ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376

УДК 517.929.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

© **А. П. Жабко**[1], **В. В. Провоторов**[2], **Е. Н. Провоторова**[3]

[1] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: wwprov@mail.ru

[3] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
324026, Российская Федерация, г. Воронеж, Московский проспект, 14
E-mail: enprov@mail.ru

Аннотация. В работе сделана попытка продемонстрировать понятие устойчивости по Ляпунову невозмущенного состояния дифференциальной системы применительно к уравнениям с частными производными и показать возможность использования известных классических результатов в изучаемом случае.

Ключевые слова: система параболических уравнений; распределенные параметры на графе; начально-краевая задача; аналог устойчивости по Ляпунову

Введение

В многочисленных приложениях при анализе эволюционных процессов из-за сложности математических моделей приходится использовать системы эволюционных уравнений с частными производными и изучать их свойства. Именно этот случай есть предмет исследования в представленной работе: вводится понятие устойчивости параболической системы с распределенными параметрами на графе, аналогичное понятию устойчивости по Ляпунову обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучая соответствующую начально-краевую задачу в слабой постановке, мы выходим за рамки классических решений и обращаемся к слабым решениям, описывающим состояния системы, которые более точно отражают физическую сущность явлений и процессов. При этом выбор класса слабых решений, определяемого тем или иным функциональным пространством, обусловлен, прежде всего, требованием сохранения теорем существования и единственности (последнее, если это соответствует духу изучаемого явления или процесса).

1. Основные понятия и используемые утверждения

На протяжении всей работы используются понятия и обозначения, принятые в [1]: Γ – ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ, параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ — множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 — объединение всех ребер γ_0, не содержащих концевых точек; $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$ ($\gamma_t = \gamma_0 \times (0,t)$), $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t)$ ($t \in (0,T]$, $T < \infty$ — произвольная фиксированная постоянная); f_γ — сужение функции f на ребро γ.

Необходимые пространства и множества: $L_p(\Gamma)$ ($p = 1,2$) — банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p-й степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой, определяемой соотношением $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt$; $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично вводится пространство $W^1(\Gamma_T)$; $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0\le t\le T} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)} \tag{1}$$

и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$.

Введем пространство состояний параболической системы и вспомогательные пространства. Рассмотрим билинейную форму $\ell(\mu,\nu) = \int\limits_\Gamma \Big(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x)\Big)dx$ с фиксированными измеримыми и ограниченными на Γ_0 функциями $a(x)$, $b(x)$, суммируемыми с квадратом:

$$0 < a_* \le a(x) \le a^*,\ |b(x)| \le \beta,\ x \in \Gamma_0. \tag{2}$$

Лемма 1. [2, с. 92] Пусть функция $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ такова, что

$$\ell(u,\nu) - \int\limits_\Gamma f(x)\eta(x)dx = 0$$

для любой $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x) \in L_2(\Gamma)$ — фиксированная функция). Тогда для любого ребра $\gamma \subset \Gamma$ сужение $a(x)_\gamma \frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках ребра γ.

Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям леммы и соотношениям $\sum\limits_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum\limits_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$ во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер γ, соответственно ориентированных «к узлу ξ» и «от узла ξ»). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma)$. При этом, если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a,\Gamma)$. Пусть далее $\Omega_a(\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T

плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W_0^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0,t)_\gamma}{\partial x} \tag{3}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$; ясно, что $V^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (3) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0,T]$ (аналогично вводится пространство $W^1(a,\Gamma_T)$); $W^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

В пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{4}$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ; $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Состояние $y(x,t)$ $(x,t \in \overline{\Gamma}_T)$ системы (4) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется слабым решением $y(x,t)$ уравнения (4), удовлетворяющим начальному и краевому условиям

$$y\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y\,|_{x \in \partial\Gamma_T} = 0; \tag{5}$$

$\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$. Предположения относительно функций $a(x)$ и $b(x)$ указаны выше. Из $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ следует, что отображение $y : [0,T] \to W_0^1(a,\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ является непрерывной функцией, так что первое равенство в (5) имеет смысл и понимается почти всюду.

Определение 1. Слабым решением начально-краевой задачи (4), (5) класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ называется функция $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_\Gamma y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) = \int_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$; $\ell_t(y,\eta)$ — билинейная форма: $\ell_t(y,\eta) = \int_{\Gamma_t}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt, \quad t \in (0,T]$.

Приведем используемые ниже утверждения, полные доказательства которых представлены в работах [1, 3].

