

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565

УДК 519.622.2

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© А. Н. Пчелинцев

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается модификация метода степенных рядов для численного построения неустойчивых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений хаотического типа с квадратичными нелинейностями в общем виде. Найдена область сходимости рядов и предложен алгоритм построения приближенных решений.

Ключевые слова: хаос; система Лоренца; аттрактор; степенные ряды

Введение

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = B_0 + B_1 x + \varphi(x), \quad (1)$$

где $x(t) = [x_{(1)}(t) \dots x_{(m)}(t)]^T$ – векторная функция времени t со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$, $B_0 \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор-столбец,

$$\varphi(x) = [\varphi_{(1)}(x) \dots \varphi_{(m)}(x)]^T,$$

$\varphi_{(p)}(x) = \langle Q_p x, x \rangle$, B_1 и Q_p ($p = \overline{1, m}$) – матрицы $(m \times m)$ действительных чисел. Анализ современной литературы показал, что формулы общего решения систем вида (1) в классе каких-либо известных функций пока не найдено.

Пусть в фазовом пространстве системы (1) имеется ограниченное множество (называемое аттрактором), к которому стремятся со временем все соседние фазовые траектории из некоторой области, называемой областью притяжения (см. [1, с. 31]). Следовательно, аттрактор определяет поведение близких ограниченных решений системы (1) при больших значениях t . Будем рассматривать такие решения на некотором заданном отрезке времени $\Omega = [0; T]$. Заметим, что в простейшем случае аттрактором может быть, например, положение равновесия или цикл.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00801).

Однако в системе с $m > 2$ может существовать так называемый странный аттрактор, состоящий из всюду плотных седловых траекторий, вдоль которых близкие траектории экспоненциально разбегаются. При этом имеются области притяжения, возвращающие траектории к аттрактору. Это и создает их хаотическое поведение. Из-за неустойчивости хаотических решений на аттракторах системы (1) правильный численный прогноз их поведения на заданном отрезке времени важен в понимании, например, процессов эволюции (если рассматривается модель [2] роста раковых опухолей) и снижения неопределенности.

Таким образом, хаотическое поведение решений динамических систем вызывает трудности применения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Многие исследователи используют разные числовые схемы, основанные на классических методах, например, сочетание явного метода Эйлера с центрально-разностной схемой [3], метод Адамса [4], Рунге–Кутты 4-го порядка [5] и др. Однако указанные методы не могут быть применены в нашем случае, поскольку глобальная ошибка увеличивается с увеличением отрезка интегрирования [6, с. 78, 83; 7]. С. Строгац в книге [8, с. 320–323] привел оценку времени T_c , когда две близкие в начальный момент времени траектории системы (1) критически разбегаются для системы Лоренца. В работе [7] авторы приводят регрессионную зависимость момента времени T_c от шага интегрирования Δt и порядка N_o численной схемы

$$T_c(N_o, \Delta t) \approx -2.6N_o \lg \Delta t$$

для классических значений параметров системы Лоренца. Также авторы отмечают, что численное решение сходится к различным положениям равновесия при различных значениях шага Δt после переходных хаотических режимов.

Отметим, что численное решение не может быть улучшено за счет уменьшения шага интегрирования, поскольку ошибка интегрирования имеет экстремальный характер как функция от Δt . Эту проблему можно решить, используя высокоточные вычисления [9]. Однако данный подход ставит исследователя в жесткие рамки: во-первых, малая степень свободы для уменьшения ошибки интегрирования (изменение величины шага Δt и точности представления вещественного числа для управления вычислительным процессом), во-вторых, большой объем вычислений при очень малых Δt . Методы Рунге–Кутты высокого порядка могут быть применены для получения решений с большей точностью, но соответствующие формулы для $N_o > 6$ являются достаточно громоздкими (см., например, книгу [10]).

В статье [11] авторы описывают метод многоступенчатой спектральной релаксации, который отличается от методов, указанных выше. Они используют спектральный метод Чебышева для решения системы (1) в форме Гаусса–Зейделя с помощью итерационной схемы на каждой части отрезка интегрирования. Преимущество состоит в том, что накопление ошибки не так велико, как в прямых методах.

