

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367

УДК 519.642.5

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ С ОТСУТСТВУЮЩЕЙ ПРЕДЫСТОРИЕЙ

© А. С. Апарцин, Е. В. Маркова, И. В. Сидлер

ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева»

Сибирского отделения Российской академии наук

664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130

E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, markova@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена интегральная модель развивающейся системы, у которой момент ее возникновения совпадает с началом моделирования, так что предыстория отсутствует и при $t = 0$ все возрастные группы элементов пусты. *Ключевые слова:* развивающаяся система; возрастные группы; уравнение Вольтерра I рода; задача оптимизации

Введение

Интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s) x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $K_i(t, s)$ — непрерывный по t, s и непрерывно дифференцируемый по t в области $\Delta_i = \{t \in [0, T], s \in [a_i(t), a_{i-1}(t)]\}$ коэффициент эффективности функционирования элементов $x(s)$ i -й возрастной группы, играет ключевую роль в интегральных моделях развивающихся систем как уравнение баланса между требуемым уровнем $y(t)$ развития системы, состоящей из элементов n возрастных групп, и возможностью его достижения.

Специфика (1) во многом связана со значениями $a_i(0)$. Случай $a_i(0) < 0$ $i = 1, \dots, n$, предполагает задание предыстории $x(t) = x_0(t)$, $t \in [a_n(0), 0)$. В частности, при $a_i(t) = t - T_i$, $0 < T_1 < \dots < T_n$,

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [-T_n, 0).$$

Этот случай для $n = 3$ рассмотрен в [1, 2] применительно к проблеме построения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы, а уравнение типа (1) имело вид

$$\int_{t-T_1}^t x(s)ds + 0,97 \int_{t-T_2}^{t-T_1} x(s)ds + 0,9 \int_{t-T_3}^{t-T_2} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Существенно менее изучен случай $a_i(0) = 0$, который соответствует совпадению моментов начала моделирования и возникновения самой системы. При этом предыстория отсутствует и при $t = 0$ $x(0) = 0$, так что все возрастные группы пусты. Именно этот случай будет нас интересовать в данной работе.

1. Случай постоянных ядер Вольтерра

Теория уравнений типа (1) с условием $a_i(0) = 0$ в настоящее время только создается. В частности, если ядра Вольтерра K_i переменны, то, как показали расчеты модельных примеров, с ростом t непрерывное решение (1) может терять устойчивость к погрешностям исходных данных. Механизм этого эффекта изучен на специальных тестовых примерах для $n = 2$ в [3, 4], $n = 3$ в [5] и для произвольного n в [6]. Ниже мы ограничимся случаем постоянных ядер $K_i(t, s) = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, $\beta_1 = 1$, для которого детальный теоретический анализ проведен в [4]. Кроме того, будем предполагать, что $a_i(t) = \alpha_i t$, $1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n \geq 0$, так что (1) имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

С использованием классических результатов функционального анализа (см., например, [7, с. 212]), в [4] показано, что при выполнении неравенства

$$\sum_{i=2}^n |\beta_{i-1} - \beta_i| \alpha_{i-1} < 1 \quad (4)$$

уравнение (3) корректно по Адамару на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)})$ (под $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$ понимается пространство непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций $y(t)$ с $y(0) = 0$). Переход от (3) к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \sum_{i=2}^n (\beta_{i-1} - \beta_i) \alpha_{i-1} x(\alpha_{i-1} t) + y'(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

показывает, что неравенство (4) есть условие сжатия оператора в правой части (5), действующего в $C_{[0,T]}$. Существенно, что это условие полностью определяется параметрами α_i , β_i и не зависит от того, на каком временном промежутке рассматривается уравнение (3).

Рассмотрим частный случай уравнения (3)

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s)ds + 0,97 \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} x(s)ds + 0,9 \int_{\alpha_3 t}^{\alpha_2 t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

которое, как и уравнение (2), применительно к задаче развития электроэнергетической системы можно считать уравнением баланса между желаемым уровнем электропотребления $y(t)$ и введенной в момент $t > 0$ генерацией электроэнергии. Монотонное убывание коэффициентов эффективности β_i , $i = 1, 2, 3$, отражает естественный процесс старения элементов средней и старшей возрастной группы.

