

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673

УДК 519.86

ЗАМКНУТОСТЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОДЕЛЯХ

© Н. Г. Павлова

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт»
141701, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: natasharussia@mail.ru

Аннотация. Изучается вопрос о свойствах технологического множества в динамических производственных моделях. Исследуемые модели рассматриваются как линейные динамические управляемые системы, в которых управлением служит функция непроизводственного потребления, принимающая значения в выпуклом замкнутом конечнопорожденном конусе.

Ключевые слова: линейные управляемые системы; модель Леонтьева; множество достижимости; технологическое множество

В работе изучаются открытые динамические модели межотраслевого баланса леонтьевского типа. В таких моделях экономических систем продукция, выпускаемая с применением экономических факторов, сама используется как фактор производства других видов продукции. Кроме того, часть валового выпуска идет на непроизводственное потребление. В исследуемых моделях важным является вопрос замкнутости технологического множества, описывающего производственный процесс. В данной работе получены необходимые условия замкнутости технологического множества в исследуемых моделях. Они применяются, в частности, при исследовании моделей типа «спрос-предложение» (см., например, [1, 2]), в которых функция предложения является решением задачи максимизации функции прибыли на технологическом множестве.

Рассмотрим открытую динамическую модель В.В. Леонтьева, а именно

$$\dot{x} = Ax + B\dot{x} + u, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ и $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^* \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор валовых выпусков отраслей и вектор непроеизводственного потребления соответственно. Знак "*" здесь и далее означает транспонирование. В исследуемой модели предполагается выполнение условия Хаукинса–Саймона (см. [3]), а именно, матрица прямых затрат $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ является продуктивной: $a_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$; $\forall v \in \mathbb{R}_+^n \exists w \in \mathbb{R}_+^n : w = Aw + v$. Кроме того, матрица прироста основных производственных фондов $B = bI$, $b > 0$, I – единичная матрица порядка n .

Допустимым управлением будем называть всякую существенно ограниченную функцию $u(t)$, $t \in [0, T]$, для которой $u(t) \in \mathbb{R}_+^n$ для п.в. t .

Технологическим множеством в момент времени T является множество

$$P_T = \left\{ (-Ay; y) \mid y \in \mathbb{R}_+^n : \right. \\ \left. \exists u(\cdot) \in L_\infty[0; T], u(t) \in \mathbb{R}_+^n \forall t \in [0; T], \right. \\ \left. y = x(T), \text{ где } x(\cdot) \text{ — решение (1), (2), соответствующее } u(\cdot) \right\}. \quad (3)$$

Очевидно, технологическое множество P_T в исследуемой модели является выпуклым конусом с вершиной в нуле. Для получения необходимых условий замкнутости технологического множества применяются результаты работы [4], посвященной исследованию топологических свойств множества достижимости линейных систем.

Рассмотрим объект, поведение которого описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор фазового состояния системы, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^* \in \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор управления, C , D – матрицы $n \times n$.

Допустимым управлением будем называть всякую существенно ограниченную функцию $u(t)$, $t \in [0, T]$, для которой $u(t) \in K$ для п.в. t , K – выпуклый конечнопорожденный конус, то есть

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \lambda_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1, k} \right\}.$$

Здесь u_i – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, причем $u_i \neq \bar{0} \quad \forall i = \overline{1, k}$.

Множеством достижимости D_T в момент времени T назовем множество всех точек из фазового пространства $\mathbb{R}^n$, в которые можно перейти на отрезке времени $[0; T]$ из

точки $x(0) = 0$ по решениям системы уравнений (4) при всех возможных допустимых управлениях $u(\cdot)$:

$$D_T = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in L_\infty[0; T], u(t) \in K \ \forall t \in [0; T],$$

$$y = x(T), \text{ где } x(\cdot) - \text{ решение (4), (5), соответствующее } u(\cdot)\}.$$

Определим матрицы:

$$D_i = C^{i-1}D, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следующая теорема дает условия, гарантирующие открытость множества $D_T \setminus \{0\}$.

Теорема 1. (см. [4]) Пусть для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$\text{rang}\{D_1 u_i, D_2 u_i, \dots, D_n u_i\} = n.$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Заметим, что задача (1), (2) эквивалентна (4), (5), где $C = B^{-1}(I - A)$, $D = -B^{-1}$, I – единичная матрица порядка n . Кроме того, для рассматриваемой задачи

$$u_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad u_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad u_n = (0, 0, \dots, 1). \quad (6)$$

Применяя теорему 1 к исследуемой модели, учитывая (6), получаем необходимые условия замкнутости технологического множества в динамической модели Леонтьева с непрерывным временем.