При доказательстве разрешимости задачи (4), (5) используется специальный базис пространства $W_0^1(a,\Gamma)$ — система обобщенных собственных функций краевой задачи на собственные значения (спектральной задачи)

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \;\; u(x)|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{6}$$

в классе $W^1(a,\Gamma)$. Обобщенная собственная функция удовлетворяет интегральному тождеству $\ell(u,\eta) = \lambda(u,\eta)$ для любой функции $\eta(x) \in W_0^1(a,\Gamma)$ (здесь и всюду ниже через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma_T)$).

Лемма 2. [3] Пусть выполнены предположения (2). Тогда спектральная задача (6) имеет счетное множество действительных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ (занумерованных в порядке возрастания с учетом их кратностей) с предельной точкой на бесконечности (собственные значения λ_i положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых). Система обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ образует базис в $W_0^1(a,\Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$, ортонормированный в $L_2(\Gamma)$ и ортогональный в смысле скалярного произведения $[\cdot,\cdot]$.

Следствие 1. *Если $b(x)\geq 0$, как это имеет место в приложениях, то все собственные значения спектральной задачи (6) неотрицательны.*

Теорема 1. [1] При любых $f(x)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$ и для любого $0<T<\infty$ начально-краевая задача (4), (5) однозначно слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

При доказательстве теоремы строятся приближения Фаэдо-Галеркина $y^N(x,t)$ по базису $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$: $y^N(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{N} c_n^N(t)u_n(x)$, где $c_n^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $[0,T]$ функции ($c_n'(t)\in L_2(0,T)$, натуральное N фиксировано). Дальнейшие рассуждения основаны на априорных оценках норм слабых решений задачи (4), (5) и построении слабо сходящейся по норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ подпоследовательности $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geq 1}$ последовательности $\left\{y^N\right\}_{N\geq 1}$ к решению $y(x,t)\in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ (слабая компактность $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geq 1}$).

Следствие 2. *Слабое решение начально-краевой задачи (4), (5) непрерывно зависит от исходных данных $f(x,t)$ и $\varphi(x)$. Тем самым установлена корректность по Адамару начально-краевой задачи (4), (5) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ для любого $0<T<\infty$.*

З а м е ч а н и е 1. Утверждения теоремы 1 сохраняются при замене $[0,T]$ на $[t_0,T]$ ($t_0>0$), начальное условие в соотношениях (5) заменяется на $y\mid_{t=t_0}=\varphi(x)$. Краевое условие в (5) может быть неоднородным: $y(x,t)\mid_{x\in\partial\Gamma}=\phi(x,t)$.

В многочисленных приложениях, где необходимо исследовать свойства решений $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ задачи (4), (5) для произвольного конечного T, важно знать поведение $y(x,t)$ при $t\to+\infty$, то есть при $t\in[0,\infty)$.

В условиях теоремы 1 отображение $t\to y(x,t)$ ($t\geq 0$) непрерывно. Пусть, как и выше, $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, причем

$$\int\limits_t^{t+1}\|f(\cdot,\varsigma)\|^2_{L_2(\Gamma)}d\varsigma\leq A \tag{7}$$

для любого $t\geq 0$ (A – фиксированная постоянная); последнее означает, что функция $f(x,t)$ определена в области $\Gamma\times[0,\infty)$.

Теорема 2. *Пусть $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — слабое решение задачи (4), (5) для произвольного конечного $T>0$. Тогда существует такая положительная постоянная C, что*

1) $\int\limits_t^{t+1}\|y(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\leq C$ *для любых* $t\geq 0$ *; 2)* $\|y(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)}\leq C$ *при* $t\to+\infty$.

Доказательство строится по следующей схеме. Полуось $[0,\infty)$ разбивается на отрезки $[j-1,j]$, $j=1,2,\ldots$ и через t_j обозначается такое принадлежащее $[j-1,j]$ число, для которого

$$\|y(\cdot,t_j)\|^2_{L_2(\Gamma_T)}=\max_{t\in[j-1,j]}\|y(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma_T)},\quad j=1,2,\ldots. \tag{8}$$

Для произвольных положительных s и t ($s<t$) из интегрального тождества определения 1 следует неравенство

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\|y(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}-\tfrac{1}{2}\|y(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Gamma)}+\alpha\int\limits_s^t\|y(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\le\\ \le\left(\int\limits_s^t\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_s^t\|y(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\right)^{1/2},\end{gathered} \tag{9}$$

постоянная α зависит только от фиксированных a_* и β в условиях (2).

