ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276
УДК 517, 515.124.2

Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах

Ричик СЕНГУПТА
АНОО ВО «Сколковский институт науки и технологий»
121205, Российская Федерация, г. Москва, территория инновационного центра «Сколково», Большой бульвар, 30
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе исследуются вещественнозначные функции, определенные на квазиметрических пространствах. Для них получено обобщение вариационного принципа Экланда и аналогичного утверждения из статьи [S. Cobzas, “Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle”, Topology and its Applications, vol. 158, no. 8, pp. 1073–1084, 2011]. Приведенная здесь модификация вариационного принципа применима, в частности, к широкому классу неограниченных снизу функций. Полученный результат применен к исследованию минимумов функций, определенных на квазиметрических пространствах. Сформулировано условие типа Каристи для сопряженно-полных квазиметрических пространств. Показано, что предложенное условие типа Каристи является достаточным условием существования минимума для полунепрерывных снизу функций, действующих в сопряженно-полных квазиметрических пространствах.

Ключевые слова: вариационный принцип Экланда, квазиметрические пространства, неограниченные снизу функции

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

Для цитирования: *Сенгупта Р.* Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 268–276. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276

Ekeland variational principle for quasimetric spaces

Richik SENGUPTA

Skolkovo Institute of Science and Technology

30 Bolshoy Boulevard, Territory of the Skolkovo Innovation Center, Moscow 121205, Russian Federation

Derzhavin Tambov State University

33 International St., Tambov 392036, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study real-valued functions defined on quasimetric spaces. A generalization of Ekeland's variational principle and a similar statement from the article [S. Cobzas, "Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle", Topology and its Applications, vol. 158, no. 8, pp. 1073–1084, 2011] is obtained for them. The modification of the variational principle given here is applicable, in particular, to a wide class of functions unbounded from below. The result obtained is applied to the study the minima of functions defined on quasimetric spaces. A Caristi-type condition is formulated for conjugate-complete quasimetric spaces. It is shown that the proposed Caristi-type condition is a sufficient condition for the existence of a minimum for lower semicontinuous functions acting in conjugate-complete quasimetric spaces.

Keywords: Ekeland variational principle, quasimetric spaces, functions unbounded from below

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/).

Mathematics Subject Classification: 58E30, 54A05.

For citation: Sengupta R. Ekeland Variational Principle in quasimetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 268–276. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Напомним понятия метрического и квазиметрического пространств. Пусть задано непустое множество X и функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Здесь $\mathbb{R}_+$ — это множество неотрицательных чисел. Как известно, функция ρ называется метрикой, а пара (X, ρ) — метрическим пространством, если имеют место следующие аксиомы:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Функцию ρ называют квазиметрикой, а пару (X, ρ) — квазиметрическим пространством, если для ρ выполняются аксиома тождества и неравенство треугольника (см., например, [1]).

Пусть заданы числа $q_1 \ge 1$ и $q_2 \ge 1$. Рассмотрим еще одну аксиому для функции ρ

3′. $\rho(x, z) \le q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X.$

Функцию ρ называют (q_1, q_2)-квазиметрикой, а пару (X, ρ) — (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством, если для ρ_X выполняются аксиомы 1 и 3′ (см., например, [1, с. 527]). Очевидно, что $(1, 1)$-квазиметрика является квазиметрикой, а $(1, 1)$-квазиметрическое пространство является квазиметрическим пространством.

Понятия фундаментальности и сходимости последовательностей, а также полноты пространства, хорошо известны для метрических пространств. Поэтому здесь они не приводятся. Определения этих понятий для квазиметрических пространств вводятся в следующем параграфе.

Важную роль в анализе играет вариационный принцип Экланда — утверждение о свойствах функций на метрических пространствах. Напомним его. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ собственный функционал, т. е.

$$\{x \in X : U(x) \ne +\infty\} \ne \emptyset.$$

Предположим, что функционал U полунепрерывен снизу и ограничен снизу.

Теорема 0.1. *Для любых $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и для любого $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) \le \varepsilon + \inf\limits_{x \in X} U(x)$, существует точка $\bar{x} \in X$, удовлетворяющая неравенствам*

$$U(\bar{x}) \le U(x_0), \quad \rho(\bar{x}, x_0) \le \lambda,$$
$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

Результаты, связанные с поиском минимумов функций и решений уравнений в метрических пространствах, имеют широкий спектр применений в различных областях анализа, включая нелинейный анализ (см., например, [2, гл. II, X] и [3]), оптимизацию (см., например, [4, 5]), оптимальное управление (см., например, [6–8]), теорию дифференциальных включений (см., например, [7]), теорию точек совпадения и накрывающих отображений [5, 9–13]) и математическую экономику (см., например, [14]). Существует множество обобщений и модификаций вариационных принципов, которые позволяют получить вышеупомянутые результаты (см., например, [15–19]).

Приведенная теорема имеет разные обобщения (см., например, [15,17,20]), однако остается еще много интересных и важных пространств и классов функций, для которых аналоги вариационного принципа еще не получены. Настоящая работа посвящена обобщению вариационного принципа Экланда для функций, которые определены на квазиметрическом пространстве, без априорного предположения ограниченности функций снизу. Для метрических пространств аналогичный результат был получен в [19].

