ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465
УДК 517.929

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **В. В. Малыгина**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: mavera@list.ru

Аннотация. Рассматривается модель динамики изолированной популяции, особи которой проходят три стадии развития. Для описания модели используется нелинейное автономное дифференциальное уравнение с сосредоточенным и распределенным запаздыванием. Получены эффективные достаточные признаки асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия.

Ключевые слова: динамика популяций; функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием; устойчивость

1. Постановка задачи

Настоящая работа посвящена изучению модели динамики популяций, проходящей в своем развитии три возрастных стадии. Первые варианты такой модели, использующие аппарат уравнений с последействием, были предложены в работе [1]; там же были приведены примеры решений, построенных численными методами. В работе [2] было начато исследование устойчивости решений таких уравнений, в работах [3] и [4] это исследование было продолжено и дополнено новыми результатами. В заключительной части работы [3] ставился ряд новых задач и, в частности, в качестве возможного обобщения предлагалась следующая модель:

$$\dot{y}(t) = \beta y(t-\tau) - \lambda(y(t))y(t) - Ky(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где

$$Ky(t) = \begin{cases} \beta \int_0^h e^{-\int_{t-s}^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} y(t-\tau-s)dR(s), & \text{если } t \geqslant h, \\ \beta \int_0^t e^{-\int_{t-s}^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} y(t-\tau-s)dR(s) + \\ \qquad + \beta e^{-\int_0^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} \left(\int_0^{h-t} \varphi(s)dR(t+s)\right), & \text{если } t \leqslant h. \end{cases}$$

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5336.2017/8.9) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Здесь $y(t)$ — количество зрелых особей в момент времени t; интенсивность гибели таких особей (процесс «самолимитирования») описывается непрерывной, неотрицательной, монотонно возрастающей функцией $\lambda(u)$, причем $\lambda(0) = 0$, $\lim_{u\to+\infty} \lambda(u) = +\infty$. Посредством коэффициента $\beta = \eta e^{-\mu\tau}$ учитывается скорость производства потомства на одну особь $\eta > 0$, интенсивность гибели незрелых особей от внешних факторов $\mu > 0$ и продолжительность времени созревания особей $\tau > 0$. Зрелые индивидуумы имеют максимальное время жизни $h > 0$, по достижении которого они либо погибают, либо переходят в третью — не репродуктивную — стадию жизни.

Оператор K задает скорость уменьшения численности особей за счет гибели или процессов старения. Неотрицательная функция φ описывает скорость производства первоначально существующих особей. Функция R предполагается неубывающей на отрезке $[0, h]$, причем $R(0) = 0$, $R(h) = 1$. Функцию $1 - R(t + s)$ можно рассматривать как долю особей, вступивших в момент времени t в стадию зрелости, и оставшихся в этой стадии к моменту $t + s$.

Интегралы в описании оператора K понимаются в смысле Римана–Стилтьеса.

Функция R, как функция ограниченной вариации, всегда может быть представлена в виде суммы кусочно-постоянной, абсолютно непрерывной и сингулярной функций. С учетом прикладного характера задачи можно отбросить сингулярную составляющую и ограничить класс функций R следующим:

$$R(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi(t - h_k) + \int_0^t r(s)ds, \tag{2}$$

где $a_k \geqslant 0$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m \leqslant h$, χ — функция Хевисайда, r — неотрицательная непрерывная на $[0, h]$ функция.

Отметим, что модель, рассмотренная в работах [3] и [4], соответствует ситуации, когда $R(t) = \chi(t-h)$, то есть случаю сосредоточенного запаздывания. В данной работе нас будет интересовать вариант комбинированного последействия, которое включает как «сосредоточенное» (в точках $h_1, h_2, \ldots, h_m$) запаздывание, так и «распределенное» (по отрезку $[0, h]$), которое учитывается функцией r.

При отрицательных значениях аргумента предполагаем функцию y доопределенной непрерывной начальной функцией: $y(\xi) = \psi(\xi)$ при $\xi \leqslant 0$.

