ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 121 2018

УДК 517.927+977

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-44-64

ОБОБЩЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **М. М. Кулманакова** [1], **В. В. Обуховский** [2], **Е. Л. Ульянова** [3]

[1] ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
394064, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

[3] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. 20 лет Октября, 84
E-mail: ulhelen@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена нелокальная граничная задача для управляемой системы с обратной связью, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением с бесконечным запаздыванием в сепарабельном банаховом пространстве. В качестве примера приведены обобщенная задача Коши и периодическая задача.

Ключевые слова: управляемая система; обратная связь; функционально-дифференциальное включение; нелокальная граничная задача; бесконечное запаздывание; мера некомпактности; уплотняющий оператор; неподвижная точка; топологическая степень

Введение

Начиная с работы P. Zecca и P.L. Zezza [1], нелокальные граничные задачи для дифференциальных включений различных типов в банаховом пространстве рассматривались при различных предположениях в целом ряде работ (см., например, [2]-[4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] и др.).

В настоящей работе мы рассматриваем граничные задачи общего вида для нового класса управляемых систем с обратной связью, описываемых полулинейными дифференциальными включениями с бесконечным запаздыванием, в которых звено обратной связи подчинено включению с невыпуклозначным оператором. Отметим, что системы

Работа В.В. Обуховского выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-51-52022, 16-01-00370, 16-01-386)

с бесконечным запаздыванием являются достаточно эффективной моделью исследования многих физических феноменов и они достаточно интенсивно изучаются в последние десятилетия (см., например, монографию [12] и имеющиеся там ссылки).

Работа имеет следующую структуру. В следующем параграфе мы приводим необходимые сведения из теории многозначных отображений и фазовых пространств бесконечных запаздываний. В параграфе 2 формулируется основная задача и обосновывается ее сведение к нахождению неподвижной точки многозначного интегрального оператора (Теорема 2.1). На этой основе приводится общий принцип существования решения рассматриваемой задачи (Теорема 2.3) и в качестве его применения рассматриваются конкретные достаточные условия существования решения (Теорема 2.4) и оптимального решения (Теорема 2.5). В последнем параграфе в качестве примеров рассматриваются частные случаи: нелокальная задача Коши и периодическая задача.

1. Предварительные сведения.

1.1. Многозначные отображения и меры некомпактности.

Нам понадобятся некоторые сведения из многозначного анализа и теории топологической степени для уплотняющих отображений (см., например, [13], [14], [15], [16], [17]).

Пусть X – метрическое пространство; $\mathcal{E}$ – нормированное пространство. Символом $P(\mathcal{E})$ обозначается совокупность всех непустых подмножеств пространства $\mathcal{E}$, $K(\mathcal{E})$ и $Kv(\mathcal{E})$ обозначают совокупности, состоящие из всех непустых компактных или, соответственно, выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathcal{E}$.

Для $\Omega \in K(\mathcal{E})$ обозначим

$$\|\Omega\| = \max\{\|\omega\| : \omega \in \Omega\}.$$

Определение 1.1. Мультиотображение $\mathcal{F}\colon X \to P(\mathcal{E})$ называется полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, если для любого открытого подмножества $W \subset \mathcal{E}$, такого что $\mathcal{F}(x) \subset W$, найдется такая окрестность $V(x)$ точки x, что $\mathcal{F}(V(x)) \subseteq W$.

Мультиотображение $\mathcal{F}$ называется полунепрерывным сверху (пн.св.), если оно полунепрерывно сверху в каждой точке пространства X.

Определение 1.2. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется компактным, если его область значений $\mathcal{F}(X)$ – относительно компактное подмножество $\mathcal{E}$. Если пн.св. мультиотображение $\mathcal{F}$ компактно на ограниченных подмножествах X, то оно называется вполне пн.св.

Пусть $(\mathcal{A}, \geq 0)$ – некоторое частично упорядоченное множество, $\mathcal{E}$ – нормированное пространство.

Определение 1.3. Отображение $\beta : P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполнено

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega).$$

Мера некомпактности β называется:

1) монотонной, если из $\Omega_1, \Omega_2 \in P(\mathcal{E})$ и $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ вытекает, что $\beta(\Omega_1) \leq \beta(\Omega_2)$;

2) несингулярной, если для любых $\Omega \in P(\mathcal{E})$, $a \in \mathcal{E}$ выполнено $\beta(\Omega \cup \{a\}) = \beta(\Omega)$;

3) инвариантной относительно объединения с компактным множеством, если для любых $\Omega \in P(\mathcal{E})$ и K – относительно компактного подмножества $\mathcal{E}$ выполнено $\beta(\Omega \cup K) = \beta(\Omega)$;

4) полуаддитивной, если $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\beta(\Omega_0), \beta(\Omega_1)\}$ для всех Ω_0, $\Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;

5) инвариантной относительно отражения в нуле, если $\beta(-\Omega) = \beta(\Omega)$ для каждого $\Omega \in P(\mathcal{E})$;

6) вещественной, если $\mathcal{A} = [0, +\infty]$ с естественным порядком и для любого ограниченного множества $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\Omega) < \infty$.

Если $\mathcal{A}$ – конус в нормированном пространстве, то МНК β называется:

7) алгебраически полуаддитивной, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для всех Ω_0, $\Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;

8) правильной (регулярной), если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

Мерой некомпактности, для которой выполнены все вышеприведенные свойства, является МНК Хаусдорфа

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon - \text{сеть}\}.$$

Пусть E – банахово пространство. Нам понадобятся следующие меры некомпактности в пространстве непрерывных функций $C([0,T]; E)$:

1) модуль равностепенной непрерывности:

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| < \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|_E;$$

2) модуль послойной некомпактности:

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0,T]} \chi_E(\Omega(t)),$$

где $\Omega(t) = \{x(t) : x \in \Omega\}$.

Эти меры некомпактности обладают всеми вышеуказанными свойствами за исключением правильности. Кроме того, если мы обозначим χ_C МНК Хаусдорфа в пространстве $C([a,b]; E)$, то мы имеем следующее соотношение (см. [17], Пример 2.1.3):

$$\varphi_C(\Omega) \leq \chi_C(\Omega). \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ – нормированные пространства с мерами некомпактности β и β' соответственно; $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ – непрерывный линейный оператор.