Теорема 2. Пусть в модели (1), (2) технологическое множество P_T замкнуто. Тогда выполнены следующие условия

i) если $n = 2$, то $a_{12}a_{21} = 0$;

ii) если $n = 3$, то существует такое $i = \overline{1, 3}$, что

$$\tilde{a}_{2i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{ki} = \tilde{a}_{3i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki},$$

где

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3};$$

iii) если $n \geq 4$, то

$$\begin{aligned} & \exists i = \overline{1, n}, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \neq 0, \\ & \forall s = \overline{2, n} \quad \alpha_1 b^{-2} \tilde{a}_{si} + \alpha_2 b^{-3} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{sk} \tilde{a}_{ki} + \\ & + \sum_{r=4}^n \alpha_{r-1} b^{-r} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{s k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - 1$, $i = \overline{1, n}$, $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3) из замкнутости технологического множества P_T следует замкнутость множества достижимости D_T . Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\exists i = \overline{1, n} : rang\{D_1 u_i, D_2 u_i, \dots, D_n u_i\} < n. \quad (7)$$

Имеем

$$D_1 = -b^{-1}I; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_2 &= B^{-1}(A - I)B^{-1} = (d_{2ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \\ d_{2ii} &= b^{-2}(a_{ii} - 1), \quad i = \overline{1, n}, d_{2ij} = b^{-2}a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_3 &= (B^{-1}(I - A))^2 (-B^{-1}) = -B^{-1}(A - I)D_2 = (d_{3ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \\ d_{3ij} &= -b^{-3} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{kj}, \quad i, j = \overline{1, n}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D_r &= (B^{-1}(I - A))^{r-1} (-B^{-1}) = \\ &= -B^{-1}(A - I)D_{r-1} = (d_{rij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{4, n}, \\ d_{rij} &= (-1)^r b^{-r} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{m=\overline{1, r-3}} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{ik_1} \tilde{a}_{k_{r-2} j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда в силу (6) и (8) имеем

$$D_1 u_i = -b^{-1} (1, 0, \dots, 0)^*, \quad i = \overline{1, n}; \quad (12)$$

в силу (6) и (9)

$$D_2 u_i = b^{-2} (\tilde{a}_{1i}, \tilde{a}_{2i}, \dots, \tilde{a}_{ni})^*, \quad i = \overline{1, n}; \quad (13)$$

в силу (6) и (10)

$$D_3 u_i = -b^{-3} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{ki} \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{nk} \tilde{a}_{ki} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (14)$$

в силу (6) и (11)

$$D_r u_i = (-1)^r b^{-r} \begin{pmatrix} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{m=\overline{1, r-3}} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{1k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{m=\overline{1, r-3}} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{2k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \dots \\ \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{m=\overline{1, r-3}} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{nk_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{4, n}. \quad (15)$$

Из (12) следует, что условие (7) эквивалентно следующему

$$\exists i = \overline{1, n} : \text{rang}\{D_2 u_i, \dots, D_n u_i\} < n - 1. \quad (16)$$

В свою очередь условие (16) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\exists i = \overline{1, n}, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \neq 0, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D_{j+1} u_i = 0. \quad (17)$$

В силу (13)–(15) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D_{j+1} u_i &= \alpha_1 b^{-2} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1i} \\ \tilde{a}_{2i} \\ \dots \\ \tilde{a}_{ni} \end{pmatrix} - \alpha_2 b^{-3} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{ki} \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{nk} \tilde{a}_{ki} \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{r=4}^n \alpha_{r-1} (-1)^r b^{-r} \begin{pmatrix} \sum_{l=1, r-2}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{1k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \sum_{l=1, r-2}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{2k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \dots \\ \sum_{l=1, r-2}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{nk_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (17) следует утверждение (iii) теоремы.

В случае двухсекторной модели экономики ($n=2$) имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0)^*, u_2 = (0, 1)^*; \\ D_1 u_1 &= \begin{pmatrix} -b^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, D_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b^{-1} \end{pmatrix}, \\ D_2 u_1 &= \begin{pmatrix} b^{-2}(a_{11} - 1) \\ b^{-2}a_{21} \end{pmatrix}, D_2 u_2 = \begin{pmatrix} b^{-2}a_{12} \\ b^{-2}(a_{22} - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{rang}\{D_1 u_j, D_2 u_j\} = \begin{cases} 1, & a_{ij} = 0, \\ 2, & a_{ij} \neq 0; \end{cases} \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение (i) теоремы.