Начальная численность особей равна $y(0) = \int_0^h (1 - R(s))\, \varphi(s)ds$.

Аналогично [1, 2] устанавливаем, что уравнение (1) при любой начальной функции в вышеперечисленных предположениях однозначно разрешимо на любом конечном интервале $[0, l] \subset [0, \infty)$. При этом, если начальная функция априори предполагается неотрицательной, то решение $y(t)$ также оказывается неотрицательным при любом $t \geqslant 0$. Для обоснования этого достаточно перейти (подробнее см. [1]) от уравнения (1) с заданным начальным условием к эквивалентной интегральной форме

$$y(t) = Gy(t), \quad t \geqslant 0,$$

где оператор G определяется соотношениями

$$Gy(t) = \begin{cases} \beta \int_0^h R(s) e^{-\int_{t-s}^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} y(t-\tau-s)ds, & \text{если } t \geqslant h, \\ \beta \int_0^t R(s) e^{-\int_{t-s}^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} y(t-\tau-s)ds + \\ \qquad + e^{-\int_0^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} \left(\beta \int_0^{h-t} R(s+t)\varphi(s)ds \right), & \text{если } t \leqslant h. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что оператор G является изотонным и эволюционным. Очевидно, что в соответствии с физическим смыслом задачи начальная функция неотрицательна, откуда следует неотрицательность $y(t)$ при любом $t \geqslant 0$.

2. Вспомогательная функция

Для удобства исследования и описания свойств решения уравнения (1) введем вспомогательную функцию

$$\rho(w) = \int_0^h e^{-ws} dR(s), \quad w \geqslant 0.$$

С учетом представления (2) функция ρ состоит из двух компонент:

$$\rho(w) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-h_k w} + \int_0^h e^{-ws} r(s) ds.$$

Достаточно полную информацию о свойствах функции ρ дает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функция ρ обладает следующими свойствами:*
a) ρ имеет производные всех порядков, причем $\rho^{(n)}(w) = (-1)^n \int_0^h s^n e^{-ws} dR(s)$;
b) ρ монотонно убывает на $[0, \infty)$;
c) $\rho(0) = 1$;
d) $\lim_{w\to+\infty} \rho(w) = 0$;
e) $\lim_{w\to+\infty} w\rho'(w) = 0$;
f) $\lim_{w\to+\infty} w\rho(w) = r(0)$.

Доказательство. Дифференцируемость и вид производных функции ρ вытекают непосредственно из определения ρ и теоремы Лейбница о дифференцируемости интеграла по параметру.

Так как $\rho'(w) = -\int_0^h s e^{-ws} dR(s) < 0$ при любом $w \geqslant 0$, то ρ монотонно убывает.

Свойство c) очевидно, так как $\rho(0) = \int_0^h dR(s) = R(h) - R(0) = 1$.

При доказательстве свойств d)–f) требуется установить их справедливость только для второй (интегральной) компоненты функции ρ, так как для первой они верны в силу $\lim_{w\to\infty} e^{-h_k w} = \lim_{w\to\infty} we^{-h_k w} = 0$.

Обозначим $r_{\max} = \max_{t\in[0,h]} r(t)$. Свойство d) следует из неравенств:

$$0 \leqslant \int_0^h e^{-ws} r(s) ds \leqslant r_{\max} \int_0^h e^{-ws} ds \leqslant \frac{r_{\max}}{w} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds,$$

а свойство e) из аналогичных оценок:

$$w \left| \int_0^h s e^{-ws} r(s) ds \right| \leqslant r_{\max} \int_0^h w s e^{-ws} ds \leqslant \frac{r_{\max}}{w} \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds.$$

