Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362
УДК 517.922, 517.988

О задаче Коши для неявных дифференциальных уравнений высших порядков

Арам Владимирович АРУТЮНОВ[1] ,
Елена Александровна ПЛУЖНИКОВА[2]
[1] ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Статья посвящена исследованию неявных дифференциальных уравнений на основе утверждений о накрывающих отображениях произведений метрических пространств. Сначала рассмотрена система уравнений

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\Phi_i : X_i \times X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_i$, $y_i \in Y_i$, X_i и Y_i — метрические пространства, $i = \overline{1,n}$. Предполагается, что отображение Φ_i является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по каждому из остальных аргументов начиная со второго. Получены условия разрешимости этой системы и оценки расстояния от произвольного заданного элемента $x_0 \in X$ до множества решений. Далее в статье получено утверждение о действии оператора Немыцкого в пространствах суммируемых функций и установлена взаимосвязь свойств накрывания оператора Немыцкого и накрывания порождающей его функции. Перечисленные результаты применены к исследованию системы неявных дифференциальных уравнений, для которой доказано утверждение о локальной разрешимости задачи Коши с ограничениями на производную решения. Такие задачи возникают, в частности, в моделях управляемых систем. В заключительной части статьи аналогичными методами исследовано дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной. Получены условия существования решения задачи Коши.

Ключевые слова: неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения высших порядков, задача Коши, накрывающее отображение, метрическое пространство, оператор Немыцкого, функциональное пространство

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20131).

Для цитирования: *Арутюнов А.В., Плужникова Е.А.* О задаче Коши для неявных дифференциальных уравнений высших порядков // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 348–362. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362

On the Cauchy problem for implicit differential equations of higher orders

Aram V. ARUTYUNOV[1] **, Elena A. PLUZHNIKOVA**[2]

[1] Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklouho-Maclay St., Moscow 117198, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to the study of implicit differential equations based on statements about covering mappings of products of metric spaces. First, we consider the system of equations

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \dots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1,n},$$

where $\Phi_i : X_i \times X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_i$, $y_i \in Y_i$, X_i and Y_i are metric spaces, $i = \overline{1,n}$. It is assumed that the mapping Φ_i is covering in the first argument and Lipschitz in each of the other arguments starting from the second one. Conditions for the solvability of this system and estimates for the distance from an arbitrary given element $x_0 \in X$ to the set of solutions are obtained. Next, we obtain an assertion about the action of the Nemytskii operator in spaces of summable functions and establish the relationship between the covering properties of the Nemytskii operator and the covering of the function that generates it. The listed results are applied to the study of a system of implicit differential equations, for which a statement about the local solvability of the Cauchy problem with constraints on the derivative of a solution is proved. Such problems arise, in particular, in models of controlled systems. In the final part of the article, a differential equation of the n-th order not resolved with respect to the highest derivative is studied by similar methods. Conditions for the existence of a solution to the Cauchy problem are obtained.

Keywords: implicit differential equations, differential equations of higher orders, the Cauchy problem, covering map, metric space, the Nemytsky operator, functional space

Mathematics Subject Classification: 34A09, 47H14, 47H30.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131).

For citation: Arutyunov A.V., Pluzhnikova E.A. O zadache Koshi dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy vysshikh poryadkov [On the Cauchy problem for implicit differential equations of higher orders]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 348–362. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В статье рассматриваются системы неявных дифференциальных уравнений первого порядка и неявные дифференциальные уравнения высших порядков. Исследование основано на результатах об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими в метрических пространствах и обладающими свойством накрывания. Идея применения результатов о накрывающих отображениях к исследованию различных классов функциональных уравнений была предложена в работе [1]. В этой работе и в работах [2–4] были получены утверждения о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений и на их основе определены условия существования и непрерывной зависимости от параметров решений интегральных уравнений и задачи Коши для скалярного неявного дифференциального уравнения первого порядка. В связи с исследованием краевых задач для неявных дифференциальных уравнений в работах [5, 6] начато исследование накрывающих отображений в произведениях метрических пространств. Системы абстрактных уравнений с «векторно накрывающими» отображениями, действующими в произведениях метрических пространств (включая системы, описывающие кратные точки совпадения и задачи о липшицевых возмущениях), подробно рассмотрены в [7–9]. С использованием утверждений о векторно накрывающих отображениях в [10] были получены условия управляемости для дифференциальной системы неявного вида.

В данной работе предлагается уточнение утверждений работ [5, 6, 10] о системах уравнений с отображениями произведений метрических пространств. Предполагается, что эти отображения по диагональным переменным являются накрывающими, а по остальным аргументам обладают свойством липшицевости. На основании полученного утверждения о системах операторных уравнений рассматривается система неявных дифференциальных уравнений первого порядка и скалярное неявное дифференциальное уравнение n-го порядка, $n \geq 2$.

Статья разбита на четыре части. В секции 1. приведены определения основных понятий и получено утверждение о разрешимости системы операторных уравнений. С целью применения этих результатов к конкретным классам функциональных уравнений в секции 2. сформулированы утверждение о действии оператора Немыцкого и утверждение, устанавливающее взаимосвязь свойств накрывания оператора Немыцкого и накрывания порождающей его функции. В секции 3. доказано утверждение о локальной разрешимости системы неявных дифференциальных уравнений. В секции 4. исследован вопрос разрешимости дифференциального уравнения n-го порядка.

1. Разрешимость системы операторных уравнений

Напомним определение свойства накрываемости отображений, действующих в метрических пространствах.

