

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430

УДК 517.983.23

НОРМА И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

© О. И. Клещина

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: office@main.vsu.ru

Аннотация. Получены оценки нормы и логарифмической нормы бесконечных матриц в пространствах l_σ .

Ключевые слова: бесконечные матрицы; норма матрицы; логарифмическая норма; неравенство Юнга; неравенство Гёльдера

Приведём необходимые сведения из [1]. Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и $End\ \mathbb{B}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $\mathbb{B}$. Оператор A из $End\ \mathbb{B}$ называется *обратимым*, если существует такой оператор B из $End\ \mathbb{B}$, что $AB = I$ и $BA = I$, где I – единичный оператор. Оператор B определяется единственным образом и называется *обратным* к оператору A (обозначим A^{-1}). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $A \in End\ \mathbb{B}$. Если оператор $\lambda I - A$ обратим, то λ называется *регулярным значением* оператора A ; совокупность G всех регулярных значений оператора A образует открытое множество в $\mathbb{C}$, называемое *резольвентным множеством* оператора A , а операторная функция $\lambda \in G \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in End\ \mathbb{B}$ называется *резольвентой* оператора A . Множество $F = \mathbb{C} \setminus G$ называется *спектром* и обозначается $sp\ A$. Спектр оператора A есть непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{C}$.

Спектральный радиус и спектральная абсцисса оператора A определяются формулами (сравни с [2])

$$spr\ A = \max_{\lambda \in sp\ A} |\lambda_j|, \quad spa\ A = \max_{\lambda \in sp\ A} Re\lambda_j.$$

Отметим, что

$$spr\ A \leq \|A\|, \quad spa\ A \leq \|A\|_{log},$$

где норма оператора A и его логарифмическая норма определяются равенствами

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \quad \|A\|_{log} = \sup_{\|x\| \leq 1} [x, Ax], \quad (1)$$

где квадратные скобки расшифровываются следующим образом: $[x, h] : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$[x, h] = \lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t}.$$

Дадим прямое определение логарифмической нормы [3]

$$\|A\|_{\log} = \lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{\|I + tA\| - \|I\|}{t}.$$

Логарифмическая норма может быть определена также как наименьшее значение для константы a , для которой справедлива оценка

$$\|e^{tA}\| \leq e^{ta} \quad \text{при } t \geq 0,$$

где

$$e^{tA} = I + tA + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$. Обозначим через l_σ комплексное банахово пространство (двусторонних) последовательностей комплексных чисел $x = x_j$, $-\infty < j < +\infty$, в которой норма определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \sup |x_j| \quad \text{при } \sigma = 0, \\ \|x\|_\sigma &= \left(\sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^\sigma \quad \text{при } 0 < \sigma \leq 1. \end{aligned}$$

Отметим, что $l_1 \subset l_\sigma \subset l_0$ при $0 < \sigma < 1$ (обычно l_0 обозначают m – пространство ограниченных последовательностей, l_σ обозначают l_p , где $p = 1/\sigma$, а $l_{1/2}$ через l_2 – гильбертово пространство) [4, с. 28–33].

В дальнейшем нам потребуются неравенство Юнга

$$a^{1-\sigma} b^\sigma \leq (1-\sigma)a + \sigma b, \quad (2)$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $0 \leq \sigma \leq 1$, и неравенство Гёльдера

$$|(x, y)| = \left| \sum_j x_j \bar{y}_j \right| \leq \|x\|_{1-\sigma} \|y\|_\sigma, \quad (3)$$

где $x \in l_{1-\sigma}$, $y \in l_\sigma$ и $0 \leq \sigma \leq 1$.

Пусть $A \in \text{End } l_\sigma$. Тогда A можно сопоставить некоторую матрицу (a_{jk}) : если $y = Ax$, то

$$y_j = \sum_k a_{jk} x_k, \quad -\infty < j < +\infty.$$

Бесконечным матрицам посвящена монография Р. Кука [5]. Соответствующую норму матрицы определим как операторную

$$\|A\|_\sigma = \sup_{\|x\|_\sigma \leq 1} \|Ax\|_\sigma.$$

Норма матрицы в явном виде может быть найдена в исключительных случаях. Отметим известные формулы [6, с. 93–94, задача 19]

$$\|A\|_0 = \sup_j \sum_k |a_{jk}|, \quad \|A\|_1 = \sup_k \sum_j |a_{jk}|, \quad \|A\|_{1/2} = \sqrt{\text{spa } \sqrt{A^*A}},$$

где A^* – комплексно сопряженная матрица. Нас интересуют выражения для нормы матрицы при других значениях параметра σ .

