ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249
УДК 517.988.6

НЕРАВЕНСТВО КАРИСТИ И ОБОБЩЕННЫЕ СЖАТИЯ (СЛУЧАЙ ОДНОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

© **Б. Д. Гельман**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: gelman@math.vsu.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается новое неравенство типа Каристи и доказывается теорема о неподвижной точке. В дальнейшем опираясь на полученную теорему, изучаются отображения (обобщенные сжатия), которые сжимают относительно некоторой функции 2-х векторных аргументов. Эта функция не обязана быть метрикой и даже непрерывной.

Ключевые слова: метрическое пространство; обобщенное сжатие; неподвижная точка

Введение

Пусть отображение $f : X \to X$. Хорошо известно, при каких предположениях можно определить такую метрику ρ на X, что (X, ρ) будет полным метрическим пространством, а отображение f будет сжимающим в этой метрике (см. [1]). Невзирая на это, существует большое количество работ, посвященных различным обобщениям и вариантам принципа сжимающих отображений (см., например, обзор [2] и книгу [3]), так как это позволяет удобнее применять этот принцип в конкретных задачах. Одним из таких обобщений является теорема Каристи. Приведем формулировку однозначного варианта этой теоремы. Многозначный вариант этой теоремы доказан в [4].

Теорема Каристи. *Пусть X полное метрическое пространство, $f\colon X\to X$ непрерывное отображение. Пусть существует неотрицательная функция $\alpha : X \to \mathbb{R}_+$ и неотрицательное число c такие, что для любой точки $x \in X$ будет выполняться неравенство Каристи,*

$$\alpha(f(x)) + c\,\rho(x, f(x)) \leq \alpha(x). \tag{K}$$

Тогда отображение f имеет неподвижную точку, то есть существует такая точка $x_* \in X$, что $f(x_*) = x_*$.

В процессе доказательства этой теоремы неравенство (K) позволяет построить сходящуюся итерационную последовательность, которая сходится к неподвижной точке x_*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00677).

Отметим работу [5] в которой неравенство Каристи применяется для изучения неподвижных точек и точек совпадения двух многозначных отображений.

В настоящей работе мы рассмотрим новое неравенство типа Каристи и опираясь на полученную теорему, изучим отображения (обобщенные сжатия), которые сжимают относительно некоторой функции 2-х векторных аргументов, которая не обязана быть метрикой и даже непрерывной.

1. Обобщенные сжатия

Пусть (X, ρ) полное метрическое пространство, $f : X \to X$ непрерывное отображение, $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}$ некоторая ограниченная снизу функция и $\gamma_0 = \inf\limits_{(x,y)\in X\times X} \alpha(x, y)$.

Теорема 1. *Пусть существует такое число $c > 0$, что для любых точек x, $y \in X$ выполняется неравенство*

$$\alpha(f(x), f(y)) + c\rho(x, y) \leq \alpha(x, y). \tag{1}$$

Тогда для любой точки x_0 последовательные приближения $x_{n+1} = f(x_n)$ сходятся к единственной неподвижной точке x_* отображения f и для нее справедливо неравенство

$$\rho(x_*, x_0) \leq \frac{\alpha(x_0, f(x_0)) - \gamma_0}{c}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим итерационную последовательность точек, выходящую из точки x_0, то есть $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... $x_n = f(x_{n-1})$, ... Пусть число $u_n = \alpha(x_n, x_{n+1})$, где $n = 0, 1, 2, ...$ В силу предположений теоремы для любого n справедливо неравенство:

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq c^{-1}\Big(\alpha(x_n, x_{n+1}) - \alpha(x_{n+1}, x_{n+2})\Big) = c^{-1}(u_n - u_{n+1}). \tag{3}$$

Тогда последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, следовательно, является фундаментальной. Нетрудно проверить, что в этом случае фундаментальной является и последовательность $\{x_n\}$. Действительно,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{1}{c}(u_i - u_{i+1}) \leq \frac{1}{c}(u_n - u_{n+p}),$$

откуда и следует фундаментальность этой последовательности.

Тогда существует точка x_*, которая является пределом последовательности $\{x_n\}$. Так как отображение f непрерывно, то $x_* = f(x_*)$, то есть x_* является неподвижной точкой этого отображения.

Покажем единственность неподвижной точки. Пусть точки x_* и $x_*^{'}$ являются неподвижными точками отображения f, тогда в силу неравенства (1)

$$\alpha(x_*, x_*^{'}) + c\rho(x_*, x_*^{'}) \leq \alpha(x_*, x_*^{'}).$$

Следовательно, $\rho(x_*, x_*') = 0$, что и доказывает единственность неподвижной точки.