Осталосьдоказать наиболее интересное свойство f). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$, такое, что при всех $s \in [0, \delta)$ справедливо $|r(s) - r(0)| < \varepsilon/3$. Оценим разность

$$\begin{aligned}
|w\rho(w) - r(0)| &= \left| \int_0^h we^{-ws} \left(r(s) - r(0)\right) ds - r(0)e^{-wh} \right| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^\delta we^{-ws} \left|r(s) - r(0)\right| ds + \int_\delta^\infty we^{-ws} \left|r(s) - r(0)\right| ds + r(0)e^{-wh} \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/3 \int_0^{+\infty} e^{-s} ds + 2r_{\max} \int_{\delta w}^{+\infty} e^{-s} ds + r(0)e^{-wh} \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/3 + 2r_{\max} e^{-\delta w} + r(0)e^{-wh}.
\end{aligned}$$

Теперь по заданному $\delta > 0$ найдем такое $w_0 > 0$, что при всех $w \geqslant w_0$ справедливы неравенства $\left|2r_{\max}e^{-\delta w}\right| < \varepsilon/3$ и $\left|r(0)e^{-wh}\right| < \varepsilon/3$.

Тем самым мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется w_0, начиная с которого верно неравенство $|w\rho(w) - r(0)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

3. Точки равновесия

Проведем классификацию равновесных состояний нашей задачи. Пусть y^* — точка равновесия уравнения (1). Подстановка в (1) дает:

$$y^* \left(\beta - \lambda(y^*) - \beta \int_0^h e^{-\lambda(y^*)s} dR(s) \right) = 0,$$

откуда следует либо $y^* = 0$, либо должно выполняться равенство

$$\beta \left(1 - \int_0^h e^{-\lambda(y^*)s} dR(s) \right) = \lambda(y^*).$$

Далее нас будет интересовать ненулевое положение равновесия, соответствующее, согласно постановке задачи, жизнеспособной (невырождающейся) популяции.

Обозначим $w = \lambda(y^*)$. При $y^* > 0$ в силу свойств функции λ имеем $w > 0$. С учетом обозначений предыдущего раздела получаем

$$\beta = \frac{w}{1 - \rho(w)}. \tag{3}$$

Так как функция λ имеет определенную на R_+ обратную функцию, то уравнение (1) имеет ненулевое положение равновесия тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет положительный корень. Выясним, при каких условиях на параметры уравнения (1) это возможно. Пусть $f(w) = \frac{w}{1-\rho(w)}$. Из свойств b) и c) функции ρ следует, что функция f определена и непрерывно дифференцируема при всех $w > 0$. Легко видеть, что

$$f'(w) = \frac{1 - \rho(w) + w\rho'(w)}{\left(1 - \rho(w)\right)^2} = \frac{\rho(0) - \rho(w) + w\rho'(w)}{\left(1 - \rho(w)\right)^2} = \frac{w(\rho'(w) - \rho'(\theta))}{\left(1 - \rho(w)\right)^2},$$

где $0 < \theta < w$. Из свойства a) функции ρ заключаем, что $f'(w) > 0$. Кроме того,

$$\lim_{w \to +0} f(w) = -\lim_{w \to +0} 1/\rho'(w) = -1/\rho'(0),$$

а с учетом свойства d) функции ρ

$$\lim_{w \to +\infty} f(w) = \lim_{w \to +\infty} \frac{w}{1-\rho(w)} = +\infty.$$

Таким образом, f — непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая на $(0, +\infty)$ функция с областью значений $(-1/\rho'(0), +\infty)$. Из равенства (3) получаем:

- если $\beta \leqslant -1/\rho'(0)$, то уравнение (1) имеет только нулевую точку равновесия;
- если $\beta > -1/\rho'(0)$, то уравнение (1) имеет, кроме нулевой, положительную точку равновесия $y^* = \lambda^{-1}(w)$, которая однозначно определяется единственным положительным корнем уравнения (3): $w = f^{-1}(\beta)$.

Дальше мы будем интересоваться только вторым случаем.

4. Признак устойчивости

Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости точки равновесия $y^* > 0$, опираясь на уравнение линейного приближения.