Определение 1.4. Оператор $\mathcal{L}$ называется (β, β')-ограниченным, если найдется $C \geq 0$ такое, что $\beta'(\mathcal{L}\Omega) \leq C\beta(\Omega)$ для всех ограниченных множеств $\Omega \subset \mathcal{E}$. Значение $\|\mathcal{L}\|^{(\beta,\beta')}$, равное точной нижней грани множества всех таких коэффициентов, называется (β, β')-нормой оператора $\mathcal{L}$.

В частности, если $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ и $\beta = \beta'$, то $\|\mathcal{L}\|^{(\beta,\beta)}$ будем обозначать как $\|\mathcal{L}\|^{(\beta)}$ и называть β-нормой оператора $\mathcal{L}$. Для вычисления χ-нормы оператора $\mathcal{L}$ мы можем применять формулу

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi)} = \chi(\mathcal{L}S) = \chi(\mathcal{L}B),$$

где S и B – единичные сфера и шар в $\mathcal{E}$, соответственно. Легко видеть, что

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi)} \leq \|\mathcal{L}\|$$

и

$$\chi(\mathcal{L}\Omega) \leq \|\mathcal{L}\|^{\chi}\chi(\Omega)$$

для любого ограниченного подмножества $\Omega \subset \mathcal{E}$.

Пусть E – банахово пространство, $\mathcal{L}\colon E \to C([a,b];E)$ – ограниченный линейный оператор и φ_C – модуль послойной некомпактности в $C([a,b];E)$.

Из (1.1) вытекает, что

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi,\varphi)} \leq \|\mathcal{L}\|^{(\chi)}. \tag{1.2}$$

Определение 1.5. (См. [18]) Непустое компактное метрическое пространство $\mathcal{A}$ называется R_δ-множеством, если существует убывающая последовательность $\{\mathcal{A}_n\}$ компактных стягиваемых множеств такая, что

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{A}_n.$$

Ясно, что компактные выпуклые или, более общо, стягиваемые множества являются примерами R_δ-множеств. В то же время, R_δ-множество может быть не стягиваемым (см. пример в [16]).

Пусть $\mathfrak{X}$ – подмножество в $\mathcal{E}$.

Определение 1.6. Пн.св. мультиотображение $\mathcal{F} : \mathfrak{X} \to K(\mathcal{E})$ называется:

(i) R_δ-мультиотображением (или J-мультиотображением), если каждое значение $\mathcal{F}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$ является R_δ-множеством;

(ii) квази-R_δ-мультиотображением (или CJ-мультиотображением), если существует нормированное пространство $\mathcal{E}_1$, R_δ-мультиотображение $\mathcal{F}_1 : \mathfrak{X} \to K(\mathcal{E}_1)$ и непрерывное отображение $\mathfrak{g} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}$ такие, что $\mathcal{F} = \mathfrak{g} \circ \mathcal{F}_1$.

Из этого определения и свойств непрерывности мультиотображений (см., например, [17]) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathfrak{X} \to K(\mathcal{E})$– квази-$R_\delta$-мультиотображения, то их сумма $\mathcal{F} + \mathcal{G} : \mathfrak{X} \to K(\mathcal{E})$,*

$$\big(\mathcal{F} + \mathcal{G}\big)(x) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{G}(x)$$

также является квази-R_δ-мультиотображением.

Пусть β – монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$, $\mathfrak{U}$ – открытое ограниченное подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \overline{\mathfrak{U}} \to K(\mathcal{E})$ – β-уплотняющее квази-R_δ-мультиотображение такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial\mathfrak{U}$, где $\partial\mathfrak{U}$ обозначает границу множества $\mathfrak{U}$. Тогда для соответствующего мультиполя $i - \mathcal{F}$ определена числовая характеристика

$$deg\,(i - \mathcal{F}, \overline{\mathfrak{U}}),$$

называемая *топологической степенью* (см. [17], Глава 3.4). Эта характеристика обладает всеми стандартными свойствами топологической степени, в частности, ее отличие от нуля влечет существование по крайней мере одной неподвижной точки $x \in \mathfrak{U}$, $x \in \mathcal{F}(x)$.

В качестве следствия этой теории топологической степени мы получаем следующий принцип неподвижной точки (см. [17], Следствие 3.4.2).

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое ограниченное подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathfrak{M} \to K(\mathfrak{M})$ – β-уплотняющее квази-R_δ-мультиотображение. Тогда $\mathcal{F}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $x_\star \in \mathfrak{M}$, $x_\star \in \mathcal{F}(x_\star)$.*

1.2. Фазовое пространство бесконечных запаздываний.

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J.K. Hale и J. Kato (см. [19], [12]). Пространство $\mathcal{B}$ будет рассматриваться как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty, 0]$ со значениями в банаховом пространстве E, наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Для любой функции $x\colon (-\infty, T] \to E$, где $T > 0$, и каждого $t \in (-\infty, T]$, x_t представляет собой функцию из $(-\infty, 0]$ в E, заданную как

$$x_t(\theta) = x(t + \theta),\ \theta \in (-\infty, 0].$$

Будет предполагаться, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

($\mathcal{B}1$) Если функция $x : (-\infty; T] \to E$ непрерывна на $[0; T]$ и $x_0 \in \mathcal{B}$, то для любого $t \in [0; T]$ выполнено

- (i) $x_t \in \mathcal{B}$;
- (ii) функция $t \mapsto x_t$ непрерывна;
- (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \le K(t) \sup\limits_{0 \le \tau \le t} \|x(\tau)\| + M(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$, где функции $K, M : [0; \infty) \to [0; \infty)$ не зависят от x, K строго положительна и непрерывна, а M локально ограничена.

($\mathcal{B}0$) Существует $l > 0$ такое, что $\|\psi(0)\|_E \le l\|\psi\|_{\mathcal{B}}$, для всех $\psi \in \mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty, 0]$ в E с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ ([12], Предложение 1.2.1).

Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие.

($\mathcal{BC}1$) Если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно (то есть равномерно на каждом компактном подмножестве $(-\infty, 0]$), то $\psi \in \mathcal{B}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Из условия ($\mathcal{BC}1$) вытекает, что банахово пространство ограниченных непрерывных функций $BC = BC((-\infty, 0]; E)$ непрерывно вложено в $\mathcal{B}$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *([12], Предложение 7.1.1).*

(i) $BC \subset \overline{C_{00}}$ *, где* $\overline{C_{00}}$ *обозначает замыкание* C_{00} *в* $\mathcal{B}$;

(ii) если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}$ *в* BC *сходится к функции* ψ *компактно на* $(-\infty, 0]$ *, то* $\psi \in \mathcal{B}$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$;

(iii) найдется константа $L > 0$ *такая, что* $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq L\|\psi\|_{BC}$ *для всех* $\psi \in BC$.

