ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523

УДК 517.988.8

О СХОДИМОСТИ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© А. А. Петрова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с нелокальным весовым интегральным условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявного метода Эйлера. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости.

Ключевые слова: гильбертово пространство; параболическое уравнение; нелокальное весовое интегральное условие; проекционно-разностный метод; неявный метод Эйлера

Введение

Рассматривается абстрактное параболическое уравнение с весовым интегральным условием на решение на интервале времени от 0 до T. Ранее эта задача в условиях слабой разрешимости решалась приближенно полудискретным методом Галеркина, сводящим параболическую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. В настоящей работе данная задача, также в условиях слабой разрешимости, решается приближенно проекционно-разностным методом, который является методом полной дискретизации. При этом для временной аппроксимации используется неявная схема Эйлера. В этом случае процесс нахождения приближенных решений задачи сводится к нахождению решений конечных линейных систем алгебраических уравнений.

1. Описание точной и приближенной задач

Пусть задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u,\, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u,\, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\ \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $M \geqslant 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что для $u,\, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au, v)$. Отсюда следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [2].

В пространстве V' на $[0,T]$ рассматривается параболическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$, элемент $\overline{u}$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В [3] доказана теорема о существовании слабого решения задачи (2).

Теорема 1. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1). Пусть также функция $f(t) \in L_1(0,T;H)\bigcap L_2(0,T;V')$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0,T]$. Предположим, что $\overline{u} \in D(A) = \{v \in V \,|\, Av \in H\}$. Тогда задача (2) имеет единственное решение $u(t)$, такое что $u \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$.*

Пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Отметим, что на V_h можно рассматривать нормы пространств V, H, V'. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$, таким что $\|v_h\|_V = 1$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на $V_h \subset H$. P_h допускает продолжение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$.

По теореме Лакса–Мильграмма [4], для любого элемента $u \in V$ существует единственный элемент $u_h \in V_h$ такой, что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Таким образом, определен оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой, что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$ выполнено $a(R_h u, v_h) = a(u, v_h)$.

В пространстве V_h рассмотрим приближенную задачу:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A u_k^h = f_k^h \ \ (k = \overline{1,\, N}), \qquad \sum_{k=1}^N p_k u_k^h \tau = \overline{u}_h. \tag{3}$$

В (3) N – натуральное число, $\tau = T/N$; $p_k = p(t_k)$, где t_k – точки разбиения отрезка $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, такого что $t_k - t_{k-1} = \tau$; $f_k^h = \tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\, dt \quad (k = \overline{1,N})$; $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 задача (3) имеет единственное решение.*

2. Оценка погрешности и сходимость приближенных решений

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а u_k^h $(k = \overline{0,N})$ - решение задачи (3). Обозначим через $z_k^k = u_k^h - \overline{P}_h u(t_k)$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_V^2 \tau + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2 \tau \Big) \leqslant$$

$$C \Bigg\{ \sum_{k=1}^N \|\psi_k^h\|_{V_h'}^2 \tau + \sum_{k=1}^N \Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\, ds \Bigg)^2 \cdot \sum_{k=1}^N \Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h A u(t)\|_H\, dt \Bigg)^2 \Bigg\}, \tag{4}$$

где $\psi_k^h = \tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A[u(t) - \overline{P}_h u(t_k)]\, dt \quad (k = \overline{1,N})$.

Для получения сходимости приближенных решений к точному решению предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\|(I - Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Здесь Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ также предельно плотна в пространствах H и V'.

Предположим теперь, что подпространства $V_h \subset V$ такие, что выполняются аппроксимационные свойства, типичные для метода конечных элементов [4], [5],

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h \|v\|_V, \tag{5}$$

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1} \|v_h\|_H, \tag{6}$$

где константы r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V$ и h. Условие (6) в приложениях означает равномерное разбиение области пространственных переменных на конечные элементы. В простейшем одномерном случае такими подпространствами являются, например, подпространства кусочно-линейных на равномерной сетке функций [5]. Из (5) и (6) следует (см. [6]) равномерная по h оценка

$$\|P_h\|_{V \to V} \leqslant 1 + r_1 r_2.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть* $\{V_h\}$ *– предельно плотная в* V *последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (5), (6). Пусть* $\tau h^{-2} \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда при* $h \to 0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2\, dt +$$

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{7}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Пусть решение* $u(t)$ *задачи (2) обладает дополнительной гладкостью* $u' \in L_2(0,T;V)$, *а* $Au \in L_2(0,T;H)$. *Пусть также* $p' \in L_2(0,T)$. *Тогда при* $h \to 0$ *и* $\tau \to 0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{8}$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ [7]. Пусть, вместо условия (5), пространства $V_h \subset V$, удовлетворяют условию

$$\|(I - Q_h)v\|_V \le rh\|v\|_E \quad (v \in E), \tag{9}$$

которое, как и (5), типично для подпространств типа конечных элементов (см. [4]).