Будем считать, что в окрестности точки y^* функция λ непрерывно дифференцируема; обозначим $v = \lambda'(y^*)y^*$. Сделаем в уравнении (1) замену переменных $y = y^* + x$, отбросим нелинейные слагаемые, учитывая, что при малых x

$$\lambda(y^* + x) \approx \lambda(y^*) + \lambda'(y^*)x, \; 1 - \exp\left(\lambda'(y^*) \int_{t-s}^{t} x(s)ds\right) \approx \lambda'(y^*) \int_{t-s}^{t} x(s)ds.$$

В итоге придем к линейному приближению уравнения (1):

$$\dot{x}(t) + (v + w)x(t) = (Tx)(t), \quad t \in \mathrm{R}_+, \tag{4}$$

где

$$(Tx)(t) = \; \beta x(t-\tau) - \beta \int_0^h e^{-ws} x(t-\tau-s)\, dR(s) + \beta v \int_0^h e^{-ws} \left(\int_{t-s}^{t} x(\zeta) d\zeta \right) dR(s). \tag{5}$$

Задача об устойчивости ненулевой точки равновесия уравнения (1) свелась, таким образом, к задаче устойчивости нулевого решения уравнения (4). В силу линейности (4) устойчивость нулевого решения для него эквивалентна устойчивости любого решения, поэтому далее будем говорить просто об устойчивости уравнения (4).

Для удобства изложения приведем здесь формулировку известного признака устойчивости, на основе которого будет исследовано уравнение (4).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in \mathrm{R}_+, \tag{6}$$

где $a > 0$, а T — линейный регулярный вольтерров оператор с ограниченным последействием, f — локально-суммируемая функция.

Через C и L_∞ обозначим пространства непрерывных и ограниченных в существенном на полуоси функций с естественными нормами.

Теорема 4.1. [5] Пусть $T : C \to L_\infty$ и $\|T\|_{C\to L_\infty} < a$. Тогда уравнение (6) экспоненциально устойчиво.

Применим теорему 4.1 к уравнению (4). В данном случае $a = v + w$, а оператор T определен равенством (5). Не нарушая общности [6] можно считать, что в равенстве (6) при отрицательных значениях аргумента функция x доопределяется нулем. Очевидно, что оператор T удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Оценим его норму. Так как

$$\operatorname{vrai}\sup_{t\geqslant 0} |(Tx)(t)| \leqslant \beta\left(1 + \int_0^h e^{-ws}\, dR(s) + v\int_0^h se^{-ws}\, dR(s)\right)\sup_{t\geqslant 0}|x(t)|,$$

то $\|Tx\|_{L_\infty} \leqslant \beta\,(1 + \rho(w) - v\rho'(w))\,\|x\|_C$, следовательно,

$$\|T\|_{C\to L_\infty} \leqslant \beta\,(1 + \rho(w) - v\rho'(w))\,. \tag{7}$$

Теорема 4.2. *Если для всех $w > 0$ выполнено неравенство*

$$v > \frac{2w\rho(w)}{1 - \rho(w) + w\rho'(w)}, \tag{8}$$

то ненулевое положение равновесия уравнения (1) *локально экспоненциально устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим теорему 4.1 к уравнению (4). В данном случае $a = v+w$, а для нормы оператора T, определенного равенством (5), имеет место оценка (7). Значит, уравнение (4) экспоненциально устойчиво, если $\beta\,(1 + \rho(w) - v\rho'(w)) < v+w$. Учитывая (3), перепишем предыдущее неравенство в виде $v(1 - \rho(w) + w\rho'(w)) > 2w\rho(w)$, что эквивалентно (8), так как $1 - \rho(w) + w\rho'(w) > 0$ (см. доказательство монотонности функции f). Следовательно, выполнение неравенства (8) гарантирует экспоненциальную устойчивость уравнения (4), откуда, в силу теоремы 1 из [7], следует утверждение теоремы.

5. Область устойчивости

Обозначим

$$g(w) = \frac{2w\rho(w)}{1 - \rho(w) + w\rho'(w)}$$

и отметим некоторые свойства функции g.