Пусть X и Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно. Замкнутый шар пространства X с центром в $x \in X$ радиуса $r \geq 0$ будем обозначать через $B_X(x, r)$ (аналогичное обозначение будем использовать и для других метрических пространств). Пусть задано отображение $\Phi : X \to Y$, множество $V \subset Y$ и положительное число α.

Определение 1.1. Будем говорить, что отображение Φ является *α-накрывающим множество V* (или *α-накрывает множество V*), если для любых $r > 0$ и $u \in X$ справедливо включение

$$V \cap B_Y\big(\Phi(u), \alpha r\big) \subset \Phi\big(B_X(u, r)\big).$$

В случае $V = Y$ отображение Φ будем называть *α-накрывающим* (без упоминания множества). Такие отображения исследованы в [11–13] в связи с задачей о существовании и свойствах точек совпадения. В работах [1–3] исследованы вопросы разрешимости уравнений с накрывающими отображениями метрических пространств. Отметим, что приведенное определение 1.1 свойства α-накрывания множества V равносильно следующему соотношению

$$\forall y \in V \quad \forall u \in X \quad \exists x \in X \quad \Phi(x) = y, \quad \rho_X(x, u) \le k\rho_Y(y, \Phi(u)),$$

где $k = \alpha^{-1}$. Это соотношение в случае $V = Y$ называют *k-метрической регулярностью отображения* Φ (см. [14, 15]).

Пусть для $i, j = \overline{1, n}$ заданы метрические пространства (X_j, ρ_{X_j}), (Y_i, ρ_{Y_i}), множества $V_i \subset Y_i$, элементы $y_i \in V_i$ и отображения $\Phi_i : X_i \times \prod_{j=1}^{n} X_j \to Y_i$. Рассмотрим систему n операторных уравнений с n неизвестными $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\ldots$, $x_n \in X_n$ вида

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.1}$$

Обозначим $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$, $Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$, $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$. Систему (1.1) нам удобно будет рассматривать как операторное уравнение с отображением, действующим из X в Y, относительно неизвестного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$. Произведение X можно метризовать: метрика в X может быть задана равенством

$$\begin{gathered} \rho_X(x, u) = \big| \big(\rho_{X_1}(x_1, u_1), \rho_{X_2}(x_2, u_2), \ldots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)\big) \big|_{\mathbb{R}^n}, \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in X, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ — любая монотонная норма в $\mathbb{R}^n$. Аналогично может быть задана метрика в произведении Y. Определим отображение $\Phi : X \times X \to Y$ соотношением

$$\Phi(u, x) = \big(\Phi_i(u_i, x)\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in X.$$

В принятых обозначениях система уравнений (1.1) записывается в виде операторного уравнения

$$\Phi(x, x) = y, \tag{1.3}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$.

Если отображение Φ по первому аргументу является α-накрывающим, а по второму аргументу — β-липшицевым, то при $\alpha > \beta$ разрешимость уравнения (1.3) может быть установлена на основании утверждений цитируемых выше работ [1–3]. Возникает вопрос об определении чисел α, β и проверке неравенства $\alpha > \beta$, если известны константы накрывания и липшицевости для компонент Φ_i по первому и второму аргументам, соответственно. В случае $V_i = Y_i$ подходы к исследованию данной проблемы предложены в [5, 6]. Здесь мы применим близкие идеи, которые позволят исследовать разрешимость векторного операторного уравнения (1.3) при правых частях $y \in V$.

Пусть заданы числа $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Определим матрицы

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_i)_{n\times n}, \qquad B = (\beta_{ij})_{n\times n}, \qquad C = A^{-1}B = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\varrho(C)$ — спектральный радиус матрицы C.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть метрические пространства X_j, $j = \overline{1, n}$, являются полными и выполнены условия:*

при всех $i = \overline{1, n}$, для любого $x \in X$ отображение $\Phi_i(\cdot, x) : X_i \to Y_i$ является α_i-накрывающим множество V_i;

при всех $i, j = \overline{1, n}$, для любых $u_i \in X_i$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_{j-1} \in X_{j-1}, x_{j+1} \in X_{j+1}, \ldots, x_n \in X_n$ отображение $\Phi_i(u_i, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : X_j \to Y_i$ является β_{ij}-липшицевым;

для любых $\{u^k\} \subset X$, $u \in X$, $y \in V$ из сходимостей $u_i^k \to u_i$ (в пространстве X_i) и $\Phi_i(u_i^k, u) \to y_i$ (в пространстве Y_i) при всех $i = \overline{1, n}$ следует равенство $\Phi(u, u) = y$.

Тогда если для матрицы C, определенной формулой (1.4), выполнено $\varrho(C) < 1$, то при любом $y \in V$ система операторных уравнений (1.1) разрешима и, более того, для любого $\varepsilon > 0$ можно так задать монотонную норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, что для любого $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ существует решение $x = \xi \in X$ системы (1.1), удовлетворяющее оценке

$$\left| \big(\rho_{X_i}(\xi_i, u_i^0)\big)_{i=\overline{1,n}} \right|_{\mathbb{R}^n} \leq \left(\frac{1}{1 - \varrho(C)} + \varepsilon \right) \left| \left(\frac{\rho_{Y_i}\big(y_i, \Phi_i(u_i^0, u^0)\big)}{\alpha_i} \right)_{i=\overline{1,n}} \right|_{\mathbb{R}^n}.$$

Схема доказательства теоремы 1.1 в основном повторяет схему доказательства теоремы 1 о разрешимости системы уравнений с условно накрывающими отображениями в произведении метрических пространств из [5], поэтому здесь не приводится.