Для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений иногда используется метод степенных рядов (или метод рядов Тейлора). В работах [12, 13] этот метод используется как одна из разновидностей метода разложения Адомяна (МРА). В этих исследованиях авторы получают коэффициенты разложения реше-

ния в степенной ряд для разных систем вида (1) без нахождения радиуса сходимости. Ошибка приближенного хаотического решения сравнивается только с численными результатами методов Рунге–Кутты. П. Вадаш и С. Олек в работе [14] также изучили зависимость коэффициентов степенных рядов от числа членов в разложении.

В данной статье рассматривается модификация метода степенных рядов (аналогичная МРА) для системы (1). Преимущество перед общей схемой метода рядов Тейлора состоит в том, что коэффициенты разложения могут быть достаточно быстро вычислены по рекуррентным формулам для систем с квадратичной правой частью. Кроме того, получена оценка области сходимости степенного ряда. Недавно [15, 16] такой подход был применен к системам Лоренца и Чена. Здесь обобщаются результаты для систем вида (1).

1. Примеры хаотических систем с квадратичными нелинейностями

Приведем два примера систем вида (1), для которых может быть применен рассматриваемый численный метод.

1. Система Лоренца [2]

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = \sigma(x_{(2)} - x_{(1)}), \\ \dot{x}_{(2)} = rx_{(1)} - x_{(2)} - x_{(1)}x_{(3)}, \\ \dot{x}_{(3)} = x_{(1)}x_{(2)} - bx_{(3)}. \end{cases}$$

Для данной системы матрицы имеют вид:

$$B_0 = \mathbf{0}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Система Джафари–Спротта [17]

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = x_{(2)}, \\ \dot{x}_{(2)} = -x_{(1)} + x_{(2)}x_{(3)}, \\ \dot{x}_{(3)} = x_{(3)} + ax_{(1)}^2 - x_{(2)}^2 - b. \end{cases}$$

В этом случае

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Численно-аналитическое решение системы дифференциальных уравнений

Система (1) имеет квадратичную правую часть по фазовым координатам. Это позволяет получить явную формулу для вычисления коэффициентов степенного ряда и оценку области сходимости.

Пусть

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i t^i, \quad (2)$$

где $\Lambda_0 = x(0)$ – вектор значений начальных условий для системы (1), $\Lambda_i \in \mathbb{R}^m$.

Произведение степенных рядов в форме Коши в векторной форме имеет вид

$$\varphi_{(p)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{i(p)} t^i, \quad \Phi_{i(p)} = \sum_{j=0}^i \langle Q_p \Lambda_j, \Lambda_{i-j} \rangle, \quad p = \overline{1, m}.$$

Пусть

$$\Phi_i = [\Phi_{i(1)} \dots \Phi_{i(m)}]^T.$$

Заметим, что

$$\Lambda_1 = B_0 + B_1 \Lambda_0 + \Phi_0. \quad (3)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим из системы (1) рекуррентное соотношение для вычисления векторов-коэффициентов степенного ряда при $i \geq 2$

$$\Lambda_i = \frac{B_1 \Lambda_{i-1} + \Phi_{i-1}}{i}. \quad (4)$$

Эта формула достаточно проста и быстро вычислима по сравнению с МРА, поскольку не содержит факториалов.

Хотя правая часть системы (1) является всюду аналитической, радиус сходимости ряда может быть ограниченной величиной и зависеть от Λ_0 .

3. Алгоритм построения дуги траектории

Рассмотрим алгоритм построения дуги траектории на заданном отрезке времени длиной T .

начало

1. **Задать** значения машинного эпсилон ε_m (для представления вещественного числа) и way (1 или -1).
2. **Задать** значения T , ε_p и Λ_0 .
3. $t := 0$.
4. **Вычислить** значение Δt как функцию от Λ_0 .
5. $t := t + \Delta t$.
6. **Если** $t > T$, **то** $flag := 1$; $\Delta t := \Delta t - (t - T)$
Иначе если $t < T$, **то** $flag := 0$
Иначе $flag := 1$.
7. $p := 1$; $i := 0$.
8. $x := \Lambda_0$.
9. $i := i + 1$; $p := p \cdot way \cdot \Delta t$.
10. **Вычислить** Λ_i по формулам (3) и (4).
11. $x := x + \Lambda_i \cdot p$.
12. $L := \|\Lambda_i\| \cdot |p|$.
13. **Если** $L > \varepsilon_p$, **то перейти** к шагу 9.
14. $\Lambda_0 := x$.
15. **Вывод** Λ_0 .
16. **Если** $flag = 0$, **то перейти** к шагу 4.

конец.