Из свойства а) функции ρ следует, что g — непрерывно дифференцируемая на $[0,\infty)$ функция. Далее, так как

$$\lim_{w\to+0} g(w) = \lim_{w\to+0}\frac{2w\rho(w)}{1 - \rho(w) + w\rho'(w)} = \lim_{w\to+0}\frac{2}{w}\cdot\frac{\rho(w) + w\rho'(w)}{\rho''(w)} = \frac{\rho(0)}{\rho''(0)}\lim_{w\to+0}\frac{2}{w} = +\infty,$$

то график функции g имеет вертикальную асимптоту $w = 0$. Наконец, из свойств d), e) и f) функции ρ получаем

$$\lim_{w\to+\infty} g(w) = \lim_{w\to+\infty} \frac{2w\rho(w)}{1-\rho(w)+w\rho'(w)} = 2r(0),$$

то есть у графика функции g есть горизонтальная асимптота.

В частности, если $R(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k\chi(t-h_k)$, то всегда $\lim_{w\to+\infty} g(w) = 0$.

Ниже приведены графики функций g при различном выборе параметров уравнения (1).

Рис. 1: $h = 1$, $R(t) = \chi(t-1)$.

Рис. 2: $h = 1$, $R(t) = \frac{1}{2}\chi(t-1) + \frac{t}{2}$.

Рис. 3: $h = 1$, $R(t) = 3t - 6t^2 + 4t^3$.

Рис. 4: $h = 1$, $R(t) = 5t - 20t^2 + 40t^3 - 40t^4 + 16t^5$.

Область устойчивости, определяемая теоремой 4.2, задается неравенством $v > g(w)$ и на рисунках обозначена цветом. Тонкой линией отмечены горизонтальные асимптоты графиков функций g.

Приведенные примеры показывают, что такие свойства функции g, как монотонность и выпуклость, существенно зависят от вида функции r.

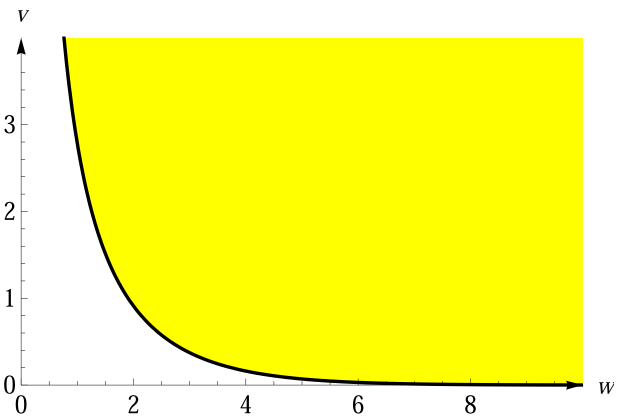

Рис. 1.

Рис. 2.

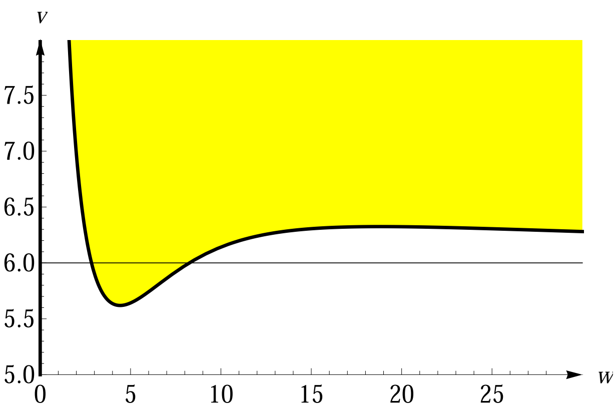

Рис. 3.

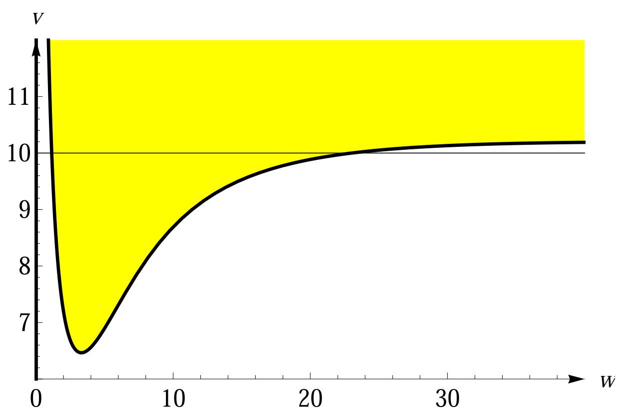

Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасов И.А., Перцев Н.В.* Анализ решений интегро-дифференциального уравнения, возникающего в динамике популяций // Вестник Омского университета. 2003. № 2. С. 13-15.