Отметим, что для случая $V = Y$ близкие теореме 1.1 условия накрывания отображений, действующих в произведении метрических пространств, получены в работе [6].

2. Оператор Немыцкого в пространствах измеримых функций

Предлагаемое в этой секции исследование свойств оператора суперпозиции (называемого в литературе оператором Немыцкого) требуется для получения основанных на теореме 1.1 условий разрешимости неявных дифференциальных уравнений. Здесь будут сформулированы утверждение о действии оператора Немыцкого и утверждение, устанавливающее взаимосвязь свойств накрывания оператора Немыцкого и накрывания порождающей его функции.

Обозначим через $\operatorname{cl}(\mathbb{R}^n)$ совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Для измеримого многозначного отображения $\Xi : [a, b] \to \operatorname{cl}(\mathbb{R})$ определим следующие полные метрические пространства: $L_\infty([a, b], \Xi)$ — пространство существенно ограниченных функций $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Xi(t)$ с метрикой $\rho_{L_\infty}(y_1, y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,b]} |y_1(s) - y_2(s)|$; $L_p([a, b], \Xi)$, $1 \leq p < \infty$ — пространство функций $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Xi(t)$, суммируемых в

p-й степени, с метрикой $\rho_{L_p}(y_1, y_2) = \left(\int\limits_a^b |y_1(s) - y_2(s)|^p ds\right)^{1/p}$. Отметим, что множество $L_p([a,b],\Xi)$, $1 \le p \le \infty$, не пусто тогда и только тогда, когда $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Xi(\cdot)\big) \in L_p([a,b],\mathbb{R})$, где

$$\rho_{\mathbb{R}}\big(\Xi(t)\big) = \inf\{|\xi|,\ \xi \in \Xi(t)\}, \quad t \in [a,b].$$

Определим также пространство $AC_p([a,b],\Xi)$, $1 \le p \le \infty$, абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ таких, что $\dot{x} \in L_p([a,b],\Xi)$, с метрикой

$$\rho_{AC_p}(x_1, x_2) = \big|\big(\rho_{L_p}(\dot{x}_1, \dot{x}_2),\ x_1(a) - x_2(a)\big)\big|_{\mathbb{R}^2}.$$

Заметим, что при $\Xi(t) \equiv \mathbb{R}$ пространства $L_p([a,b],\mathbb{R})$, $AC_p([a,b],\mathbb{R})$ являются банаховыми, а определенные выше метрики стандартно выражаются через норму этих пространств: $\rho_{L_p}(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{L_p}$, $\rho_{AC_p}(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_{AC_p}$. Таким образом, метрические пространства $L_p([a,b],\Xi)$, $AC_p([a,b],\Xi)$ — это подпространства «обычных» пространств $L_p([a,b],\mathbb{R})$, $AC_p([a,b],\mathbb{R})$, метрика в которых определяется через норму приведенными выше формулами.

Пусть задана измеримая функция $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ такая, что $\eta(t) \in \Xi(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$. Определим пространство $W_p\big(\eta,[a,b],\Xi\big)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых функций $t \in [a,b] \mapsto y(t) \in \Xi(t)$, удовлетворяющих условию $y - \eta \in L_p([a,b],\mathbb{R})$, с метрикой $\rho_{W_p}(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{L_p}$ (очевидно, что $y_1 - y_2 = (y_1 - \eta) - (y_2 - \eta) \in L_p([a,b],\mathbb{R})$ для любых $y_1, y_2 \in W_p\big(\eta,[a,b],\Xi\big)$). Отметим, что $W_p\big(\eta,[a,b],\Xi\big)$ вложено в пространство $W_p\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$.

Пусть заданы числа $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ и определены измеримые многозначные отображения $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$, $\Theta : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$, Предположим, что $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Omega(\cdot)\big) \in L_{p_1}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Пусть, далее, задана функция $\big(t \in [a,b],\ x \in \Omega(t)\big) \mapsto g\big(t,x\big) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори. Зафиксируем функцию $\overline{\omega} \in L_{p_1}([a,b],\Omega)$ и определим функцию $\eta(\cdot) = g\big(\cdot,\overline{\omega}(\cdot)\big)$. В случае $p_1 \ne \infty$ относительно функции g будем предполагать, что существует $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $w \in \Omega(t)$ выполнено неравенство $|g(t,w) - \eta(t)| \le \lambda |w|^{p_1/p_2}$. Если $p_1 = \infty$, то предполагаем, что при любом $r > 0$ существует такая функция $\zeta_r \in L_{p_2}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, что $|g(t,w) - \eta(t)| \le \zeta_r(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $w \in \Omega(t)$ таких, что $|w| \le r$.

Определим оператор Немыцкого соотношением

$$\forall w \in L_{p_1}([a,b],\Omega) \quad (N_g w)(t) = g\big(t, w(t)\big), \quad t \in [a,b]. \tag{2.1}$$

Рассмотрим также функцию $\widehat{g}(t,w) = g(t,w) - \eta(t)$ и соответствующий оператор Немыцкого

$$\forall w \in L_{p_1}([a,b],\Omega) \quad (N_{\widehat{g}} w)(t) = \widehat{g}\big(t, w(t)\big), \quad t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

В силу известных теорем об операторе Немыцкого в лебеговых пространствах (см., например, [16, § 17]), оператор $N_{\widehat{g}}$ действует из пространства $L_{p_1}([a,b],\Omega)$ в пространство $L_{p_2}([a,b],\mathbb{R})$ и при $p_1 \ne \infty$ является непрерывным и ограниченным, а при $p_1 = \infty$ — замкнутым и ограниченным. Поэтому, в силу определения пространства $W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Определенный формулой* (2.2) *оператор* N_g *действует из пространства* $L_{p_1}([a,b],\Omega)$ *в пространство* $W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$. *В случае* $p_1 \neq \infty$ *оператор* N_g *является непрерывным и ограниченным, а при* $p_1 = \infty$ *— замкнутым и ограниченным.*

Теперь приведем условия накрывания оператора $N_g : L_{p_1}([a,b],\Omega) \to W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$.