Наконец, будем предполагать выполненным следующее условие.

($\mathcal{BC}2$) Если $\psi \in BC$ и $\|\psi\|_{BC} \neq 0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \neq 0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство BC, наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ является нормированным пространством. Мы будем обозначать его $\mathcal{BC}$.

Рассмотрим следующие примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеуказанным условиям.

(1) Для $\gamma > 0$ пусть $\mathcal{B} = C_\gamma$ – пространство непрерывных функций $\varphi : (-\infty; 0] \to E$, имеющих предел $\lim\limits_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)$ и

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-\infty<\theta\leq 0} e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\|.$$

(2) (Пространства с «затухающей памятью»). Пусть $\mathcal{B} = C_\rho$ – пространство функций $\varphi : (-\infty; 0] \to E$ таких, что

   (a) φ непрерывна на $[-r; 0], r > 0$;

   (b) φ измерима по Лебегу на $(-\infty; r)$ и найдется положительная интегрируемая по Лебегу функция $\rho : (-\infty; -r) \to \mathbb{R}^+$ такая, что функция $\rho\varphi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty; r)$; более того, найдется локально ограниченная функция $P : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $\xi \leq 0$, $\rho(\xi + \theta) \leq P(\xi)\rho(\theta)$ для п.в. $\theta \in (-\infty; -r)$.

   Тогда

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \|\varphi(\theta)\| + \int\limits_{-\infty}^{-r} \rho(\theta)\|\varphi(\theta)\|d\theta.$$

Простой пример последнего пространства получается, если положить $\rho(\theta) = e^{\mu\theta}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Основной результат.

Пусть E – сепарабельное банахово пространство. Обозначим символом $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x:(-\infty;T]\to E$, наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \|x\mid_{[0;T]}\|_C,$$

где последняя норма – обычная $\sup$-норма пространства $C([0;T];E)$.

Мы будем рассматривать следующую управляемую систему, описываемую полулинейным функционально-дифференциальным включением с бесконечным запаздыванием в E:

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t,x_t) + Bu(t), \qquad t\in[0,T], \tag{2.1}$$

удовлетворяющую условию обратной связи

$$u \in \Psi x. \tag{2.2}$$

Здесь линейный оператор $A: D(A)\subset E\to E$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы e^{At}, $F:[0,T]\times\mathcal{BC}\multimap E$ – многозначная нелинейность, u – непрерывная функция из $[0,T]$ в банахово пространство управлений E_1, $\Psi\colon \mathcal{C}((-\infty;T];E)\to K(C([0,T];E_1))$ – мультиотображение обратной связи, $B\colon E_1\to E$ – ограниченный линейный оператор.

Относительно мультиотображения Ψ мы будем предполагать, что

(Ψ) естественно определенное мультиотображение

$$B\Psi:\mathcal{C}((-\infty;T];E)\to K(C([0,T];E)$$

является вполне пн.св. и квази-R_δ.

З а м е ч а н и е 2.1. Из результатов о топологической структуре и непрерывной зависимости от параметров множества решений дифференциального включения (см., например, [17], Глава 5) вытекает, что условие (Ψ) выполнено, если функция управления $u(t)$ удовлетворяет параметризованному полулинейному дифференциальному включению в пространстве E_1 вида

$$\begin{cases} u'(t)\in\mathfrak{A}u(t)+\mathfrak{F}(t,u(t),x) & t\in[0,T],\\ u(0)=u_0\in E_1, \end{cases}$$

где $\mathfrak{A}$ порождает C_0-полугруппу в E_1 и мультиотображение

$$\mathfrak{F}:[0,T]\times E_1\times\mathcal{C}((-\infty;T];E)\to Kv(E_1)$$

удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и χ-регулярности по второму аргументу равномерно относительно x.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пара функций $x\in\mathcal{C}((-\infty;T];E)$ и $u\in C([0,T];E_1)$ образуют интегральное решение системы (2.1)–(2.2), если функция x при $t\in[0,T]$ имеет вид

$$x\,(t) = e^{At}x\,(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\left[f\,(s) + Bu(s)\right]ds,$$

где функция u удовлетворяет (2.2) и $f \in L^1([0,T];E)$ – измеримое сечение мультифункции $t \multimap F(t, x_t)$. Функция x называется траекторией системы, а функция u – соответствующее управление.

Мы будем изучать задачу существования траекторий системы (2.1)–(2.2), удовлетворяющих следующему общему граничному условию:

$$\mathcal{Q}x \in \mathcal{S}x, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to \mathcal{BC}$ – линейный ограниченный оператор, а мультиотображение $\mathcal{S} : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to K(\mathcal{BC})$ вполне пн. св. квази- R_δ -мультиоператор.

Будем предполагать, что мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$, удовлетворяет следующим условиям:

($F1$) для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot,\psi) : [0;T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

($F2$) для п.в. $t \in [0;T]$ мультиотображение $F(t,\cdot) : \mathcal{BC} \to Kv(E)$ пн.св.;

($F3$) для любого $r > 0$ найдется функция $\alpha_r \in L^1_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,\psi)\|_E := \sup\{\|z\|_E : z \in F(t,\psi)\} \le \alpha_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \le r$;

($F4$) существует функция $k \in L^1_+[0,T]$ такая, что для каждого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{BC}$ выполнено

$$\chi(F(t,\Omega)) \le k(t)\varphi(\Omega)$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где χ – МНК Хаусдорфа в E и $\varphi(\Omega)$ – модуль послойной некомпактности множества Ω.

Из условий $(F1) - (F3)$ и $(\mathcal{B}1)$ вытекает, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to P(L^1([0,T];E))$, заданный как

$$\mathcal{P}_F(x) = \{f \in L^1([0,T];E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ п.в. } t \in [0,T]\}$$

корректно определен (см., например, [14], [17]).