2. *Перцев Н.В.* Об устойчивости нулевого решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей в моделях динамики популяций // Известия высших учебных заведений. Математика. 1999. № 8. С. 47-53.

3. *Малыгина В.В., Мулюков М.В., Перцев Н.В.* О локальной устойчивости одной модели динамики популяций с последействием // Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 951-957.

4. *Малыгина В.В., Мулюков М.В* О локальной устойчивости одной модели динамики популяции с тремя стадиями развития // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 4. С. 35-42.

5. *Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В.* Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 4. С. 25-63.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

7. *Азбелев Н.В., Малыгина В.В.* Об устойчивости тривиального решения нелинейных уравнений с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1994. № 6. С. 20-27.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Малыгина Вера Владимировна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: mavera@list.ru

Для цитирования: *Малыгина В.В.* Об устойчивости одной модели динамики популяций с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 456–465. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465

ON THE STABILITY OF A POPULATION DYNAMICS MODEL WITH DELAY

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolskiy Av., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: mavera@list.ru

Abstract. We consider a model of the dynamics of an isolated population whose individuals pass through the three stages of evolution. We use a nonlinear autonomous differential equation with concentrated and distributed delay for description of the model. Effective sufficient conditions for the asymptotic stability of the nontrivial equilibrium point are obtained.
Keywords: population dynamics; delay differential equation; stability

REFERENCES

1. Tarasov I.A., Pertsev N.V. Analiz resheniy integro-differentsial'nogo uravneniya, voznikayushchego v dinamike populyatsiy [The analysis of solutions to an integro-differential equation emerging in population dynamics]. *Vestnik Omskogo universiteta – Herald of Omsk University*, 2003, no. 2, pp. 13-15. (In Russian).

2. Pertsev N.V. Ob ustoychivosti nulevogo resheniya odnoy sistemy integro-differentsial'nykh uravneniy, voznikayushchey v modelyakh dinamiki populyatsiy [On the stability of the zero solution of a system of integro-differential equations emerging in population dynamics]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1999, no. 8, pp. 47-53. (In Russian).

3. Malygina V.V., Mulyukov M.V., Pertsev N.V. O lokal'noy ustoychivosti odnoy modeli dinamiki populyatsiy s posledeystviem [On the local stability of a population dynamics model with aftereffect]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 951-957. (In Russian).

4. Malygina V.V., Mulyukov M.V. O lokal'noy ustoychivosti odnoy modeli dinamiki populyatsii s tremya stadiyami razvitiya [On local stability of a population dynamics model with three development stages]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 35-42. (In Russian).

5. Sabatulina T.L., Malygina V.V. Ob ustoychivosti lineynogo differentsial'nogo uravneniya s ogranichennym posledeystviem [On stability of a differential equation with aftereffect]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 25-41. (In Russian).

The work is performed within the basic part of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 1.5336.2017/8.9), and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Funcional Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

7. Azbelev N.V., Malygina V.V. Ob ustoychivosti trivial'nogo resheniya nelineynykh uravneniy s posledeystviem [On the stability of a trivial solution to nonlinear equations with aftereffect]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1994, no. 6, pp. 20-27. (In Russian).

Received 19 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Malygina Vera Vladimirovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leader Researcher of the Research Center on Functional Differential Equations, e-mail: mavera@list.ru

For citation: Malygina V.V. Ob ustoychivosti odnoy modeli dinamiki populyatsiy s zapazdyvaniem [On the stability of a population dynamics model with delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 456–465. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465 (In Russian, Abstr. in Engl.).