Лемма 2.2. *Пусть существует такое* $\alpha_g > 0$, *что при почти всех* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \Omega(t) \to \mathbb{R}$ *является* α_g*-накрывающим множество* $\Theta(t)$. *Тогда оператор Немыцкого* $N_g : L_{p_1}([a,b],\Omega) \to W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$ *будет* α_N*-накрывающим множество* $W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\Theta\big)$, *где* $\alpha_N = (b-a)^{-(p_2-p_1)/(p_1p_2)}\alpha_g$, *в частности, при* $p_1 = p_2$ *константы накрывания равны:* $\alpha_N = \alpha_g$, *в случае* $p_1 < p_2 = \infty$ *выполнено равенство* $\alpha_N = (b-a)^{-1/p_1}\alpha_g$.

Доказательство леммы 2.2 аналогично доказательству теоремы 3 из [5] о накрывании оператора Немыцкого, действующего из $L_{p_1}([a,b],\Omega)$ в $L_{p_2}([a,b],\Theta)$.

3. Система неявных дифференциальных уравнений

Полученные в секции 1. условия разрешимости системы операторных уравнений (1.1) и полученные в секции 2. утверждения о свойствах оператора Немыцкого здесь применяются к исследованию задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции.

Сформулируем рассматриваемую задачу Коши. Пусть заданы: измеримые многозначные отображения

$$\Omega_i, \Theta_i : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}), \quad i = \overline{1,n},$$

удовлетворяющие условиям Каратеодори функции

$$\big(t \in [a,b],\, x \in \mathbb{R}^n,\, w_i \in \Omega_i(t)\big) \mapsto f_i(t,x,w_i) \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,n}$$

(т. е. функции f_i измеримы по первому аргументу и непрерывны по совокупности остальных аргументов), а также измеримые функции

$$t \in [a,b] \mapsto y_i(t) \in \Theta_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$

и числа $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$f_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_i(t)\big) = y_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [a,b], \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$x_i(a) = \gamma_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

и дополнительными ограничениями на производные

$$\dot{x}_i(t) \in \Omega_i(t), \quad t \in [a,b], \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Отметим, что дополнительные ограничения на искомую функцию или ее производную возникают, например, в моделях систем управления (см. [10]).

Пусть заданы числа $1 \leq p_{1i} \leq p_{2i} \leq \infty$, $i = \overline{1,n}$. Будем предполагать, что имеет место включение $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Omega_i(\cdot)\big) \in L_{p_{1i}}([a,b],\mathbb{R})$, $i = \overline{1,n}$. При каждом $i = \overline{1,n}$ зафиксируем функцию

$\overline{\omega}_i \in L_{p_{1i}}([a,b],\Omega_i)$ и определим функцию $\eta_i(\cdot) = f_i\big(\cdot,\gamma,\overline{\omega}_i(\cdot)\big)$. Для любого $i=\overline{1,n}$, если $p_{1i}\neq\infty$, то относительно функции f_i будем предполагать, что для некоторого $\lambda_i\in\mathbb{R}$ при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $w_i\in\Omega_i(t)$ выполнено неравенство

$$\big|f_i(t,\gamma,w_i)-\eta_i(t)\big| \le \lambda_i|w_i|^{p_{1i}/p_{2i}}.$$

Если $p_{1i}=\infty$, то будем предполагать, что для любого $r>0$ существует такая функция $\zeta_r\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что для всех $|w_i|\le r$ выполнено неравенство

$$\big|f_i(t,\gamma,w_i)-\eta_i(t)\big| \le \zeta_r(t).$$

Будем рассматривать локальные решения задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3), то есть определенные не обязательно на всем $[a,b]$, а на некотором «меньшем» отрезке $[a,a+\tau]$, где $\tau\in(0,b-a]$. Решение задачи (3.1), (3.2), (3.3) будем искать в классе абсолютно непрерывных функций $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n):[a,a+\tau]\to\mathbb{R}^n$, компоненты которых $x_i\in AC_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 3.1. *Предположим, что если $p_{1j}=1$ при некотором j, то $p_{1i}\neq\infty$ при всех номерах $i\neq j$. Пусть при всех $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ существуют такие $\alpha_i>0$ и $\beta_{ij}\ge 0$, что для почти всех $t\in[a,b]$ выполнены условия:*

для любого $x\in\mathbb{R}^n$ отображение $f_i(t,x,\cdot):\Omega_i(t)\to\mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $\Theta_i(t)$;

для любого $w_i\in\Omega_i(t)$ отображение $f_i(t,\cdot,w_i):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым по каждой компоненте $x_j\in\mathbb{R}$ второго аргумента.