Мы закончим этот раздел двумя оценками нормы матрицы сверху. Пусть $A = (a_{jk})$ и $y = Ax$, где $x \in l_\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Так как $y_j = \sum_k a_{jk}x_k$, то по неравенству Гёльдера (3) получаем

$$|y_j| \leq \left(\sum_k |a_{jk}|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{1-\sigma} \|x\|_\sigma,$$

отсюда вытекает, что

$$\|y\|_\sigma \leq \left(\sum_j \left(\sum_k |a_{jk}|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right)^\sigma \|x\|_\sigma,$$

поэтому

$$\|A\|_\sigma \leq \left(\sum_j \left(\sum_k |a_{jk}|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right)^\sigma. \quad (4)$$

Рассуждая несколько иначе, напомним

$$y = \sum_k x_k A e_k,$$

где $e_k \in l_\sigma$ – стандартные единичные орты. Так как

$$\|y\|_\sigma \leq \sum_k |x_k| \|A e_k\|_\sigma,$$

то по неравенству Гёльдера (3) находим

$$\|y\|_\sigma \leq \left(\sum_k |x_k|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^\sigma \left(\sum_k \|A e_k\|_\sigma^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{1-\sigma},$$

отсюда следует, что

$$\|A\|_\sigma \leq \left(\sum_k \left(\sum_j |a_{jk}|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \right)^{1-\sigma}. \quad (5)$$

Отметим, что при $\sigma = 1/2$ обе оценки (4) и (5) приводят к одному и тому же результату

$$\|A\|_{1/2} \leq \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Оценка (4) приведена в [7, с. 390]. Оценка (5) является новой. Здесь мы напрямую сталкиваемся с особенностями бесконечных матриц. При выводе формул (4) и (5) мы молчаливо предполагали, что внешнее суммирование всегда приводит к конечному результату. Однако это не так: уже подстановка единичной матрицы $I = (\sigma_{jk})$ в формулы (4) и (5) приводят к бесконечному результату. Поэтому формулы (4) и (5) приводят к правильному результату в случае конечности правых величин.

Отметим, что конечные суммы в (6) приводят к оператору Гильберта–Шмидта, и этот оператор, как и операторы, удовлетворяющие оценкам (4) и (5), является компактным. Так, например, для матрицы Гильберта $H = (h_{jk})$, где $h_{jk} = 1/(1+j+k)$ для $0 \leq j, k \leq +\infty$. Известно, что $\|H\|_{1/2} = \pi$, в то время как формула (6) дает бесконечный результат [8, с. 31].

Мы переходим к изучению логарифмической нормы. Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$ и $A = (a_{jk}) \in \text{End } l_\sigma$. Выпишем известные формулы [9, с. 462–465] – в конечномерном случае в [6, с. 93–94, задача 19] – для счетномерных пространств

$$\begin{aligned} \|A\|_{0_{log}} &= \sup_j \left\{ \text{Re } a_{jj} + \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right\}, \\ \|A\|_{1_{log}} &= \sup_k \left\{ \text{Re } a_{kk} + \sum_{j \neq k} |a_{jk}| \right\}, \\ \|A\|_{1/2_{log}} &= \text{spa } \frac{A^* + A}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Получим оценки $\|A\|_{\sigma_{log}}$ в остальных случаях $0 < \sigma < 1$.

Непосредственным вычислением получаем, что

$$[x, h]_\sigma = \|x\|_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} \frac{\text{Re } (x_j \bar{h}_j)}{|x_j|}, \quad (8)$$

где в случае $x_j = 0$ выражение $\frac{\text{Re } (x_j \bar{h}_j)}{|x_j|}$ заменится на $|h_j|$. Так как $|\text{Re } (x_j \bar{h}_j)|/|x_j| \leq |h_j|$, то по неравенству Гёльдера (3) написанный ряд абсолютно сходится. При вычислении производной справа в (8) на конечном этапе мы воспользовались тем, что

$$\lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{|x_j + th_j| - |x_j|}{t} = \begin{cases} \text{Re } (x_j \bar{h}_j) & \text{при } x_j \neq 0, \\ |h_j| & \text{при } x_j = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\|A\|_{\sigma_{log}} \leq \sup_j \left\{ \text{Re } a_{jj} + (1-\sigma) \sum_{k \neq j} |a_{jk}| + \sigma \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \right\}. \quad (9)$$