Переменная way обеспечивает численное интегрирование в обратном времени, когда ее значение равно -1 (в прямом направлении $way = 1$). На практике мы используем оба направления для проверки точности приближенного решения.

Рассмотрим более подробно процедуру построения дуги траектории.

Пусть $t_l \in \Omega$, $l = \overline{1, N}$ – индекс отрезков времени $[t_{l-1}; t_l]$, где ряд (2) сходится, N – количество таких отрезков, $t_0 = 0$, $t_N = T$,

$$\Omega = [t_0; t_1] \cup [t_1; t_2] \cup \dots \cup [t_{N-1}; t_N].$$

Зададим вектор Λ_0 значений начальных условий в момент времени t_0 . Тогда векторы Λ_i ($i = 1, 2, \dots$) вычисляются по формулам (3) и (4) до тех пор, пока не будет верна оценка

$$\|\Lambda_i\| |\Delta t_l|^i < \varepsilon_p, \quad (5)$$

где ε_p – локальная точность вычислений, $\Delta t_l = t_l - t_{l-1}$. Модуль в (5) используется в случае отрицательных значений шага Δt_l .

Пусть $x_1(t)$ – m -мерный полином n_1 -й степени, который получается из оценки (5) на первой стадии ($l = 1$) вычислений. На следующей стадии ($l = 2$) мы полагаем

$$\Lambda_0 := x_{l-1}(\Delta t_{l-1})$$

и установим теперь уже начальный момент времени t_1 равным нулю для упрощения вычислений, поскольку система (1) динамическая.

Если τ_l – длина отрезка некоторого отрезка сходимости ряда (2), то значение Δt_l выбирается как

$$0 < \Delta t_l < \tau_l$$

или

$$-\tau_l < \Delta t_l < 0.$$

4. Оценка длины отрезка сходимости степенного ряда в векторной форме

Оценка области сходимости ряда (2) важна, когда приближенные решения системы (1) вычисляются по алгоритму, описанному выше. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} h_1(\Lambda_0) &= \|\Lambda_0\|, \quad \mu = m \max_{p=1, m} \|Q_p\|, \\ h_2(\Lambda_0) &= \begin{cases} \|B_0\| + (\|B_1\| + 2\mu)h_1 + \mu h_1^2, & \text{если } h_1 > 1, \\ \|B_0\| + \|B_1\| + \mu & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Докажем, что ряд (2) сходится при $t \in (-\tau_l; \tau_l)$, где $\tau_l = 1/h_2$. Тогда число h_2 нужно выбрать так, чтобы $h_2|t| < 1$, и

$$\|\Lambda_i t^i\| \leq (h_2|t|)^i.$$

Тогда ряд (2) сходится.

Теорема 1. *Неравенство*

$$\|\Lambda_i\| \leq h_2^i \quad (7)$$

справедливо для любого натурального i .

Доказательство. Будем использовать метод математической индукции. Рассмотрим случай, когда $h_1 > 1$.

Покажем, что (7) верно для $i = 1$. Из формулы (3) и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1\| &\leq \|B_0\| + \|B_1\| \|\Lambda_0\| + m \max_{p=1,m} |\langle Q_p \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle| \leq \\ &\leq \|B_0\| + \|B_1\| h_1 + \mu h_1^2 \leq h_2^1,\end{aligned}$$

что доказывает справедливость (7) при $i = 1$.

Предположим, что (7) верно при $i = k$. Тогда оно верно для любого натурального $j = \overline{1, k}$, то есть

$$\|\Lambda_j\| \leq h_2^j. \quad (8)$$

Докажем теперь, что неравенство (7) верно для $i = k + 1$. Оценим

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=0}^k \langle Q_p \Lambda_j, \Lambda_{k-j} \rangle \right\| &\leq \mu \|\Lambda_0\| \|\Lambda_k\| + \mu \|\Lambda_k\| \|\Lambda_0\| + \\ &+ \mu \sum_{j=1}^{k-1} \|\Lambda_j\| \|\Lambda_{k-j}\| \leq 2\mu h_1 h_2^k + \\ &+ \mu \sum_{j=1}^{k-1} h_2^j h_2^{k-j} = 2\mu h_1 h_2^k + (k-1)\mu h_2^k.\end{aligned}$$

Из формулы (4) и неравенств (8) мы получаем оценку (учтя, что $k \geq 1$ and $h_1 > 1$)

$$\begin{aligned}\|\Lambda_{k+1}\| &\leq \frac{\|B_1\| \|\Lambda_k\| + 2\mu h_1 h_2^k}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \mu h_2^k \leq \|B_1\| h_2^k + \\ &+ 2\mu h_1 h_2^k + \mu h_2^k \leq (\|B_0\| + \|B_1\| + 2\mu h_1 + \mu) h_2^k \leq \\ &\leq h_2 h_2^k = h_2^{k+1},\end{aligned}$$

которая доказывает справедливость (7) для любого натурального i .

