде такие исследования не всегда возможны и вряд ли целесообразны. В данной статье это сделано в примере.

Наконец отметим, что если $F(t, x) = f(t, x)$ — однозначное отображение, то отображения $F'(t, x)$ и $F^*(t, x)$ в общем случае многозначны. Но при этом, если последовательность $f^{tk}(t, x)$ сходится поточечно, то ее предельное отображение $f'(t, x)$ из правой части уравнения (0.3) совпадает с $F'(t, x)$, а множество $F^*(x)$ для каждой точки x по сути является ω -предельным множеством для отображения $t \rightarrow F(t, x)$. Таким образом, предлагаемый подход может быть использован в равной степени для дифференциальных уравнений (0.2).

References

- [1] Е. А. Барбашин, *Функции Ляпунова*, Наука, М., 1970. [E. A. Barbashin, *Lyapunov Functions*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].
- [2] J. P. LaSalle, “Stability theory for ordinary differential equations”, *Journal of Differential Equations*, **4**:1 (1968), 57–65.
- [3] G. R. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I. The basic theory”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 241–262.
- [4] G. R. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II. Limiting equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 263–283.
- [5] Z. Artstein, “Topological dynamics of an ordinary differential equation”, *Journal of Differential Equations*, **23**:2 (1977), 216–223.
- [6] И. А. Финогенко, “Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем”, *Сибирский математический журнал*, **55**:2 (2014), 454–471; англ. пер.: I. A. Finogenko, “Limit differential inclusions and the principle of invariance of non-autonomous systems”, *Siberian Mathematical Journal*, **55**:2 (2014), 372–386.
- [7] И. А. Финогенко, “Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями”, *Сибирский математический журнал*, **57**:4 (2016), 913–927; англ. пер.: I. A. Finogenko, “Invariance principle for non-autonomous differential equations with discontinuous right-hand sides”, *Siberian Mathematical Journal*, **57**:4 (2016), 715–725.

- [8] И. А. Финогенко, “Проблемы и методы исследования функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью”, *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*, **522**:2 (2025) (в печати). [I. A. Finogenko, “Problems and methods of studying functional-differential equations with discontinuous right-hand side”, *Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, Informatics, Control Processes*, **522**:2 (2025), In Russian (to appear)].
- [9] В. М. Матросов, *Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств систем*, Физматлит, М., 2001. [V. M. Matrosov, *Method of Vector Lyapunov Functions: Analysis of Dynamic Properties of Systems*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russian)].
- [10] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, КомКнига, М., 2005. [by Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, KomKniga Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].
- [11] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985. [A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russian)].
- [12] Т. Yoshizawa, “Liapunov’s function and boundedness of solutions”, *Funkcialaj Ekvacioj*, **2** (1959), 95–142.
- [13] К. С. Лапин, *Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений*, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, Саранск, 2022, 165 с. [K. S. Lapin, *Poisson boundedness of solutions of systems of differential equations*, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, 2022 (In Russian), 165 pp.].
- [14] В. М. Матросов, И. А. Финогенко, “О принципе инвариантности и притягивающих множествах для автономных систем”, *Доклады РАН*, **349**:1 (1996), 46–48; англ. пер.: V. M. Marrosov, I. A. Finogenko, “The invariance principle and attracting sets for autonomous systems”, *Dokl. Math.*, **41**:7 (1996), 313–315.
- [15] И. А. Финогенко, “Об асимптотическом поведении механических систем с трением”, *Сибирский математический журнал*, **63**:5 (2022), 1158–1169; англ. пер.: I. A. Finogenko, “On the asymptotic behavior of mechanical systems with friction”, *Siberian Mathematical Journal*, **63**:5 (2022), 974–982.

Информация об авторе

Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: fin@icc.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6821-3385>

Поступила в редакцию 07.04.2025 г.
 Поступила после рецензирования 02.06.2025 г.
 Принята к публикации 06.06.2025 г.

Information about the author

Ivan A. Finogenko, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Chief Researcher, V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: fin@icc.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6821-3385>

Received 07.04.2025
 Reviewed 02.06.2025
 Accepted for press 06.06.2025