Дальнейшие рассуждения опираются на идею, представленную в монографии Ж.Л. Лионса [4, с. 519]. При этом используется неравенство (9) для произвольного отрезка $[t_j,t_{j+2}]$, $j=1,2,\ldots$ поскольку в силу (8) возможно равенство $t_j=t_{j+1}$ и далее в силу произвольности $j=1,2,\ldots$ имеет место оценка

$$\|y(\cdot,t))\|_{L_2(\Gamma)}\le\max\{\max_{t\in[0,2]}\|y(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)},M\}=C,$$

где $M=\left(\frac{3A}{\alpha^2}\chi^2+\frac{6A}{\alpha}\right)^{1/2}$, χ — константа вложения пространства $W_2^1(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$. Таким образом, решение $y(x,t)$ определено в области $\Gamma\times[0,\infty)$ и из полученной оценки вытекают утверждения теоремы.

2. Основной результат

Предположим, что $b(x)\ge 0$ для $x\in\Gamma$, что гарантирует неотрицательность собственных значений λ_i, $i\ge 1$ (следствие 1) и пусть $\lambda_1>0$. Рассмотрим систему (4) на множестве $\Gamma_\infty=\Gamma_0\times(0,\infty)$. Обозначим через $\Gamma_{t_0,t}=\Gamma_0\times(t_0,t)$, $\partial\Gamma_{t_0,t}=\partial\Gamma\times(t_0,t)$ ($0<t_0<t<\infty$), $\Gamma_{t_0,\infty}=\Gamma_0\times(t_0,\infty)$, $\partial\Gamma_{t_0,\infty}=\partial\Gamma\times(t_0,\infty)$; ясно, что $\Gamma_{t_0,t}\subset\Gamma_t$. Как и выше, $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, причем выполнены условия (7).

Пусть состояние системы (4) описывается функцией $\overline{y}(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$, являющейся слабым решением уравнения (4) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$ с начальным и краевым условиями

$$y\mid_{t=t_0}=\overline{\varphi}(x),\quad x\in\Gamma,\quad y\mid_{x\in\partial\Gamma_{t_0,\infty}}=0, \tag{10}$$

а функция $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$ является слабым решением уравнения (4) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$ с начальным и краевым условиями

$$y\mid_{t=t_0}=\varphi(x),\quad x\in\Gamma,\quad y\mid_{x\in\partial\Gamma_{t_0,\infty}}=0, \tag{11}$$

(начально-краевая задача (4), (10) отличается от задачи (4), (11) тем, что функция $\overline{\varphi}(x)$ в первом соотношении (10) заменена на отличную от нее функцию $\varphi(x)$). Состояние $\overline{y}(x,t)$ системы (4) назовем невозмущенным, а $y(x,t)$ – возмущенным. Из теоремы 2 вытекает, что состояния $\overline{y}(x,t)$, $y(x,t)$ определены в области $\Gamma_{t_0,\infty}$, удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиями (10), (11) и принадлежат пространству $V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$ при $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_\infty)$.

Определение 2. Невозмущенное состояние $\overline{y}(x,t)$ системы (4) называется слабо устойчивым (устойчивым по Ляпунову [5]), если для любых $t_0 > 0$ и $\epsilon > 0$ существует $\delta(t_0,\epsilon) > 0$ такое, что при $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)} < \delta(t_0,\epsilon)$ выполняется $\|y(\cdot,t) - \overline{y}(\cdot,t)\|_{W^1(a,\Gamma)} < \epsilon$ при $t \geq t_0$, где $y(x,t)$ — возмущенное состояние системы (4).

Замечание 2. Аналогично определению устойчивости невозмущенного состояния системы (4) можно ввести определение равномерной устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости невозмущенного состояния системы (4) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$.

Замечание 3. В силу линейности системы (4) можно все определения переформулировать для нулевого (тривиального) состояния системы (4).

Теорема 3. *Пусть в (4) $b(x) \geq 0$, $x \in \Gamma$ и пусть первое собственное значение λ_1 положительно, тогда невозмущенное состояние системы (4) в области Γ_T слабо устойчиво.*

Действительно, в силу линейности уравнения (4) функция $\theta(x,t) = y(x,t) - \overline{y}(x,t)$ — элемент пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$ и является слабым решением начально-краевой задачи для однородного уравнения (4) ($f = 0$), удовлетворяющее начальному и краевому условиям

$$\theta\,|_{t=t_0} = \phi(x), \quad x \in \Gamma, \quad \theta\,|_{x\in\partial\Gamma_{t_0,\infty}} = 0, \tag{12}$$