Для доказательства (2) рассмотрим следующие неравенства: если ε произвольное положительное число, то существует такое n, что $\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_n) + \varepsilon$. Оценим $\rho(x_0, x_n)$. В силу неравенства треугольника

$$\rho(x_0, x_n) \le \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \le \sum_{i=0}^{n-1} c^{-1}(u_i - u_{i+1}) = c^{-1}(u_0 - u_n),$$

где $u_0 = \alpha(x_0, x_1)$, а $u_{i-1} = \alpha(x_{i-1}, x_i) \ge \gamma_0$.

Таким образом,

$$\rho(x_0, x_*) \le \frac{(\alpha(x_0, x_1) - \gamma_0)}{c} + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, что и доказывает неравенство (2). Теорема полностью доказана.

Рассмотрим утверждение, которое является некоторой обобщенной формой принципа сжимающих отображений Банаха.

Следствие 1. *Пусть существуют такие числа $q > 0$ и $k \in (0,1)$ что для любых x, $y \in X$ справедливы неравенства:*
(I) $\rho(x, y) \le q\,\alpha(x, y)$;
(II) $\alpha(f(x), f(y)) \le k\,\alpha(x, y)$.
Тогда обобщенное сжатие f имеет единственную неподвижную точку x_* и для любой точки x_0 справедливо неравенство

$$\rho(x_*, x_0) \le \frac{\alpha(x_0, f(x_0)) - \gamma_0}{q(1-k)}.$$

Доказательство. Из неравенства (II) вытекает, что

$$\alpha(f(x), f(y)) + (1-k)\alpha(x, y) \le \alpha(x, y).$$

В силу неравенства (I) имеем, что

$$\alpha(f(x), f(y)) + \frac{1-k}{q}\rho(x, y) \le \alpha(x, y).$$

Теперь справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим пример отображения, которое удовлетворяет условиям следствия 1.

Пример 1. Пусть $X = [-1, 1]$, отображение $f : X \to X$ определено условием $f(x) = \frac{3}{4}x^2$. Очевидно, что это отображение не является сжимающим относительно обычной метрики на числовой прямой. Однако, легко заметить, что это отображение удовлетворяет условиям следствия 1 относительно функции $\alpha(x, y) = |x| + |y|$.

Рассмотрим некоторые другие примеры функций α, удовлетворяющих неравенству (I). Каждый такой пример позволяет сформулировать некоторую теорему о неподвижной точке.

П р и м е р 2. Пусть $g : X \times X \to X$ произвольное отображение, определим функцию α следующим образом:

$$\alpha(x,y) = \rho(x, g(x,y)) + \rho(y, g(x,y)).$$

Очевидно, что в силу неравенства треугольника эта функция удовлетворяет неравенству (I) с константой $q = 1$.

П р и м е р 3. Пусть f наше основное отображение, рассмотрим функцию

$$\alpha(x,y) = \max\{\rho(x,y),\ \rho(x, f(x)),\ \rho(y, f(y))\}.$$

Очевидно, что эта функция также удовлетворяет неравенству (I) с константой $q = 1$.

Рассмотрим теперь локальный вариант теоремы 1. Пусть x_0 некоторая фиксированная точка в пространстве X, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в этой точке. Пусть $f : B_R[x_0] \to X$ непрерывное отображение, а множество $A \subset X$ содержит $B_R[x_0] \bigcup f(B_R[x_0])$. Пусть $\alpha : A \times A \to \mathbb{R}$ некоторая ограниченная снизу функция и $\inf\limits_{x,y \in A} \alpha(x,y) = \gamma_0$.

Теорема 2. *Пусть отображение f удовлетворяет следующим условиям:*
1) существует такое число $c > 0$, что для любых точек x, $y \in B_R[x_0]$ выполняется неравенство $\alpha(f(x), f(y)) + c\rho(x,y) \le \alpha(x,y)$;
2) $\alpha(x_0, f(x_0)) \le c\,R + \gamma_0$.
Тогда отображение f имеет неподвижную точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в теореме 1 рассмотрим итерационную последовательность точек, выходящую из точки x_0, то есть $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots\ x_n = f(x_{n-1}), \ldots$. Проверим, что эта последовательность определена корректно, то есть все точки $x_n \in B_R[x_0]$. Действительно,

$$\rho(x_0, x_1) \le \frac{1}{c}(\alpha(x_0,x_1) - \alpha(x_1,x_2)) \le \frac{1}{c}(\alpha(x_0,x_1) - \gamma_0) \le R,$$

то есть точка $x_1 \in B_R[x_0]$.

Пусть точки x_0, x_1, ..., x_{n-1} принадлежат шару $B_R[x_0]$. Тогда

$$\rho(x_0, x_n) \le \frac{1}{c}\Bigg(\alpha(x_0,x_1) - \alpha(x_n,x_{n+1})\Bigg) \le \frac{1}{c}\Bigg(\alpha(x_0,x_1) - \gamma_0\Bigg) \le R.$$

Как и в теореме 1 можно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся и предельная точка x_* является неподвижной точкой отображения f. Теорема доказана.