О п р е д е л е н и е 2.2. Линейный оператор $G : L^1([0,T];E) \to \mathcal{C}((-\infty;T];E)$, заданный как

$$Gf(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds, & t \in [0;T]; \\ 0, & t \in (-\infty;0], \end{cases}$$

называется оператором Коши.

Используя [17], Лемма 4.2.1, Теорема 5.1.1 и Следствие 5.1.2 можно установить следующее свойство оператора Коши.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Композиция* $G \circ \mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to Kv(\mathcal{C}((-\infty;T];E))$ *является пн.св. мультиотображением с выпуклыми компактными значениями.*

Обозначим $\mathcal{C}_0$ подпространство $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$, состоящее из функций, имеющих на $[0,T]$ вид

$$x(t) = e^{At}x(0), \;\; t \in [0,T]$$

и обозначим $\mathcal{Q}_0$ сужение $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{C}_0$.

Основным требованием на граничные операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ будет следующее условие:

($\mathcal{QS}$) существует непрерывный линейный оператор $\Lambda : \mathcal{BC} \to \mathcal{C}_0$ такой, что

$$(I - \mathcal{Q}_0\Lambda)(y - \mathcal{Q}G[f + Bu]) = 0$$

для каждых $x \in \mathcal{C}((-\infty,T];E)$, $y \in \mathcal{S}(x)$, $f \in \mathcal{P}_F(x)$ и $u \in \Psi x$.

Для того, чтобы привести пример выполнения данного условия, рассмотрим линейный ограниченный оператор $r : \mathcal{BC} \to \mathcal{C}_0$, который определим как

$$(rc)(t) = \begin{cases} c(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}c(0), & t \in [0;T]. \end{cases}$$

Предположим следующее:

($\widetilde{\mathcal{Q}}$) линейный ограниченный оператор $\widetilde{\mathcal{Q}} : \mathcal{BC} \to \mathcal{BC}$, определенный как $\widetilde{\mathcal{Q}}c = \mathcal{Q}(rc)$ является обратимым.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия ($\widetilde{\mathcal{Q}}$) оператор Λ можно задать явным образом:

$$\Lambda c = r[\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}(c)].$$

В предположении, что выполнено условие ($\mathcal{QS}$), рассмотрим мультиоператор

$$\Gamma : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to K(\mathcal{C}((-\infty;T];E)),$$

заданный следующим образом:

$$\Gamma(x) = \Lambda\mathcal{S}(x) + (I - \Lambda\mathcal{Q})G[\mathcal{P}_F(x) + B\Psi(x)].$$

Из Предложений 1.1, 2.1 и условий, наложенных на операторы $\mathcal{Q}, \mathcal{S}, B, \Psi$ и Λ вытекает, что мультиоператор Γ является квази-R_δ. Нетрудно проверить, что мультиоператор Γ ограничен, то есть переводит ограниченные множества в ограниченные.

Основное свойство мультиоператора Γ характеризуется следующим утверждением.

Теорема 2.1. *Каждая неподвижная точка* Γ, *то есть функция* $x(\cdot)$, *удовлетворяющая соотношению*

$$x = \Lambda z + (I - \Lambda\mathcal{Q})G\,(f + Bu) \tag{2.4}$$

для некоторых $z \in \mathcal{S}(x)$, $f \in \mathcal{P}_F(x)$ *и* $u \in \Psi(x)$ *вместе с функцией и образуют интегральное решение задачи* (2.1)–(2.3).

Обратно, при условии ($\widetilde{\mathcal{Q}}$), *если* x *и* u *– траектория и соответствующее управление для задачи* (2.1)–(2.3), *то функция* x *удовлетворяет (2.4) для* $z = \mathcal{Q}x \in \mathcal{S}(x)$ *и* $f \in \mathcal{P}_F(x)$, *то есть* x *является неподвижной точкой мультиоператора* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Поскольку функция x может быть представлена в виде

$$x = \Lambda\,(z - \mathcal{Q}G(f+Bu)) + G(f+Bu),$$

мы получаем, что x и u образуют интегральное решение задачи (2.1)–(2.2).

Проверим выполнение граничного условия. Используя условие ($\mathcal{QS}$), мы получаем

$$\mathcal{Q}x = \mathcal{Q}_0\Lambda z + \mathcal{Q}\,(I - \Lambda\mathcal{Q})\,G(f+Bu) = z - (z - \mathcal{Q}_0\Lambda z) + \mathcal{Q}G(f+Bu) + \mathcal{Q}_0\Lambda\mathcal{Q}G(f+Bu)$$

$$= z - (I - \mathcal{Q}_0\Lambda)\,(z - \mathcal{Q}G(f+Bu)) = z \in \mathcal{S}x.$$

(ii) Пусть теперь x и u – интегральное решение задачи (2.1)–(2.2). Тогда функция x удовлетворяет соотношению

$$x = r(\psi) + G(f+Bu)$$

для некоторого $f \in \mathcal{P}_F(x)$, где $\psi = x|_{(-\infty,0]}$. Тогда

$$\mathcal{Q}x = \widetilde{\mathcal{Q}}(\psi) + \mathcal{Q}G(f+Bu),$$

откуда мы получаем

$$\psi = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\big(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f+Bu)\big)$$

и следовательно

$$r(\psi) = \Lambda\big(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f+Bu)\big).$$

Таким образом

$$x = \Lambda\big(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f+Bu)\big) + G(f+Bu) =$$
$$= \Lambda\mathcal{Q}x + (I - \Lambda\mathcal{Q})G(f+Bu) \in \Gamma(x).$$

$\square$

Покажем теперь, что при некоторых дополнительных ограничениях мультиоператор Γ является уплотняющим.

Рассмотрим МНК ν на пространстве $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$:

$$\nu(\Omega) = (\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega), \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(\Omega)),$$

где $\varphi_{\mathcal{C}}$ – модуль послойной некомпактности, а $\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}$ – модуль равностепенной непрерывности в пространстве $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$.

Отметим, что

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \sup_{0\le t\le T} \varphi_{\mathcal{BC}}(\Omega_t),$$

где $\Omega_t \subset \mathcal{BC}$, $\Omega_t = \{x_t : x \in \Omega\}$ и для $t \in [0,T]$:

$$\varphi_{\mathcal{BC}}(\Omega_t) = \sup_{-\infty\le\tau\le 0} \chi(\Omega_t(\tau)) = \sup_{-\infty\le\tau\le 0} \chi(\Omega(t+\tau)) = \sup_{-\infty\le\tau\le t} \chi(\Omega(\tau)),$$

где χ – МНК Хаусдорфа в E.