В случае $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ оценка (9) переходит в равенство в полном соответствии с формулами (7). Поэтому будем считать, что $0 < \sigma < 1$. Согласно (1) необходимо оценить величину $[x, Ax]_\sigma$. По формуле (8) имеем

$$[x, Ax]_\sigma = \|x\|_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} \text{Re } \frac{(x_j \overline{\sum_k a_{jk} x_k})}{|x_j|}. \quad (10)$$

При фиксированном j получаем

$$\begin{aligned} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} \operatorname{Re} \frac{(x_j \sum_k \overline{a_{jk} x_k})}{|x_j|} &\leq |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{Re} a_{jj} + \sum_{k \neq j} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} |\overline{a_{jk}}| |x_k| = \\ &= \operatorname{Re} a_{jj} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sum_{k \neq j} |x_j|^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} |a_{jk}|^{1-\sigma} |a_{jk}|^{\sigma} |x_k|^{\frac{\sigma}{\sigma}} \leq \\ &\leq \operatorname{Re} a_{jj} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sum_{k \neq j} \left\{ (1-\sigma) |a_{jk}| |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sigma |a_{jk}| |x_k|^{\frac{1}{\sigma}} \right\} \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством Юнга (2)). Поэтому согласно (10)

$$\begin{aligned} \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} \operatorname{Re} \frac{(x_j \sum_k \overline{a_{jk} x_k})}{|x_j|} &\leq \operatorname{Re} a_{jj} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + (1-\sigma) \sum_j \sum_{k \neq j} |a_{jk}| |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sigma \sum_j \sum_{k \neq j} |a_{jk}| |x_k|^{\frac{1}{\sigma}} = \\ &= \sum_j \left\{ \operatorname{Re} a_{jj} + (1-\sigma) \sum_{k \neq j} |a_{jk}| + \sigma \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \right\} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \leq a \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Здесь через a обозначена правая часть в неравенстве (9). Итак,

$$[x, Ax]_{\sigma} \leq \|x\|_{\sigma}^{1-\frac{1}{\sigma}} a \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} = a \|x\|_{\sigma},$$

и оценка (9) установлена.

Автор благодарен А.И. Перову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
2. Перов А.И., Коструб И.Д. О спектральной абсциссе и логарифмической норме // Математические заметки. 2017. Т. 101. № 4. С. 562-575.
3. Лозинский С.М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1958. № 5. С. 52-90.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.
5. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Мир, 1975. 449 с.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Москва; Ленинград: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1959. 399 с.
8. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 252 с.
9. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила в редакцию 24 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 28 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Клещина Ольга Игоревна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра системного анализа и управления, e-mail: avdeeva.olga.official@gmail.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430

THE NORM AND THE LOGARITHMIC NORM OF INFINITE MATRICES

O. I. Kleshchina

Voronezh State University

1 University square, Voronezh 394018, Russian Federation

E-mail: office@main.vsu.ru

Abstract. In this paper the norm and the logarithmic norm of infinite matrices in the l_σ space are studied. Various estimates of these quantities are obtained.

Keywords: infinite matrices; the norm of a matrix; the logarithmic norm of a matrix; Young's inequality; Holder's inequality

REFERENCES

1. Rudin U. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1975, 449 p. (In Russian).
2. Perov A.I., Kostrub I.D. O spektral'noy abstsisse i logarifmicheskoy norme [On the Spectral Abscissa and the Logarithmic Norm]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2017, vol. 101, no. 4, pp. 562-575. (In Russian).
3. Lozinskiy S.M. Otsenka pogreshnosti chislennogo integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1958, no. 5, pp. 52-90. (In Russian).
4. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Kratkiy kurs funktsional'nogo analiza* [Short Course of Functional Analysis]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1982, 271 p. (In Russian).
5. Kuk R. *Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces]. Moscow, Mir Publ., 1975, 449 p. (In Russian).
6. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Solutions Stability of Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 536 p. (In Russian).
7. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Leningrad, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1959, 399 p. (In Russian).
8. Khalmosh P. *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book]. Moscow, Mir Publ., 1970, 252 p. (In Russian).
9. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskiy V.V. *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [Theory of Lyapunov Exponents and Its Applications to the Stability Issues]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian).

Received 24 April 2018

Reviewed 28 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

Kleshchina Olga Igorevna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, System Analysis and Control Department, e-mail: avdeeva.olga.official@gmail.com

For citation: Kleshchina O.I. Norma i logarifmicheskaya norma beskonечnykh matric [The norm and the logarithmic norm of infinite matrices]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 424–430. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430 (In Russian, Abstr. in Engl.).