Следствие 3. *Пусть выполнены условия следствия 2. Пусть также* $u \in L_2(0,T;E)$ *и выполнено условие (9). Тогда справедливы оценки*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \leqslant$$

$$C\left\{ h^2\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\, dt \Big) + \tau^2 \Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\, dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\, dt \Big) \right\};$$

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \leqslant$$

$$C\left\{ h^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\, dt + \tau^2 \Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\, dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\, dt \Big) \right\};$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau\leqslant$$

$$C\left\{h^2\Big(\int\limits_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\Big)+\tau^2\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петрова А.А., Смагин В.В.* Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 8. С. 49-59.

2. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.

3. *Петрова А.А., Смагин В.В.* Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 160-169.

4. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.

5. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979. 236 с.

6. *Смагин В.В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 11. С. 79-94.

7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Петрова Анастасия Александровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: rezolwenta@mail.ru

Для цитирования: *Петрова А.А.* О сходимости и скорости сходимости проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с весовым интегральным условием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 517–523. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523

ON THE CONVERGENCE AND RATE OF THE CONVERGENCE OF A PROJECTION-DIFFERENCE METHOD FOR APPROXIMATE SOLVING A PARABOLIC EQUATION WITH WEIGHT INTEGRAL CONDITION

A. A. Petrova

Voronezh State University
1 Universitetskaya Pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Abstract. In the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with nonlocal weight integral condition for the solution is resolved approximately by projection-difference method using time-implicit Euler's method. Approximation of the problem by spatial variables is oriented on the finite element method. Errors estimations of approximate solutions, convergence of approximate solution to exact one and orders of rate of convergence are established.
Keywords: Hilbert space; parabolic equation; nonlocal weighted integral condition; projection-diffrence method; time-implicit Euler's method

REFERENCES

1. Petrova A.A., Smagin V.V. Skhodimost' metoda Galyorkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s vesovym integral'nym usloviem na reshenie [Convergence of the Galyorkin method of approximate solving parabolic equation with weight integral condition]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2016, no. 8, pp. 49-59. (In Russian).

2. Aubin J.-P. *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximate Solution of Elliptic Boundary Problems]. Moscow, Mir Publ., 1977, 384 p. (In Russian).

3. Petrova A.A., Smagin V.V. Razreshimost' variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral'nym usloviem [Solvability of the variational problem of parabolic type with a weighted integral condition]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 160-169. (In Russian).

4. Ciarlet P.G. *Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach* [Finite Element Method for Elliptic Problems]. Moscow, Mir Publ., 1980, 512 p. (In Russian).

5. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [Variational-Difference Methods for Solving Elliptic Equations]. Yerevan, 1979, 236 p. (In Russian).

6. Smagin V.V. Koertsitivnye otsenki pogreshnostey proektsionnogo i proektsionno-raznostnogo metodov dlya parabolicheskikh uravneniy [The coercive estimations of errors of projection and projection-difference methods for parabolic equations]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1994, vol. 185, no. 11, pp. 79-94. (In Russian).

7. Lions J.-L., Magencs E. *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Inhomogeneous Boundary Value Problems and Their Applications]. Moscow, Mir Publ., 1971, 372 p. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Petrova Anastasiya Alexandrovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis and Operator Equations Department, e-mail: rezolwenta@mail.ru

For citation: Petrova A.A. O skhodimosti i skorosti skhodimosti proekcionno-raznostnogo metoda resheniya parabolicheskogo uravneniya s vesovym integral'nym usloviem [On the convergence and rate of the convergence of a projection-difference method for approximate solving a parabolic equation with weight integral condition]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 517–523. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523 (In Russian, Abstr. in Engl.).