Теперь покажем справедливость другого случая – $h_2 \leq 1$, то есть по индукции выполнение неравенства (7) в данном случае.

Для $i = 1$ мы имеем

$$\|\Lambda_1\| \leq \|B_0\| + \|B_1\| + \mu = h_2^1,$$

откуда (7) верно.

Предположим, что (7) верно для $i = k$. Оценим

$$\left\| \sum_{j=0}^k \langle Q_p \Lambda_j, \Lambda_{k-j} \rangle \right\| \leq 2\mu h_2^k + (k-1)\mu h_2^k = (k+1)\mu h_2^k.$$

Докажем справедливость (7) при $i = k + 1$. Из формулы (4) и предположения справедливости

$$\begin{aligned}\|\Lambda_{k+1}\| &\leq \frac{\|B_1\| \|\Lambda_k\|}{k+1} + \mu h_2^k \leq \|B_1\| h_2^k + \mu h_2^k = \\ &= (\|B_1\| + \mu) h_2^k \leq h_2 h_2^k = h_2^{k+1},\end{aligned}$$

что доказывает (7) для любого натурального i , когда $h_2 \leq 1$.

Из формулы (6) следует, что описанным методом можно численно построить и непродолжаемые решения системы (1): при приближении к вертикальным асимптотам решения значения фазовых координат увеличивается, а величина

$$\tau_l = O\left(\frac{1}{\|\Lambda_0\|^2}\right)$$

уменьшается. Отметим, что в работе [18] получена модификация метода Эйлера, позволяющая изменять значение Δt_l в зависимости от поведения фазовой координаты вблизи асимптоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 552 с.
2. Llanos-Pérez J.A., Betancourt-Mar J.A., Cochob G., Mansilla R., Nieto-Villar J.M. Phase transitions in tumor growth: III vascular and metastasis behavior // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2016. Vol. 462. P. 560-568.
3. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. Vol. 20. № 2. P. 130-141.
4. Yorke J.A., Yorke E.D. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model // *Journal of Statistical Physics*. 1979. Vol. 21. № 3. P. 263-277.
5. Калашин Д.А. Поиск и стабилизация неустойчивых седловых циклов в системе Лоренца // *Дифференциальные уравнения*. 2001. Т. 37. Вып. 11. С. 1559-1561.
6. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.
7. Teixeira J., Reynolds C.A., Judd K. Time step sensitivity of nonlinear atmospheric models: numerical convergence, truncation error growth, and ensemble design // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 2007. Vol. 64. № 1. P. 175-189.
8. Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. N. Y.: Perseus Books Publ., 1994. 498 p.
9. Sarra S.A., Meador C. On the numerical solution of chaotic dynamical systems using extend precision floating point arithmetic and very high order numerical methods // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 2011. Vol. 16. № 3. P. 340-352.
10. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
11. Motsa S.S., Dlamini P., Khumalo M. A new multistage spectral relaxation method for solving chaotic initial value systems // *Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol. 72. № 1. P. 265-283.
12. Hashim I., Noorani M.S.M., Ahmad R., Bakar S.A., Ismail E.S., Zakaria A.M. Accuracy of the Adomian decomposition method applied to the Lorenz system // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. Vol. 28. № 5. P. 1149-1158.
13. Abdulaziz O., Noor N.F.M., Hashim I., Noorani M.S.M. Further accuracy tests on Adomian decomposition method for chaotic systems // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2008. Vol. 36. № 5. P. 1405-1411.
14. Vadasz P., Olek S. Convergence and accuracy of Adomian's decomposition method for the solution of Lorenz equations // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2000. Vol. 43. № 10. P. 1715-1734.