Обозначим $\widetilde{\mathcal{C}}$ подпространство $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$, состоящее из функций, равных нулю на $(-\infty;0]$. Ясно, что $\widetilde{\mathcal{C}}$ изоморфно пространству $C([0,T];E)$.

Обозначим

$$d = \sup_{0\le t\le T} \|e^{At}\|^{(\chi)}.$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

$(H1)$ *найдется* $b \geq 0$ *такое, что для любого ограниченного множества* $\Omega \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ *выполнено*
$$\varphi_{\mathcal{BC}}(\mathcal{Q}\Omega) \leq b\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega);$$

$(H2)$ *для любой относительно компактной последовательности* $\{y_n\} \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ *последовательность* $\{\Lambda\mathcal{Q}y_n\}$ *равностепенно непрерывна;*

$(H3)$ $d \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \int\limits_0^t k(s)ds < \frac{1}{1+\|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}},\varphi_{\mathcal{C}})}b}$ *, где* $k(\cdot)$ *– функция из условия (F4).*

Тогда мультиоператор Γ *является* ν*-уплотняющим на ограниченных подмножествах пространства* $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим мультиоператор Γ в виде суммы
$$\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) + \Gamma_3(x),$$
где $\Gamma_1(x) = \Lambda\mathcal{S}(x)$, $\Gamma_2(x) = (I - \Lambda\mathcal{Q})G\mathcal{P}_F(x)$ и $\Gamma_3(x) = (I - \Lambda\mathcal{Q})GB\Psi(x)$. В силу условий, наложенных на мультиотображения $\mathcal{S}$ и $B\Psi$, мультиоператоры Γ_1 и Γ_3 являются вполне пн.св. Тогда нетрудно видеть, что проверка утверждения теоремы сводится к ν-уплотняемости мультиоператора Γ_2, которая следует из [3], Теорема 2.4 (см. также [4], Теорема 3.15). □

З а м е ч а н и е 2.2. Отметим, что условие $(H3)$ выполнено, если, в частности, полугруппа e^{At} компактна (в этом случае $d = 0$) или мультиотображение F вполне пн.св. по второму аргументу ($k = 0$).

Установленные свойства мультиоператора Γ дают возможность применять для его исследования теорию топологической степени. Мы можем сформулировать следующий общий принцип существования интегральных решений задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 2.3. *При указанных выше условиях, пусть ограниченное открытое множество* $\Omega \subset \mathcal{C}((-\infty;T];E)$ *не имеет траекторий задачи* (2.1)-(2.3) *на* $\partial\Omega$ *и пусть*
$$deg(i - \Gamma, \overline{\Omega}) \neq 0.$$
Тогда множество интегральных решений $\{x, u\}$ *задачи* (2.1)–(2.3) *таких, что* $x \in \Omega$*, не пусто.*

В качестве примера применения этого принципа рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 2.4. *При указанных выше условиях предположим дополнительно, что*

$(H4)$ *найдется последовательность функций* $\omega_n \in L^1_+[0;T]$, $n = 1, 2, \ldots$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^T \omega_n(t)dt = 0$$

и

$$\sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}} \le n} \|F(t,\psi)\| \le \omega_n(t), \qquad \text{для п.в. } t \in [0;T];$$

$(H5)$ *выполнены следующие асимптотические условия:*

$$\liminf_{\|x\|_{\mathcal{C}}\to\infty} \frac{\|\mathcal{S}(x)\|_{\mathcal{B}}}{\|x\|_{\mathcal{C}}} = \liminf_{\|x\|_{\mathcal{C}}\to\infty} \frac{\|B\Psi(x)\|_C}{\|x\|_{\mathcal{C}}} = 0.$$

Тогда множество интегральных решений задачи (2.1)-(2.3) *не пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что существует замкнутый шар

$$B_R \subset \mathcal{C}((-\infty;T];E)$$

такой, что $\Gamma(B_R) \subseteq B_R$. В предположении противного мы найдем последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$ такие, что $y_n \in \Gamma(x_n)$, $\|x_n\|_{\mathcal{C}} \le n$, $\|y_n\|_{\mathcal{C}} > n$. В силу ограниченности мультиоператора Γ мы можем считать, без ущерба для общности, что $\|x_n\|_{\mathcal{C}} \to \infty$.

Получаем оценку

$$\|y_n\|_{\mathcal{C}} \le \|\Lambda z_n\|_{\mathcal{C}} + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\| \; \|G(f_n + B\Psi(x_n))\|_{\mathcal{C}},$$

где $z_n \in \mathcal{S}x_n$ и $f_n \in \mathcal{P}_F(x_n)$.

Далее получаем

$$\|y_n\|_{\mathcal{C}} \le \|\Lambda\| \, \|z_n\|_{\mathcal{B}} + \|I - \Lambda\mathcal{Q}\| \; \|G(f_n + B\Psi(x_n))\|_C,$$

где $\|\cdot\|_C$ обозначает норму функции в пространстве $C([0,T];E)$.

Поскольку e^{At} – сильно непрерывная полугруппа, имеем для нее оценку

$$\|e^{At}\| \le Me^{\gamma t}, \quad t \ge 0$$

для некоторых констант $M \ge 1$, $\gamma \ge 0$.

Следовательно

$$\|y_n\|_{\mathcal{C}} \le \|\Lambda\|\|z_n\|_{\mathcal{B}} + Me^{\gamma T}\|I - \Lambda\mathcal{Q}\| \int_0^T \|\left(f_n(s) + B\Psi(x_n)(s)\right)\| ds \le$$

$$\le \|\Lambda\|\|z_n\|_{\mathcal{B}} + Me^{\gamma T}\|I - \Lambda\mathcal{Q}\| \Big(\int_0^T \omega_n(s)ds + T\|B\Psi(x_n)\|_C \Big).$$

Тогда

$$1 < \frac{\|y_n\|_{\mathcal{C}}}{n} \leq \|\Lambda\| \frac{\|z_n\|_{\mathcal{B}}}{n} + Me^{\gamma T}\|I - \Lambda \mathcal{Q}\| \Big(\frac{1}{n} \int\limits_0^T \|f_n(s)\| ds + T \frac{\|B\Psi(x_n)\|_C}{n} \Big) \leq$$

$$\leq \|\Lambda\| \frac{\|z_n\|_{\mathcal{B}}}{n} + Me^{\gamma T}\|I - \Lambda \mathcal{Q}\| \Big(\frac{1}{n} \int\limits_0^T \omega_n(s) ds + T \frac{\|B\Psi(x_n)\|_C}{\|x_n\|_{\mathcal{C}}} \Big),$$

что противоречит предположениям $(H4)$ и $(H5)$.