Тогда для любых $y_i\in W_{p_{2i}}\big(\eta_i,[a,b],\Theta_i\big)$, $i=\overline{1,n}$, существует $\tau\in(0,b-a]$ и существует определенное на $[a,a+\tau]$ решение $x\in\prod_{j=1}^n AC_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\tau\in(0,b-a]$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для системы

$$\dot{x}_i(t)=v_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t\in[a,a+\tau],$$

с начальным условием (3.3). Для любой правой части $v=(v_i)_{i=\overline{1,n}}\in\prod_{i=1}^n L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$ решением этой задачи является функция $x=(x_i)_{i=\overline{1,n}}\in\prod_{i=1}^n AC_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, определяемая формулой $x(t)=\gamma+\int_a^t v(s)\,ds$ (то есть $x_i(t)=\gamma_i+\int_a^t v_i(s)\,ds$, $i=\overline{1,n}$). Рассматриваемая вспомогательная задача позволяет представить исходную задачу Коши (3.1), (3.2), (3.3) при $t\in[a,a+\tau]$ в виде системы

$$f_i\Big(t,\,\gamma+\int_a^t v(s)\,ds,\,v_i(t)\Big)=y_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t\in[a,a+\tau],\tag{3.4}$$

относительно неизвестного $v\in\prod_{i=1}^n L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$ — производной от искомой абсолютно непрерывной функции.

Чтобы применить к полученной системе (3.4) теорему 1.1, определим отображения Φ_i, $i=\overline{1,n}$, сопоставляющие любым $w_i \in L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, $v \in \prod\limits_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ функцию

$$\Phi_i(w_i,v)(t) = f_i\Big(t,\, \gamma + \int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\Big), \quad t\in[a,a+\tau], \tag{3.5}$$

и покажем, что $\Phi_i : L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)\times \prod\limits_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j) \to W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$, $i=\overline{1,n}$.

Действительно, во-первых, согласно лемме 2.1 $f_i\big(\cdot,\gamma,w_i(\cdot)\big) \in W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$, а во-вторых, в силу предположения β_{ij}-липшицевости отображения f_i по каждой компоненте второго аргумента получаем

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_a^{a+\tau} \Big|f_i\big(t,\,\gamma+\int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\big) - f_i\big(t,\gamma,w_i(t)\big)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \\
&\qquad \le \Big(\int_a^{a+\tau} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\Big|\int_a^t v(s)\,ds\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \le \Big(\int_a^{a+\tau} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\|v_i\|_{L_{p_{1i}}}\tau^{1-1/p_{1i}}\,dt\Big)^{1/p_{2i}} \\
&\qquad\qquad \le \Big(\sum_{j=1}^{n} \tau\beta_{ij}\|v_i\|_{L_{p_{1i}}}\tau^{1-1/p_{1i}}\Big)^{1/p_{2i}} < \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_a^{a+\tau} \Big|f_i\big(t,\,\gamma+\int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\big) - \eta(t)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \le \Big(\int_a^{a+\tau} \Big|f_i\big(t,\gamma,w_i(t)\big)-\eta(t)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \\
&\qquad + \Big(\int_a^{a+\tau} \Big|f_i\big(t,\,\gamma+\int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\big) - f_i\big(t,\gamma,w_i(t)\big)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} < \infty,
\end{aligned}$$

то есть $\Phi_i(w_i,v) \in W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$.

Итак, система функциональных уравнений (3.4) записывается в виде следующей системы операторных уравнений

$$\Phi_i(v_i,v_1,v_2,\dots,v_n) = y_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{3.6}$$

Осталось проверить условия теоремы 1.1 для заданных формулой (3.5) отображений $\Phi_i : L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)\times \prod\limits_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j) \to W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$. Рассмотрим только ситуацию $1\le p_{1i}\le p_{2i}<\infty$, в случае $1\le p_{1i}\le p_{2i}=\infty$ доказательство аналогичное.

Согласно лемме 2.2 отображение $\Phi_i(\cdot,v) : L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i) \to W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$ при любом $v\in \prod\limits_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ является накрывающим с константой $\tau^{-(p_{2i}-p_{1i})/(p_{1i}p_{2i})}\alpha_i$.

Далее, для всех $w_i \in L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, $v\in \prod\limits_{l=1}^{n} L_{p_{1l}}([a,a+\tau],\Omega_l)$, произвольного $j=\overline{1,n}$

и любого $\tilde{v}_j \in L_{p_{1i}}([a, a+\tau], \Omega_j)$ выполнено

$$
\begin{aligned}
&\rho_{W_{p_{2i}}}\big(\Phi_i(w_i, v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n),\ \Phi_i(w_i, v_1, \ldots, \tilde{v}_j, \ldots, v_n)\big) \\
&\le \beta_{ij}\left(\int_a^{a+\tau}\left(\int_a^t \big|v_j(s) - \tilde{v}_j(s)\big|\,ds\right)^{p_{2i}} dt\right)^{1/p_{2i}} \\
&\le \beta_{ij}\left(\int_a^{a+\tau}\left(\int_a^{a+\tau} |v_j(s) - \tilde{v}_j(s)|^{p_{1j}}\,ds\right)^{p_{2i}/p_{1j}} (t-a)^{(p_{1j}-1)p_{2i}/p_{1j}}\,dt\right)^{1/p_{2i}} \\
&\qquad\qquad = \frac{\beta_{ij}\tau^{(p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/(p_{1j}p_{2i})}}{\big((p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j})/p_{1j}\big)^{1/p_{2i}}}\rho_{L_{p_{1j}}}(v_j, \tilde{v}_j).
\end{aligned}
$$

Итак, отображение $\Phi_i(w_i, v_1, \ldots, v_{j-1}, \cdot, v_{j+1}, \ldots, v_n)$ удовлетворяет условию Липшица с константой

$$
\big((p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j})/p_{1j}\big)^{-1/p_{2i}}\tau^{(p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/(p_{1j}p_{2i})}\beta_{ij}.
$$

Используя вычисленные значения, определяем для системы (3.6) матрицу (1.4):

$$
C = \left(\frac{\tau^{(p_{1i}p_{1j}-p_{1i}+p_{1j})/(p_{1i}p_{1j})}{p_{1j}}^{1/p_{2i}}\beta_{ij}}{(p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j})^{1/p_{2i}}\alpha_i}\right)_{n\times n}. \tag{3.7}
$$

Оценим элементы этой матрицы.