где $\phi(x) = \varphi(x) - \overline{\varphi}(x)$. Следуя рассуждениям доказательства теоремы 1 (см. [1]), начально-краевая задача (4), (12) однозначно слабо разрешима, ее решение имеет представление $\theta(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-\lambda_n t} u_n(x)$, $\phi_n = (\phi, u_n)$ и является пределом слабо сходящейся последовательности $\left\{\theta^N\right\}_{N\geq 1}$ приближений $\theta^N(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n e^{-\lambda_n t} u_n(x)$, причем $\|\theta^N\|_{2,\Gamma_t} \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n^2 e^{-2\lambda_n t}$, $N = 1,2,\ldots$ Переходя к пределу в последнем неравенстве при $N \to \infty$, приходим к оценке $\|\theta(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} \leq C^*\left(\|\phi\|_{L_2(\Gamma)}\right)$ для любых $t \in [t_0,\infty)$ (C^* — постоянная), из которой следует утверждение теоремы.

Замечание 4. Полученные результаты применимы для задач оптимального управления [6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Провоторов В.В., Провоторова Е.Н.* Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 89-104.

2. *Провоторов В.В., Волкова А.С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. 188 с.

3. *Волкова А.С., Провоторов В.В.* Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 581 с.

5. *Жабко А.П., Котина Е.Д., Чижова О.Н.* Дифференциальные уравнения и устойчивость. СПб.: Лань, 2015. 320 с.

6. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10. № 6. С. 29-35.

7. *Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A.* Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 3. С. 264-277.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жабко Алексей Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой управления факультета прикладной математики – процессов управления, Заслуженный работник высшей школы, e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: wwprov@mail.ru

Провоторова Елена Николаевна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: enprov@mail.ru

Для цитирования: *Жабко А.П., Провоторов В.В., Провоторова Е.Н.* Об устойчивости параболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 368–376. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376

ON STABILITY CONTROL OF A PARABOLIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON THE GRAPH

A. P. Zhabko[1], **V. V. Provotorov**[2], **E. N. Provotorova**[3]

[1] St. Petersburg State University
7 Universitetskaya Quay, St. Petersburg 199034, Russian Federation
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru
[2] Voronezh State University
1 University Area, Voronezh 394006, Russian Federation
E-mail: wwprov@mail.ru
[3] Voronezh State Technical University
14 Moscovsky Avenue, Voronezh 394026, Russian Federation
E-mail: enprov@mail.ru

Abstract. The work is an attempt to demonstrate the concept of sustainability in the undisturbed state Lyapunov differential system for equations with partial derivatives, and show the ability to use a famous classical results in the studied case.
Keywords: system of parabolic equations; distributed parameters on the graph; initial-boundary value problem; equivalent of Lyapunov stability

REFERENCES

1. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Sintez optimal'nogo granichnogo upravleniya parabolicheskoy sistemy s zapazdyvaniyem i raspredelennymi parametrami na grafe [Synthesis of optimal boundary control of parabolic system with time-delay and distributed parameters on the graph]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 89-104. (In Russian).

2. Provotorov V.V., Volkova A.S. *Nachal'no-krayevyye zadachi s raspredelennymi parametrami na grafe* [Initial-Boundary Value Problems with Distributed Parameters on the Graph]. Voronezh, The Scientific Book Publishing House, 2014, 188 p. (In Russian).

3. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobshchennyye resheniya i obobshchennyye sobstvennyye funktsii krayevykh zadach na geometricheskom grafe [Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 3-18. (In Russian).

4. Lions J.-L. *Nekotoryye metody resheniya nelineynykh krayevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Problems]. Moscow, Mir Publ., 1972, 581 p. (In Russian).

5. Zhabko A.P., Kotina E.D., Chizhova O.N. *Differentsial'nyye uravneniya i ustoychivost'* [Differential Equation and Stability]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2015, 320 p. (In Russian).

6. Podvalnyy S.L., Provotorov V.V. Opredeleniye startovoy funktsii v zadache nablyudeniya parabolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe [Determining the starting function in the problem of observation of parabolic system with distributed parameters on the graph]. *Vestnik*

Voronezhskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta – Proceedings of Voronezh State Technical University, 2014, vol. 10, no. 6, pp. 29-35. (In Russian).

7. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 264-277.

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Zhabko Alexei Petrovich, St. Petersburg State University, St.-Petersburg, Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Management, e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Provotorov Vyacheslav Vasil'evich , Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Partial Differential Equations and Probability Theory, e-mail: enprov@mail.ru

Provotorova Elena Nikolaevna, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematics and Physics and Mathematical Modeling, e-mail: enprov@mail.ru

For citation: Zhabko A.P., Provotorov V.V., Provotorova E.N. Ob ustoychivosti parabolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe [On stability control of a parabolic systems with distributed parameters on the graph]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 368–376. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376 (In Russian, Abstr. in Engl.).