Для завершения доказательства остается применить Предложение 1.2. □

В случае, когда мультиотображения F, $\mathcal{S}$ и $B\Psi$ глобально ограничены, последнее утверждение влечет следующий оптимизационный результат.

Теорема 2.5. *При условии* $(\widetilde{\mathcal{Q}})$, *пусть найдется функция* $\omega \in L^1_+[0;T]$ *и константы* $s > 0$ *и* $a > 0$ *такие, что*

$(G1)$ *для любого* $\psi \in \mathcal{BC}$ *выполнено* $\|F(t,\psi)\|_E \leq \omega(t)$ *для п.в.* $t \in (0,T)$;

$(G2)$ *для любого* $x \in \mathcal{C}((-\infty;T];E)$ *выполнено* $\|\mathcal{S}(x)\|_{\mathcal{B}} \leq s$ *и* $\|B\Psi(x)\|_C \leq a$.

Тогда существует такое интегральное решение $\{x_\star, u_\star\}$ *задачи* (2.1)–(2.3), *что*

$$\phi(x_\star) = \inf\{\phi(x) : x \in \Sigma\},$$

где Σ *обозначает множество всех траекторий задачи* (2.1)–(2.3) *и* ϕ *– данный полунепрерывный снизу функционал на пространстве* $\mathcal{C}((-\infty;T];E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно Теореме 2.1 множество Σ совпадает с множеством всех неподвижных точек мультиоператора Γ, которое непусто согласно Теореме 2.4. Более того, нетрудно видеть, что это множество априори ограничено константой

$$\|\Lambda\| s + Me^{\gamma T}\|I - \Lambda \mathcal{Q}\| \Big(\int_0^T \omega(s) ds + Ta \Big).$$

Теперь заключение теоремы следует из того факта, что ограниченное множество неподвижных точек уплотняющего мультиоператора компактно ([17], Предложение 3.5.1).

□

3. Некоторые частные случаи.

3.1. Нелокальная задача Коши.

Рассмотрим управляемую систему (2.1)–(2.2) с граничным условием

$$x_0 \in \mathcal{S}(x), \tag{3.1}$$

где мультиотображение $\mathcal{S} : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to K(\mathcal{BC})$, как и ранее, вполне пн.св. квази-R_δ-мультиоператор.

В данном случае $\mathcal{Q}x = x_0$ и оператор $\widetilde{\mathcal{Q}}$ тождественен, таким образом, условие $(\widetilde{\mathcal{Q}})$ выполнено и, более того, оператор Λ совпадает с r. Условие $(H1)$ выполнено с константой $b = 0$, а условие $(H2)$ выполнено, так как для любой последовательности $\{y_n\} \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ последовательность $\{\Lambda\mathcal{Q}y_n\}$ постоянна и равна нулю.

Тогда условие $(H3)$ приобретает следующий вид

$$(H3') \qquad d \sup_{0\le t\le T} \int_0^t k(s)ds < 1,$$

Из Теоремы 2.4 мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *При условиях* $(A), (F1), (F2), (F4), (\Psi), (H3'), (H4), (H5)$ *существует интегральное решение задачи Коши* (2.1), (2.2), (3.1).

Применение Теоремы 2.5 дает следующее утверждение.

Теорема 3.2. *При условиях* $(A), (F1), (F2), (F4), (\Psi), (H3'), (G1), (G2)$ *существует такое интегральное решение* $\{x_\star, u_\star\}$ *задачи Коши* (2.1), (2.2), (3.1), *что*

$$\phi(x_\star) = \inf\{\phi(x) : x \in \Sigma_0\},$$

где Σ_0 *обозначает множество всех траекторий задачи Коши* (2.1), (2.2), (3.1) *и* ϕ *– данный полунепрерывный снизу функционал на пространстве* $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$.

3.2. Периодическая задача.

Периодическая задача для системы (2.1)–(2.2) может быть записана в виде граничного условия

$$\mathcal{Q}x = 0, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{Q}x = x_T - x_0$. Заметим, что из условия $(\mathcal{B}1(iii))$ вытекает, что $\mathcal{Q}$ – непрерывный линейный оператор.

Будем предполагать выполненным следующее условие:

$(A1)$ линейный оператор $(e^{AT} - I)$ обратим.

В данной задаче, учитывая, что $\mathcal{S}x \equiv 0$, достаточно построить оператор Λ на подпространстве $\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{BC}$. Заметим, что подпространство $\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$ в нашем случае состоит из непрерывных функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$, равных нулю на $(-\infty, -T]$. Достаточно естественно предполагать, что

$(\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}})$ любое множество $\Delta \subset \mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$, ограниченное относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, равномерно ограничено.

Пусть теперь $\psi \in \mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$ – заданная функция, найдем функцию $\xi \in \mathcal{BC}$ такую, что $\widetilde{\mathcal{Q}}\xi = \psi$, где, как и прежде, $\widetilde{\mathcal{Q}}\xi = \mathcal{Q}(r\xi)$. Имеем

$$(r\xi)_T - (r\xi)_0 = (r\xi)_T - \xi = \psi, \tag{3.3}$$

откуда

$$\xi(0) = (e^{AT} - I)^{-1}\psi(0),$$

и далее для $\theta \in [-T, 0]$:

$$\xi(\theta) = e^{A(T+\theta)}\xi(0) - \psi(\theta) = e^{A(T+\theta)}(e^{AT} - I)^{-1}\psi(0) - \psi(\theta). \tag{3.4}$$

Если же теперь $\theta < -T$, то из (3.3) получаем

$$(r\xi)_T(\theta) - \xi(\theta) = \xi(T+\theta) - \xi(\theta) = 0,$$

то есть функция ξ является T-периодической на $(-\infty, 0]$ и ее значения полностью определяются формулой (3.4). Таким образом мы построили оператор, обратный к $\widetilde{\mathcal{Q}}$ на $\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$.