Покажем, что при основании τ показатель степени $\varsigma_{ij} = (p_{1i}p_{1j} - p_{1i} + p_{1j})/(p_{1i}p_{1j})0$ при любых i, j является положительным числом. Очевидно, что $\varsigma_{ij} > 0$, если $p_{1i} < \infty$ и $p_{1j} < \infty$. Пусть теперь конечно только одно из этих чисел. Если $p_{1i} = \infty$, то, согласно принятым предположениям, $p_{1j} > 1$, и поэтому $\varsigma_{ij} = (p_{1j} - 1)/p_{1j} > 0$. Если же $p_{1j} = \infty$, то $\varsigma_{ij} = (p_{1i} + 1)/p_{1i} > 0$. Наконец, при $p_{1i} = p_{1j} = \infty$ получаем $\varsigma_{ij} = 1$. Из доказанных оценок следует, что если определить $\varsigma = \min\{\varsigma_{ij}\}$, то $\varsigma > 0$.

Теперь для элементов матрицы (3.7) докажем конечность выражений

$$
q_{ij} = (p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j})^{-1/p_{2i}}{p_{1j}}^{1/p_{2i}}
$$

при всех $i, j = \overline{1, n}$. При конечных значениях p_{1i}, p_{1j} выполнено $p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j} > 0$ и поэтому $q_{ij} < \infty$. Далее, легко проверяется, что:

$$
\begin{aligned}
&p_{2i} < \infty, \quad p_{1j} = \infty \ \Rightarrow\ q_{ij} = (p_{2i} + 1)^{-1/p_{2i}};\\
&p_{2i} = \infty, \quad p_{1j} < \infty \ \Rightarrow\ q_{ij} = 1;\\
&p_{2i} = \infty, \quad p_{1j} = \infty \ \Rightarrow\ q_{ij} = 1.
\end{aligned}
$$

Положим $q = \max\{q_{ij}\}$. Из приведенных выше рассуждений следует, что $q < \infty$. При всех $i, j = \overline{1, n}$ для элементов c_{ij} матрицы (3.7) выполнено $0 \le c_{ij} \le \tau^{\varsigma}qK$, где $K = \max\{{\alpha_i}^{-1}\beta_{ij}\}$. Из этой оценки следует, что $c_{ij} \to 0$ при $\tau \to 0$. Поэтому можно выбрать $\tau > 0$ так, чтобы $\varrho(C) < 1$.

Итак, все условия теоремы 1.1 выполнены. □

В теореме 3.1 предположения накрывания отображением $f_i(t, x, \cdot)$ множества $\Theta_i(t)$ при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$ и предположение липшицевости отображения $f_i(t, \cdot, w_i)$ на всем $\mathbb{R}^n$ при любых $w_i \in \Omega_i(t)$ можно ослабить. Можно потребовать выполнение этих условий для второго аргумента, принадлежащего не всему пространству $\mathbb{R}^n$, а только множеству $D = \prod_{j=1}^{n} [\gamma_j - \sigma_j, \gamma_j + \sigma_j]$, $\sigma_j > 0$. Отметим, что подобные ослабленные условия использовались в работах [1–3, 5].

Итак, будем считать, что функция $f_i(t, x, w_i)$ определена для аргументов $t \in [a, b]$, $x \in D$, $w_i \in \Omega_i(t)$. Предположим, что при почти всех $t \in [a, b]$ для любого $x \in D$ отображение $f_i(t, x, \cdot) : \Omega_i(t) \to \mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $\Theta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого $w_i \in \Omega_i(t)$ отображение $f_i(t, \cdot, w_i) : D \to \mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым по каждой компоненте $x_j \in \mathbb{R}$ второго аргумента, а также выполнены остальные условия теоремы 3.1. Определим отображение

$$\big(t \in [a, b],\, x \in \mathbb{R}^n,\, w_i \in \Omega_i(t)\big) \mapsto \widehat{f}_i(t, x, w_i) \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}$$

соотношением

$$\widehat{f}_i(t, x, w_i) = f(t, \Pi(x), w_i), \quad \Pi(x) = (\widehat{x}_i)_{i=\overline{1,n}}, \quad \widehat{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } x_i \in D, \\ \gamma_j - \sigma_j, & \text{если } x_i < \gamma_j - \sigma_j, \\ \gamma_j + \sigma_j, & \text{если } x_i > \gamma_j + \sigma_j. \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными использовавшимся в [1, 2, 5], доказывается, что для определенных здесь функций $\widehat{f}_i$, $i = \overline{1, n}$, выполнены все условия теоремы 3.1. Таким образом, для любых $y_i \in W_{p_{2i}}\big(\eta_i, [a, b], \Theta_i\big)$, $i = \overline{1, n}$, существует $\tau \in (0, b - a]$ и существует определенное на $[a, a + \tau]$ решение $x \in \prod_{j=1}^{n} AC_{p_{1j}}([a, a + \tau], \Omega_j)$ задачи Коши для системы

$$\widehat{f}_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_i(t)\big) = y_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [a, b],$$

с условиями (3.2), (3.3). Для достаточно малого положительного $\tau' < \tau$ будет выполнено $x(t) \in D$ при $t \in [a, a + \tau']$. Следовательно, сужение функции x на отрезок $[a, a + \tau']$ будет решением исходной задачи Коши.