Пусть $y(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда эквивалентное (6) функциональное уравнение имеет вид

$$x(t) = 0,03\alpha_1 x(\alpha_1 t) + 0,07\alpha_2 x(\alpha_2 t) + 0,9\alpha_3 x(\alpha_3 t) + t^k. \quad (7)$$

Для (7) неравенство (4) заведомо выполнено, поэтому (7) однозначно разрешимо в $C_{[0,T]}$. Полагая в (7) $x(t) = c_k t^k$, имеем относительно c_k уравнение

$$c_k = 0,03\alpha_1^{k+1} c_k + 0,07\alpha_2^{k+1} c_k + 0,9\alpha_3^{k+1} c_k + 1,$$

откуда

$$c_k = \frac{1}{1 - 0,03\alpha_1^{k+1} - 0,07\alpha_2^{k+1} - 0,9\alpha_3^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если, например, $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/4$, $\alpha_3 = 1/8$, то

$$c_k = \frac{1}{1 - 0,03 \cdot 2^{-(k+1)} - 0,07 \cdot 2^{-2(k+1)} - 0,9 \cdot 2^{-3(k+1)}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

в частности $c_1 = 1,02663$, $c_2 = 1,00665$, $c_3 = 1,00237$.

З а м е ч а н и е 1. Случай, когда монотонное убывание $|\beta_i|$, $i = 2, 3$, не имеет места и неравенство (4) не выполнено, исследован в [4].

З а м е ч а н и е 2. В силу перестановочности операторов в правой части (5), для поиска непрерывного решения можно применить аппарат комбинаторики [8]. Универсальная формула обращения (5) на его основе приведена в [4].

З а м е ч а н и е 3. Для численного решения (1) в [9, 10] разработаны модифицированные варианты методов левых и средних прямоугольников.

2. Оптимизационная постановка

В [11] на базе модели (2) была поставлена задача оптимизации функционального параметра $T_3(t)$ (момент вывода оборудования из эксплуатации), обеспечивающего заданную потребность в электроэнергии при минимуме суммарных затрат на ввод и эксплуатацию генерирующих мощностей, и приведены результаты ее решения на реальных данных с ограничением на ввод новых мощностей.

По аналогии с [11] можно поставить задачу оптимизации возрастного состава и момента вывода оборудования из эксплуатации для задачи (6). Пусть доля «молодых» мощностей α_1 считается заданной. Примем в качестве целевого функционал затрат вида

$$I(x, \alpha_2, \alpha_3) = \int_0^T a^t \sum_{i=1}^3 \beta_i \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} u_1(t-s) u_2(s) x(s) ds dt + \int_0^T a^t k(t) x(t) dt. \quad (8)$$

Здесь первое слагаемое — суммарные эксплуатационные затраты за прогнозный период, второе — суммарные затраты на ввод новых генерирующих мощностей.

В (8) считаются известными следующие функции:

β_i — коэффициент эффективности использования мощностей i -й возрастной группы;

$u_1(t-s)$ — коэффициент увеличения в момент времени t затрат на эксплуатацию мощностей, введенных в момент s ;

$u_2(t)$ — удельные затраты на эксплуатацию мощности, введенной в момент t ;

$k(t)$ — затраты на ввод единицы мощности в момент t ;

a^t — коэффициент дисконтирования затрат, $0 < a < 1$.

Управляющие параметры α_2 и α_3 принадлежат допустимому множеству

$$U = \{\alpha_2, \alpha_3 : 0 \leq \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1\}. \quad (9)$$

Требуется найти

$$(\alpha_2^*, \alpha_3^*) = \arg \min_{\alpha_2, \alpha_3 \in U} I(x(\alpha_2, \alpha_3)) \quad (10)$$

при выполнении условий (6), (8)–(9) и ограничении на вводимые мощности

$$x(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Привязка задачи (6), (8)–(11) к конкретному объекту электроэнергетики — предмет дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.
2. Труфанов В.В., Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В. Интегральные модели для разработки стратегии технического перевооружения генерирующих мощностей // Электричество. 2017. № 3. С. 4-11.
3. Апарцин А.С. К исследованию устойчивости решений тестовых неклассических уравнений Вольтерра I рода // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. № 5. С. 15-20.
4. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О тестовых уравнениях Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 4. С. 31-45.
5. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. № 2. С. 24-33. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33.

6. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Тестовое уравнение Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, содержащих n возрастных групп // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 168-179. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 759 с.
8. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
9. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Обобщенные постановки и решения задач управления: сб. тр. 7 Междунар. симп. М.: АНО «Издательство физико-математической литературы», 2014. С. 21-25.
10. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О численном решении неклассических уравнений Вольтерра I рода // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. 9 Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2014. С. 59-64.
11. Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В., Труфанов В.В. Об управлении возрастной структурой в интегральной модели ЭЭС России // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1006-1009.

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Апарцин Анатолий Соломонович, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Маркова Евгения Владимировна, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: markova@isem.irk.ru

Сидлер Инна Владимировна, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: inna.sidler@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367

INTEGRAL MODEL OF DEVELOPING SYSTEM WITHOUT PREHISTORY

A. S. Apartsyn, E. V. Markova, I. V. Sidler

Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, markova@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

Abstract. The paper addresses integral model of the developing system, in which the moment of its origin coincides with the beginning of the modeling, so there is no prehistory and for $t = 0$ all the age groups of the elements are empty.

Keywords: developing system; age groups; Volterra equation of the first kind; optimization problem

REFERENCES

1. Apartsin A.S., Sidler I.V. Primeneniye neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda dlya modelirovaniya razvivayushchikhsya sistem [Using the Nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2013, no. 6, pp. 3-16. (In Russian).
2. Trufanov V.V., Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V. Integral'nyye modeli dlya razrabotki strategii tekhnicheskogo perevooruzheniya generiruyushchikh moshchnostey [Integrated Models for the Development of Technical Modernization of Generating Capacities Strategy]. *Elektrichestvo – Electricity*, 2017, no. 3, pp. 4-11. (In Russian).
3. Apartsin A.S. K issledovaniyu ustoychivosti resheniy testovykh neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda [On the study of stability of solutions for test nonclassical Volterra equations of the first kind]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, no. S, pp. 15-20. (In Russian).
4. Apartsin A.S., Sidler I.V. O testovykh uravneniyakh Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [On the test Volterra equations of the first kind in the integral models of developing systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2018, no. 4, pp. 31-45. (In Russian).
5. Apartsin A.S., Sidler I.V. Issledovaniye testovykh uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [Study of test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 24-33. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33.
6. Apartsin A.S., Sidler I.V. Testovoye uravneniye Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem, soderzhashchikh n vozrastnykh grupp [The test Volterra equation of the

first kind in integral models of developing systems containing n age groups]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 168-179. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179.

7. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ, 1977, 759 p.

8. Vilenkin N.Ya. *Kombinatorika* [Combinatorics]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 323 p. (In Russian).

9. Apartsin A.S., Sidler I.V. Chislennoye resheniye uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [Numerical solution of the Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems]. *Sbornik trudov 7 Mezhdunarodnogo simpoziuma «Obobshchennyye postanovki i resheniya zadach upravleniya»* [Proceedings of 7 International Symposium “Generalized Statements and Solutions of Control Problems”]. Moscow, Autonomous Noncommercial Organization “Publishing House of Physical and Mathematical Literature”, 2014, pp. 21-25. (In Russian).

10. Apartsin A.S., Sidler I.V. O chislennom reshenii neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda [On the numerical solution of the nonclassical Volterra equations of the first kind]. *Sbornik statey 9 Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Analiticheskiye i chislennyye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem»* [Proceedings of 9 International Conference “Analytical and Numerical Methods of Modeling of Natural Science and Social Problems”]. Penza, 2014, pp. 59-64. (In Russian).

11. Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V., Trufanov V.V. Ob upravlenii vozrastnoy strukturoy v integral'noy modeli EES Rossii [On age structure control in integral model of EPS of Russia]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015. vol. 20, no. 5, pp. 1006-1009. (In Russian).

Received 20 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 19 June 2018

There is no conflict of interests.

Apartsyn Anatoly Solmonovich, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Markova Evgeniia Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: markova@isem.irk.ru

Sidler Inna Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Technics, Senior Researcher, e-mail: inna.sidler@mail.ru

For citation: Apartsyn A.S., Markova E.V., Sidler I.V. Integral'naya model' razvivayushcheysya sistemy s otsutstviyem predystoriyey [Integral model of developing system without prehistory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 361–367. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367 (In Russian, Abstr. in Engl.).