Пусть некоторое множество функций $\Pi \subset \mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$ ограничено относительно $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Тогда, применяя свойство $(\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}})$, мы видим из формулы (3.4), что соответствующее семейство функций $\Xi = \{\xi = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\psi : \psi \in \Pi\}$ равномерно ограничено на $(-\infty, 0]$, а значит, по Теореме 1.1 (iii) ограничено и в пространстве $\mathcal{BC}$. Это означает, что оператор $\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}$ непрерывен на $\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$.

Оператор Λ на $\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$ может быть задан в явном виде:

$$(\Lambda\psi)(t) = \begin{cases} [e^{A(T+t)}(e^{AT} - I)^{-1}\psi(0) - \psi(t)]_T & t \in [-\infty, 0]; \\ e^{At}(e^{AT} - I)^{-1}\psi(0), & t \in [0; T], \end{cases}$$

где $[\cdot]_T$ обозначает T-периодическое продолжение на $[-\infty, 0]$ функции, заданной на $[-T, 0]$.

Нетрудно видеть, что условие $(H1)$ в нашем случае выполнено с константой $b = 1$.

Пусть, далее, $\{y_n\} \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ – относительно компактная последовательность, тогда последовательность $\{\psi_n\} \subset \mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$, $\psi_n = \mathcal{Q}y_n = (y_n)_T$, равностепенно непрерывна и $\{\psi_n(0)\}$ – относительно компактное подмножество E. Но тогда из задания оператора Λ видно, что и последовательность $\{\Lambda\psi_n\}$ равностепенно непрерывна, что означает выполнение условия $(H2)$.

Отметим теперь, что $(\varphi_{\mathcal{BC}})$-норма оператора $\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}$ на $\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}}$ может быть оценена следующим образом:

$$\|\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}})} \leq d\,\|(e^{TA} - I)^{-1}\|^{(\chi)} + 1.$$

В то же время нетрудно видеть, что $(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})$-норма оператора r допускает следующую оценку:

$$\|r\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})} \leq d.$$

Это означает, что

$$\|\Lambda\|^{(\varphi_{\mathcal{BC}}, \varphi_{\mathcal{C}})} \leq d\big(d\,\|(e^{TA} - I)^{-1}\|^{(\chi)} + 1\big)$$

Тогда условие $(H3)$ может быть записано в виде

$$(H3'') \qquad d \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t k(s)ds < \frac{1}{1 + d\big(d\,\|(e^{TA} - I)^{-1}\|^{(\chi)} + 1\big)}$$

Мультиоператор Γ в случае периодической задачи имеет вид

$$\Gamma(x) = (I - \Lambda\mathcal{Q})G\big(\mathcal{P}_F(x) + B\Psi(x)\big).$$

Для его задания в явном виде заметим, что для $f \in \mathcal{P}_F(x)$ и $u \in \Psi(x)$ имеем

$$\mathcal{Q}G(f + Bu)(t) = \int\limits_0^{T+t} e^{A(T+t-s)}(f(s) + Bu(s))ds, \qquad t \in [-T, 0].$$

Таким образом $\Gamma(x)$ состоит из всех функций $y \in \mathcal{C}((-\infty; T]; E)$, которые для $f \in \mathcal{P}_F(x)$ и $u \in \Psi(x)$ при $t \in [-\infty, 0]$ имеют вид

$$y(t) = \Big[\int\limits_0^{T+t} e^{A(T+t-s)}(f(s) + Bu(s))ds$$

$$-e^{A(T+t)}(e^{AT} - I)^{-1} \int\limits_0^{T} e^{A(T-s)}(f(s) + Bu(s))ds\Big]_T,$$

а при $t \in [0, T]$:

$$y(t) = \int\limits_0^{t} e^{A(t-s)}(f(s) + Bu(s))ds - e^{At}(e^{AT} - I)^{-1} \int\limits_0^{T} e^{A(T-s)}(f(s) + Bu(s))ds$$

(см.[17]).

Применение Теоремы 2.4 дает следующее утверждение.

Теорема 3.3. *При выполнении условий* (A), $(A1)$, $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, (Ψ), $(H3'')$, $(H4)$, $(H5)$ *(для* $B\Psi$ *) и* $(\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}})$ *периодическая задача* (2.1), (2.2) *и* (3.2) *имеет интегральное решение.*

Из Теоремы 2.5 получаем:

Теорема 3.4. *При выполнении условий* (A), $(A1)$, $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, (Ψ), $(H3'')$, $(G1)$, $(G2)$ *(для* $B\Psi$ *) и* $(\mathcal{Q}\widetilde{\mathcal{C}})$ *существует такое интегральное решение* $\{x_\star, u_\star\}$ *периодической задачи* (2.1), (2.2) *и* (3.2), *что*

$$\phi(x_\star) = \inf\{\phi(x) : x \in \Sigma_T\},$$

где Σ_T *обозначает множество всех траекторий периодической задачи* (2.1), (2.2), (3.2) *и* ϕ *– данный полунепрерывный снизу функционал на пространстве* $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zecca P., Zezza P.* Nonlinear boundary value problems in Banach spaces for multivalued differential equations on a non-compact interval // Nonlinear Anal. 1979. Vol. 3. P. 374–352.

2. *Басова М.М., Обуховский В.В.* О некоторых краевых задачах для функционально-дифференциальных включений в банаховых пространствах // Современная математика. Фундаментальные направления. М., 2006. Т. 15. С. 36–44.

3. *Басова М.М., Обуховский В.В.* Общая краевая задача для функционально-дифференциальных включений с бесконечным запаздыванием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. Воронеж, 2007. № 1. С. 121–129.

4. *Басова М.М., Обуховский В.В.* Топологические методы в краевых задачах для дифференциальных включений. Саарбрюккен, 2011. 104 с.

5. *Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.* On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space // J. Funct. Spaces. 2015. Art. ID 651359. 10 p.

6. *Ding Z., Kartsatos A.G.* Nonresonance problems for differential inclusions in separable Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. № 124. P. 2357–2365.

7. *Kravvaritis D., Papageorgiou N.S.* A boundary value problem for a class of evolution inclusions // Comment. Math. Uni St. Paul. 1991. Vol. 40. № 1. P. 29–37.