Итак, из теоремы 3.1 выводится следующие более общие условия разрешимости задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3).

Следствие 3.1. *Предположим, что если $p_{1j} = 1$ при некотором j, то $p_{1i} \neq \infty$ при всех номерах $i \neq j$. Пусть при всех $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ существуют такие $\alpha_i > 0$ и $\beta_{ij} \geq 0$, что для почти всех $t \in [a, b]$ выполнены условия:*

для любого $x \in D$ отображение $f_i(t, x, \cdot) : \Omega_i(t) \to \mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $\Theta_i(t)$;

для любого $w_i \in \Omega_i(t)$ отображение $f_i(t, \cdot, w_i) : D \to \mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым по каждой компоненте $x_j \in \mathbb{R}$ второго аргумента.

Тогда для любых $y_i \in W_{p_{2i}}\big(\eta_i, [a, b], \Theta_i\big)$, $i = \overline{1, n}$, существует $\tau \in (0, b - a]$ и существует определенное на $[a, a + \tau]$ решение $x \in \prod_{j=1}^{n} AC_{p_{1j}}([a, a + \tau], \Omega_j)$ задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3).

4. Дифференциальное уравнение n-го порядка

Здесь на основании полученных в секции 3. результатов о системе (3.1) неявных дифференциальных уравнений получены условия разрешимости дифференциального уравнения n-го порядка, не разрешенного относительно старшей производной.

Пусть заданы векторы $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Обозначим $D_i = [\gamma_i - \sigma_i, \gamma_i + \sigma_i]$, $i = \overline{1, n}$, $D = \prod\limits_{i=1}^{n} D_i$. Пусть также определены измеримые многозначные отображения $\Omega, \Theta : [a, b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям Каратеодори (измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция

$$\big(t \in [a, b],\, x \in D_1,\, w_1 \in D_2,\, \ldots,\, w_{n-1} \in D_n,\, w_n \in \Omega(t)\big) \mapsto g(t, x, w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R},$$

а также измеримая функция $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Theta(t)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$g\big(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = y(t) \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$x(a) = \gamma_1, \quad \dot{x}(a) = \gamma_2, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(a) = \gamma_n \tag{4.2}$$

и дополнительным ограничением на старшую n-ую производную искомой функции

$$x^{(n)}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.3}$$

Сделаем «стандартную» замену переменных, обозначив

$$x_1 = x,\;\; x_2 = \dot{x},\;\; \ldots,\;\; x_n = x^{(n-1)}.$$

Относительно новых неизвестных уравнение (4.1) превращается в систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = 0, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} - x_n = 0, \\ g(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n) = y(t). \end{cases} \tag{4.4}$$

Если определить функцию

$$\Big(t \in [a, b],\, x \in D,\, u_1 \in D_2,\, \ldots,\, u_{n-1} \in D_n,\, u_n \in \Omega(t)\Big) \mapsto f(t, x, u) = \begin{pmatrix} -x_2 + u_1 \\ \vdots \\ -x_n + u_{n-1} \\ g(t, x, u_n) \end{pmatrix}$$

и обозначить

$$\begin{aligned} &y_1(t) \equiv 0,\;\; \ldots,\;\; y_{n-1}(t) \equiv 0,\;\; y_n(t) = y(t), \\ &\Omega_1(t) \equiv \mathbb{R},\;\; \ldots,\;\; \Omega_{n-1}(t) \equiv \mathbb{R},\;\; \Omega_n(t) = \Omega(t), \\ &\Theta_1(t) \equiv \{0\},\;\; \ldots,\;\; \Theta_{n-1}(t) \equiv \{0\},\;\; \Theta_n(t) = \Theta(t), \end{aligned}$$

то становится очевидным, что задача Коши (4.1), (4.2), (4.3) для рассматриваемого уравнения n-го порядка представима в виде задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3) для системы уравнений первого порядка, которая рассматривалась в секции 3. Это позволяет применить к исследованию задачи (4.1), (4.2), (4.3) теорему 3.1 и следствие 3.1.

Пусть заданы числа $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$. Будем предполагать, что имеет место включение $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Omega(\cdot)\big) \in L_{p_1}([a,b],\mathbb{R})$. Зададим некоторую функцию $\overline{\omega} \in L_{p_1}([a,b],\Omega)$ и определим функцию $\eta(\cdot) = g\big(\cdot,\gamma_1,\dots,\gamma_n,\overline{\omega}(\cdot)\big)$. Если $p_{1i} \neq \infty$, то относительно функции g будем предполагать, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $w \in \Omega(t)$ выполнено неравенство

$$\big|g(t,\gamma_1,\dots,\gamma_n,w) - \eta(t)\big| \le \lambda |w|^{p_1/p_2}.$$

Если $p_1 = \infty$, то будем предполагать, что для любого $r > 0$ существует такая функция $\zeta_r \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что для всех $|w| \le r$ выполнено неравенство

$$\big|g(t,\gamma_1,\dots,\gamma_n,w) - \eta(t)\big| \le \zeta_r(t).$$

Определим пространство $AC^n_{p_1}\big([a,b],\Omega\big)$ таких n раз дифференцируемых функций $x:[a,b] \to \mathbb{R}$, что $(n-1)$-ая производная является абсолютно непрерывной функцией, а для n-й производной выполнено $x^{(n)} \in L_{p_1}([a,b],\Omega)$. Локальным решением задачи (4.1), (4.2), (4.3) будем называть функцию $x \in AC^n_{p_1}([a,a+\tau],\Omega)$, удовлетворяющую при почти всех $t \in [a,a+\tau]$ уравнению (4.1), а также начальному условию (4.2).