15. *Пчелинцев А.Н.* Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. Вып. 2. С. 191-201.
16. *Lozi R., Pchelintsev A.N.* A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2015. Vol. 25. № 13. DOI: 10.1142/S0218127415501874.
17. *Jafari S., Sprott J.C., Nazarimehr F.* Recent new examples of hidden attractors // The European Physical Journal Special Topics. 2015. Vol. 224. № 8. P. 1469-1476.
18. *Жуковский Е.С.* О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении // Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. Вып. 4. С. 31-34.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Пчелинцев Александр Николаевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры коммерции и бизнес-информатики, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565

ON THE NUMERICAL METHOD OF CONSTRUCTION OF UNSTABLE SOLUTIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH QUADRATIC NONLINEARITIES

A. N. Pchelintsev

Tambov State Technical University
106 Sovetskaya st., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Abstract. In this paper, the author considers the modification of the method of power series for the numerical construction of unstable solutions of systems of ordinary differential equations of chaotic type with quadratic nonlinearities in general form. A region of convergence of series is found and an algorithm for constructing approximate solutions is proposed.

Keywords: chaos; Lorentz system; attractor; power series

REFERENCES

1. Landa P.S. *Nelineynye kolebaniya i volny* [Nonlinear Oscillations and Waves]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2010, 552 p. (In Russian).
2. Llanos-Pérez J.A., Betancourt-Mar J.A., Cochob G., Mansilla R., Nieto-Villar J.M. Phase transitions in tumor growth: III vascular and metastasis behavior. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, vol. 462, pp. 560-568.
3. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130-141.
4. Yorke J.A., Yorke E.D. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model. *Journal of Statistical Physics*, 1979, vol. 21, no. 3, pp. 263-277.
5. Kaloshin D.A. Poisk i stabilizatsiya neustoychivyykh sedlovyykh tsiklov v sisteme Lorentsa [Search for and stabilization of unstable saddle cycles in the Lorenz system]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1559-1561. (In Russian).
6. Babuska I., Prager M., Vitasek E. *Numerical Processes in Differential Equations*. New York, Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1966, 351 pp.
7. Teixeira J., Reynolds C.A., Judd K. Time step sensitivity of nonlinear atmospheric models: numerical convergence, truncation error growth, and ensemble design. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 2007, vol. 64, no. 1, pp. 175-189.
8. Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. New York, Perseus Books Publ., 1994, 498 p.
9. Sarra S.A., Meador C. On the numerical solution of chaotic dynamical systems using extend precision floating point arithmetic and very high order numerical methods. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2011, vol. 16, no. 3, pp. 340-352.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 16-07-00801).

10. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Heidelberg, Springer, 1993, 528 p.
11. Motsa S.S., Dlamini P., Khumalo M. A new multistage spectral relaxation method for solving chaotic initial value systems. *Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 72, no. 1, pp. 265-283.
12. Hashim I., Noorani M.S.M., Ahmad R., Bakar S.A., Ismail E.S., Zakaria A.M. Accuracy of the Adomian decomposition method applied to the Lorenz system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, vol. 28, no. 5, pp. 1149-1158.
13. Abdulaziz O., Noor N.F.M., Hashim I., Noorani M.S.M. Further accuracy tests on Adomian decomposition method for chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 36, no. 5, pp. 1405-1411.
14. Vadasz P., Olek S. Convergence and accuracy of Adomian's decomposition method for the solution of Lorenz equations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2000, vol. 43, no. 10, pp. 1715-1734.
15. Pchelintsev A.N. Chislennoe i fizicheskoe modelirovanie dinamiki sistemy Lorentsa [Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system]. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki – Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 191-201. (In Russian).
16. Lozi R., Pchelintsev A.N. A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, no. 13. DOI: 10.1142/S0218127415501874.
17. Jafari S., Sprott J.C., Nazarimehr F. Recent new examples of hidden attractors. *The European Physical Journal Special Topics*, 2015, vol. 224, no. 8, pp. 1469-1476.
18. Zhukovskiy E.S. O parametricheskom zadanii resheniya differentsial'nogo uravneniya i ego priblizhenno postroenii [On a parametric specification of the solution of a differential equation and its approximate construction]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1996, no. 4, pp. 31-34. (In Russian).

Received 18 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

Pchelintsev Alexander Nikolaevich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Commerce and Business Informatics, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

For citation: Pchelintsev A.N. O chislennoy metode postroyeniya neustoychivyykh resheniy dinamicheskikh sistem s kvadratskimi nelineynostyami [On the numerical method of construction of unstable solutions of dynamical systems with quadratic nonlinearities]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 555–565. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565 (In Russian, Abstr. in Engl.).