8. *Marino G.* Nonlinear boundary value problems for multivalued differential equations in Banach spaces // Nonlinear Anal. 1990. Vol. 14. P. 545–558.

9. *Obukhovskii V., Zecca P.* On boundary value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces // Abstract and Applied Anal. 2003. Vol. 13. P. 769–784.

10. *Papageorgiou N.S.* Boundary value problems for evolution inclusions // Comment. Math. Uni Carolin. 1988. Vol. 29. № 2. P. 355–363.

11. *Papageorgiou N.S.* Boundary value problems and periodic solutions for semilinear evolution inclusions // Comment. Math. Uni Carolin. 1994. Vol. 35. P. 325–336.

12. *Hito Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1991. 327 p.

13. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.

14. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 228 с.

15. *Arutyunov A.V., Obukhovskii V.* Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics. Berlin: De Gruyter, 2017. 210 p.

16. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Second edition. Dordrecht: Springer, 2006. 538 p.

17. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001. 231 p.

18. *Hyman D.M.* On decreasing sequences of compact absolute retracts // Fund. Math. 1976. Vol. 64. P. 91–97.

19. *Hale J.K., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // Funkc. Ekvac. 1978. Vol. 21. P. 11–41.

Поступила в редакцию 24 января 2018 г.
Прошла рецензирование 06 февраля 2018 г.
Принята в печать 20 февраля 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Кулманакова Марина Михайловна, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Обуховский Валерий Владимирович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Ульянова Елена Леонидовна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: ulhelen@mail.ru

Для цитирования: *Кулманакова М.М., Обуховский В.В., Ульянова Е.Л.* Обобщенная граничная задача для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 44–64. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-44-64

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-44-64

A GENERALIZED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FEEDBACK CONTROL SYSTEM WITH INFINITE DELAY

© M. M. Kulmanakova [1], V. V. Obukhovskii [2], E. L. Ulianova [3]

[1] N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy
54A Staryih bolshevikov St., Voronezh 394064, Russian Federation
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
[2] Voronezh State Pedagogical University
86 Lenina St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
[3] Voronezh State Technical University
84, 20letiya Oktyabrya St., Voronezh 394006, Russian Federation
E-mail: ulhelen@mail.ru

Abstract. We consider a non-local boundary value problem for a feedback control system governed by a semilinear functional differential inclusion with infinite delay in a separable Banach space. As example we present a generalized Cauchy problem and periodic problem.
Keywords: control system; feedback; functional differential inclusion; non-local boundary value problem; infinite delay; measure of noncompactness; condensing operator; fixed point; topological degree

REFERENCES

1. Zecca P., Zezza P. Nonlinear boundary value problems in Banach spaces for multivalued differential equations on a non-compact interval. *Nonlinear Anal.*, 1979, vol. 3, pp. 374–352.

2. Basova M.M., Obukhovskiy V.V. O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniy v banakhovykh prostranstvakh [About some boundary problems for functional-differential inclusions in banach spaces]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya – Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 15, pp. 36–44. (In Russian).

3. Basova M.M., Obukhovskiy V.V. Obshchaya kraevaya zadacha dlya funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniy s beskonechnym zapazdyvaniem [Boundary value problem for functional differential inclusions with infinite delay]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2007, no. 1, pp. 121–129. (In Russian).

4. Basova M., Obukhovskiy V. Topologicheskie metody v kraevykh zadachakh dlya differentsial'nykh vklyucheniy [Topological Methods in Boundary Value Problems for Differential Inclusions]. Saarbrücken, 2011, 104 p. (In Russian).

5. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space. *J. Funct. Spaces*, 2015, Art. ID 651359, 10 p.

The work of V.V. Obukhovskii is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-51-52022, 16-01-00370, 16-01-00386)

6. Ding Z., Kartsatos A.G. Nonresonance problems for differential inclusions in separable Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, no. 124, pp. 2357–2365.

7. Kravvaritis D., Papageorgiou N.S. A boundary value problem for a class of evolution inclusions. *Comment. Math. Uni St. Paul.*, 1991, vol. 40, no. 1, pp. 29–37.

8. Marino G. Nonlinear boundary value problems for multivalued differential equations in Banach spaces. *Nonlinear Anal.*, 1990, vol. 14, pp. 545–558.

9. Obukhovskii V., Zecca P. On boundary value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces. *Abstract and Applied Anal.*, 2003, vol. 13, pp. 769–784.

10. Papageorgiou N.S. Boundary value problems for evolution inclusions. *Comment. Math. Uni Carolin.*, 1988, vol. 29, no. 2, pp. 355–363.

11. Papageorgiou N.S. Boundary value problems and periodic solutions for semilinear evolution inclusions. *Comment. Math. Uni Carolin.*, 1994, vol. 35, pp. 325–336.

12. Hito Y., Murakami S., Naito T. *Functional Differential Equations with Infinite Delay. Lecture Notes in Mathematics.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1991, 327 p.

13. Borisovich Y.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V.. Topologicheskie metody v teorii nepodvizhnykh tochek mnogoznachnykh otobrazheniy [Topological methods in the theory of fixed points of multivalued maps]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, no. 1, pp. 59–126. (In Russian).

14. Borisovich Y.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions]. Moscow, Book House «LIBROKOM», 2011, 228 p. (In Russian).

15. Arutyunov A.V., Obukhovskii V. *Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics.* Berlin, De Gruyter, 2017, 210 p.

16. G'orniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Second edition. Dordrecht, Springer, 2006, 538 p.

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2001, 231 p.

18. Hyman D.M. On decreasing sequences of compact absolute retracts. *Fund. Math.*, 1976, vol. 64, pp. 91–97.

19. Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkc. Ekvac.*, 1978, vol. 21, pp. 11–41.

Received 24 January 2018
Reviewed 06 February 2018
Accepted for press 20 February 2018
There is no conflict of interests.

Kulmanakova Marina Mikhailovna, N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Obukhovskii Valerii Vladimirovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Ulianova Elena Leonidovna, Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, e-mail: ulhelen@mail.ru

For citation: Kulmanakova M.M., Obukhovskii V.V., Ulianova E.L. Obobshchennaya granichnaya zadacha dlya upravlyaemoi sistemy s obratnoi svyazyu i beskonechnym zapazdyvaniem [A generalized boundary value problem for a feedback control system with infinite delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 44–64. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-44-64 (In Russian, Abstr. in Engl.).