Применяя к задаче (4.4), (3.2), (3.3) следствие 3.1, получаем следующее утверждение о задаче Коши (4.1), (4.2), (4.3) для уравнения n-го порядка.

Теорема 4.1. *Пусть существуют такие $\alpha > 0$ и $\beta_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, что для почти всех $t \in [a,b]$ выполнены условия:*

для любых $x \in D_1$, $u_1 \in D_2$, $\dots$, $u_{n-1} \in D_n$ отображение $g(t,x,\cdot):\Omega(t) \to \mathbb{R}$ является α-накрывающим множество $\Theta(t)$;

для любого $u_n \in \Omega(t)$ отображение $g(t,\cdot,w): D \to \mathbb{R}$ является липшицевым по каждой компоненте $x \in D_1$, $u_1 \in D_2$, $\dots$ $u_{n-1} \in D_n$ второго аргумента с коэффициентом $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$, соответственно.

Тогда для любого $y \in W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\Theta\big)$ существует $\tau \in (0,b-a]$ и существует определенное на $[a,a+\tau]$ решение $x \in AC^n_{p_1}([a,a+\tau],\Omega)$ задачи Коши (4.1), (4.2), (4.3).

Проиллюстрируем применение теоремы 4.1 к исследованию конкретных уравнений.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{t}\big|\ddot{x}(t) - 1\big| + \dot{x}^2(t)\exp x(t) = y(t), \quad \ddot{x}(t) \in [0,2], \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \gamma. \qquad (4.5)$$

В принятых выше обозначениях для этой задачи имеем

$$g(t,x,w_1,w_2) = \frac{1}{t}\big|w_2 - 1\big| + w_1^2 \exp x, \quad \Omega(t) \equiv [0,2].$$

Положим $\Theta(t) = \big[\varepsilon, \frac{1}{t}\big]$, $t \in [0,1]$, где ε — любое достаточно малое положительное число. Выберем функцию $\overline{w}(t) \equiv 0$, тогда $\eta(t) = \frac{1}{t}\big|0-1\big| + 0\exp\gamma = \frac{1}{t}$, $t \in [0,1]$. Выберем также любые $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$.

Определенные здесь функция g и многозначные функции Ω, Θ удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Следовательно, для любого γ и любой измеримой функции y такой, что $y(t) \in \left[\varepsilon, \frac{1}{t}\right]$ и $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - y(t)\right)^{p_2} dt < \infty$, существует $\tau \in (0,1]$ и существует определенное на $[0,\tau]$ решение $x \in AC_{p_1}([0,\tau],\Omega)$ задачи (4.5).

References

[1] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, "Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, "Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative", *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[2] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, "On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[3] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[4] В. Мерчела, "Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 44–54. [W. Merchela, "On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 44–54 (In Russian)].

[5] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, "Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, "Covering Mappings in a Product of Metric Spaces and Boundary Value Problems for Differential Equations Unsolved for the Derivative", *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[6] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, "Теорема о накрывании оператора в произведении метрических пространств", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **16**:1 (2011), 70–72. [E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, "A theorem on operator covering in the product of metric spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **16**:1 (2011), 70–72 (In Russian)].

[7] Е. С. Жуковский, "О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств", *Математические заметки*, **100**:3 (2016), 344–362; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces", *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 21–37.

[8] Е. С. Жуковский, "О точках совпадения векторных отображений", *Известия вузов. Математика*, 2016, № 10, 14–28; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On Coincidence Points for Vector Mappings", *Russian Mathematics*, **60**:10 (2016), 10–22.

[9] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, "Об итерационных методах решения уравнений с накрывающими отображениями", *Сибирский журнал вычислительной математики*, **19**:4 (2016), 357–369; англ. пер.:T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, "On iterative methods for solving equations with covering mappings", *Numerical Analysis and Applications*, **9**:4 (2016), 277–287.

[10] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, "Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями", *Автоматика и телемеханика*, 2015, № 1, 31–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, "On controlling objects whose motion is defined by implicit nonlinear differential equations", *Automation and Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[11] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств", *Математический сборник*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On the cardinality of the set of coincidence points of mappings in metric, normed and partially ordered spaces", *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[12] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155. [A. V. Arutyunov, “Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki [Covering mappings in metric spaces and fixed points]”, *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, **416**:2 (2007), 151–155 (In Russian)].

[13] А. В. Арутюнов, “Точки совпадения двух отображений”, *Функциональный анализ и его приложения*, **48**:1 (2014), 89–93; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Coincidence Points of Two Maps”, *Functional Analysis and Its Applications*, **48**:1 (2014), 72–75.

[14] B. S. Mordukhovich, B. Wang, “Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces”, *Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004, № 50, 2650–2683.

[15] А. Д. Иоффе, “Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление”, *Успехи математических наук*, **55**:3 (333) (2000), 103–162; англ. пер.:A. D. Ioffe, “Metric regularity and subdifferential calculus”, *Russian Mathematical Surveys*, **55**:3 (2000), 501–558.

[16] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966. [M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabrejko, E. I. Pustyl'nik, P. E. Sobolevskij, *Integral'nye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russian)].

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Плужникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация.
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2008-3275

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Elena A. Pluzhnikova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2008-3275

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Плужникова Елена Александровна
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Corresponding author:
Elena A. Pluzhnikova
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Поступила в редакцию 02.07.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.09.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Received 02.07.2021
Reviewed 15.09.2021
Accepted for press 27.11.2021