Для случая трехсекторной модели экономики ($n=3$) имеем

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0)^*, \quad u_3 = (0, 0, 1)^*,$$

$$D_1 u_1 = \begin{pmatrix} -b^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b^{-1} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$D_2 u_1 = \begin{pmatrix} b^{-2}(a_{11} - 1) \\ b^{-2}a_{21} \\ b^{-2}a_{31} \end{pmatrix}, \quad D_2 u_2 = \begin{pmatrix} b^{-2}a_{12} \\ b^{-2}(a_{22} - 1) \\ b^{-2}a_{32} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$D_2 u_3 = \begin{pmatrix} b^{-2}a_{13} \\ b^{-2}a_{23} \\ b^{-2}(a_{33} - 1) \end{pmatrix},$$

$$D_3 u_1 = \begin{pmatrix} -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{k1} \\ -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{k1} \\ -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{k1} \end{pmatrix}, \quad D_3 u_2 = \begin{pmatrix} -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{k2} \\ -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{k2} \\ -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{k2} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$D_3 u_3 = \begin{pmatrix} -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{k3} \\ -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{k3} \\ -b^{-3} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{k3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Из (18) следует, что для любого $i = \overline{1, 3}$

$$\text{rang} \{D_1 u_i, D_2 u_i, D_3 u_i\} = \text{rang} \{D_2 u_i, D_3 u_i\} + 1.$$

В то же время, вследствие (19) и (20), $\forall i = \overline{1, 3} \quad \text{rang} \{D_2 u_i, D_3 u_i\} = 2$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{a}_{2i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{ki} \neq \tilde{a}_{3i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда из теоремы 1 следует утверждение (ii) теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A.V., Pavlova N.G., Shananin A.A. New conditions for the existence of equilibrium prices // Yugoslav J. Operations Research. 2018. Vol. 28. № 1. P. 59-77.
2. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 225-237.
3. Hawkins D., Simon H.A. Some Conditions of Macroeconomic Stability // Econometrica. 1949. Vol. 17 (3/4). P. 245-248.

4. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г. О топологических свойствах множества достижимости линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 2. С. 1564-1566.

Поступила в редакцию 11 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 17 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент Математического института им. С.М. Никольского; Московский физико-технический институт, доцент кафедры высшей математики; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, старший научный сотрудник, лаборатория 06, e-mail: natasharussia@mail.ru

Для цитирования: Павлова Н.Г. Замкнутость технологического множества в динамических производственных моделях // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 666–673. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673

CLOSEDNESS OF THE TECHNOLOGY SET IN DYNAMICAL PRODUCTION MODELS

N. G. Pavlova

RUDN University

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

Moscow Institute of Physics and Technology

9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

E-mail: natasharussia@mail.ru

Abstract. The paper is a study of some properties of the technology set in dynamical production models. The models under consideration are treated as a linear dynamical control systems, where the input is the non-productive consumption function, which takes values from a convex closed finitely generated cone.

Keywords: linear control systems; Leontief model; attainability set; technology set

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Pavlova N.G., Shananin A.A. New conditions for the existence of equilibrium prices. *Yugoslav J. Operations Research*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 59-77.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Pavlova N.G. Equilibrium price as a coincidence point of two mappings. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 2, pp. 158-169.
3. Hawkins D., Simon H.A. Some Conditions of Macroeconomic Stability. *Econometrica*, 1949, vol. 17 (3/4), pp. 245-248.
4. Arutyunov A.V., Pavlova N.G. O topologicheskikh svoystvakh mnozhestva dostizhimosti lineynykh sistem [On topological properties of the attainability set of linear systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 2, pp. 1564-1566. (In Russian).

Received 11 April 2018

Reviewed 17 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Pavlova Natal'ya Gennad'evna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics Institute named after S.M. Nikolsky; Moscow Institute of Physics and Technology, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Senior Researcher, Laboratory 06, e-mail: natasharussia@mail.ru

For citation: Pavlova N.G. Zamknutost' tekhnologicheskogo mnozhestva v dinamicheskikh proizvodstvennykh modelyakh [Closedness of the technology set in dynamical production models.]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 666–673. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01168).