Нетрудно также сформулировать локальную теорему для обобщенного сжатия.

Следствие 2. *Пусть существуют такие числа $q > 0$ и $k \in (0,1)$ что для любых x, $y \in B_R[x_0]$ справедливы неравенства:*
(I) $\rho(x,y) \le q\,\alpha(x,y)$;
(II) $\alpha(f(x), f(y)) \le k\,\alpha(x,y)$.
Если $\alpha(x_0, f(x_0)) \le q(1-k)\,R + \gamma_0$, то отображение f имеет неподвижную точку.

2. Обобщенная теорема Немыцкого

Хорошо известна теорема Немыцкого о неподвижных точках отображений, которые на компактах удовлетворяют ослабленному условию сжатия (см., например, [6]). Рассмотрим некоторое обобщение этой теоремы.

Пусть X компактное метрическое пространство, $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}$ полунепрерывная снизу функция, $f : X \to X$ непрерывное отображение.

Теорема 3. *Если $\alpha(f(x), f(y)) < \alpha(x, y)$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, то отображение f имеет единственную неподвижную точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\beta : X \to \mathbb{R}$, $\beta(x) = \alpha(x, f(x))$. Эта функция является полунепрерывной снизу, следовательно, имеет точку минимума. Пусть точка x_* является точкой минимума. Покажем, что она является неподвижной точкой отображения f. Если $x_* \neq f(x_*)$, то в силу условий теоремы

$$\beta(f(x_*) = \alpha(f(x), f(f(x))) < \alpha(x_*, f(x_*)) = \beta(x_*),$$

то есть x_* не является точкой минимума. Полученное противоречие и доказывает, что x_* является неподвижной точкой отображения f.

Докажем единственность неподвижной точки. Пусть $x_* = f(x_*)$ и $y_* = f(y_*)$. Если $x_* \neq y_*$, то $\alpha(x_*, y_*) = \alpha(f(x_*, y_*) < \alpha(x_*, y_*)$. Следовательно, $x_* = y_*$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bessaga C.* On the convers of the Banach fixed point principle // Colloc. Math. 1959. Vol. 7. № 1. P. 41-43.

2. *Иванов А.А.* Неподвижные точки отображений метрических пространств // Записки научного семинара ЛОМИ. 1976. Т. 66. С. 5-102.

3. *Dugundji J., Granas A.* Fixed point theory. Warszawa: PWN, 1982.

4. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.

5. *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 30-44.

6. *Немыцкий В.В.* Метод неподвижных точек в анализе // Успехи математических наук. 1936. Вып. 1. С. 141-174.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.

Гельман Борис Данилович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и геометрии, e-mail: gelman@math.vsu.ru

Для цитирования: *Гельман Б.Д.* Неравенство Каристи и обобщенные сжатия (случай однозначных отображений) // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 243–249. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249

THE INEQUALITY OF KARISTI AND GENERALIZED COMPRESSION (THE CASE OF SINGULAR IMAGES)

B. D. Gel'man

Voronezh State University
1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: gelman@math.vsu.ru

Abstract. In the present paper we consider a new inequality of Carity type and prove a theorem on a fixed point. Further, relying on the theorem obtained, we study maps (generalized contractions) that compress relative to some function of two vector arguments. This function does not need to be a metric or even continuous.
Keywords: metric space; generalized compression; fixed point

REFERENCES

1. Bessaga C. On the convers of the Banach fixed point principle. *Colloc. Math.*, 1959, vol. 7, no. 1, pp. 41-43.

2. Ivanov A.A. Nepodvizhnye tochki otobrazheniy metricheskikh prostranstv [Fixed points of mappings of metric spaces]. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI – Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 66, pp. 5-102. (In Russian).

3. Dugundji J., Granas A. *Fixed point theory.* Warszawa, PWN, 1982.

4. Oben Zh.-P. *Nelineynyy analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya* [Nonlinear Analysis and Its Economic Applications]. Moscow, Mir Publ., 1988. (In Russian).

5. Arutyunov A.V. Uslovie Karisti i sushchestvovanie minimuma ogranichennoy snizu funktsii v metricheskom prostranstve. Prilozheniya k teorii tochek sovpadeniya [Caristi's condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points]. *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 30-44. (In Russian).

6. Nemytskiy V.V. Metod nepodvizhnykh tochek v analize [The method of fixed points in the analysis]. *Uspekhi matematicheskih nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1936, no. 1, pp. 141-174. (In Russian).

Received 21 March 2018
Reviewed 24 April 2018
Accepted for press 5 June 2018

Gel'man Boris Danilovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry, e-mail: gelman@math.vsu.ru

For citation: Gel'man B.D. Neravenstvo Karisti i obobshchennye szhatiya (sluchay odnoznachnyh otobrazheniy) [The inequality of Karisti and generalized compression (the case of singular images)]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 243–249. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 16-01-00677).