1. Предварительные сведения

Пусть (X,ρ) — это заданное квазиметрическое пространство. Напомним ряд определений, связанных с этим понятием. Функция

$$\overline{\rho}(x,y) := \rho(y,x), \quad x,y \in X$$

называется сопряженной квазиметрикой к квазиметрике $\rho(x,y)$.

Определение 1.1. Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \rho_X(x,x_i) < \varepsilon \quad \forall i > N.$$

Определение 1.2. Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \rho_X(x_j,x_i) < \varepsilon \quad \forall i > j > N.$$

Определение 1.3. Квазиметрическое простанство (X,ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Определение 1.4. Квазиметрическое простанство (X,ρ) называется сопряженно-полным, если любая фундаментальная относительно квазиметрики $\overline{\rho}$ последовательность сходится относительно метрики ρ.

Понятие сопряженной полноты возникает во многих случаях. Приведем пример квазиметрического пространства, которое является сопряженно-полным, но не является полным.

Пример 1.1. Рассмотрим квазиметрику Зоргенфрея на $X = \mathbb{R}_+$,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x \le y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

Проверим, что пространство является сопряженно-полным. Пусть x_n сопряженно-фундаментальная последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что для любого $n > N$ выполняется $\rho(x_j,x_i) < \varepsilon$ для любых $j > i > N$. По определению квазиметрики Зоргенфрея, это означает, что существует номер N такой, что последовательность $\{x_N, x_{N+1}, ...\}$ является монотонно убывающей и ограниченная снизу. Несложно проверить, что точная нижняя граница этой последовательности является ее пределом (относительно квазиметрики ρ). Следовательно, пространство (X,ρ) является сопряженно-полным.

Рассмотрим теперь последовательность $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$. Она является фундаментальной относительно квазиметрики ρ, она не является фундаментальной относительно квазиметрики $\overline{\rho}$ и не сходится относительно квазиметрики ρ. Следовательно, пространство (X,ρ) не является полным.

Пусть $x_0 \in X$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Определим замкнутый и открытый шары как

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) \le r\}, \quad O(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}.$$

Аналогично определим сопряженные шары:

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : \overline{\rho}(x_0, x) \le r\}, \quad \overline{O}(x_0, r) := \{x \in X : \overline{\rho}(x_0, x) < r\}.$$

Пусть теперь (X, ρ) — сопряженно-полное квазиметрическое пространство. Для любой функции $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ положим

$$\gamma(A) := \inf_{x \in A} U(x), \quad A \subset X, \quad A \ne \emptyset.$$

Будем предполагать, что $\gamma(A)$ может принимать значения $-\infty$ или $+\infty$.

Через $\Omega(X)$ будем обозначать множество всех функций $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ таких, что $\gamma(A) > -\infty$ для любого непустого ограниченного множества $A \subset X$. Для $U \in \Omega(X)$, положим $\mathrm{dom} U := \{x \in X : U(x) < +\infty\}$. Отметим, что любая ограниченная снизу функция U лежит в $\Omega(X)$.

В [20] было получено следующее обобщение вариационного принципа Экланда.

Теорема 1.1. *Пусть пространство (X, ρ) сопряженно-полно, а функция $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является собственной ограниченной снизу и полунепрерывной снизу. Тогда для любого $\epsilon > 0$ и для любого $x_0 \in X$, для которых*

$$f(x_0) \le \inf_{x \in X} U(x) + \epsilon,$$

существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что

$$U(\bar{x}) \le U(x_0), \quad \rho(\bar{x}, x_0) \le \lambda, \tag{1.1}$$

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

З а м е ч а н и е 1.1. В статье [20] сопряженную полноту называют правой $\rho - K$-полнотой (right $\rho - K$-completeness). Также подчеркнуто, что топология, порожденная квазиметрикой, удовлетворяет аксиоме отделимости T_1. У нас же аксиома T_1 является прямым следствием определения квазиметрики. Это объясняется тем, что в [20] понятие квазиметрики слабее, чем здесь. А именно, в определении квазиметрики в [20] аксиома 1 заменена более слабым условием:

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \implies x = y \quad \forall\, x, y \in X.$$

2. Основной результат

Теорема 1.1 применима только к ограниченным снизу функциям. Результат, который мы сформулируем ниже, применим для более широкого класса функций, включающий в себя многие функции неограниченные снизу.

Пусть (X, ρ) — это заданное квазиметрическое пространство.

Теорема 2.1. *Пусть квазиметрическое пространство* (X, ρ) *сопряженно-полно, функция* ρ *полунепрерывна сверху по первому аргументу, функция* $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *полунепрерывна снизу и* $U \in \Omega(X)$. *Тогда для любого* $x_0 \in \mathrm{dom} U$, *для любой функции* $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ *такой, что*

$$U(x_0) \le \gamma(\overline{B}(x_0, r)) + \varepsilon(r) \quad \forall\, r > 0, \tag{2.1}$$

и для любого $\lambda > 0$ *существует точка* $\bar{x} \in X$ *такая, что выполняется* (1.1), *т. е.* $U(\bar{x}) \le U(x_0)$ *и* $\rho(x_0, \bar{x}) \le \lambda$, *и имеет место*

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Возьмем произвольные точку $x_0 \in X$, функцию $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$, удовлетворяющую (2.1), и число $\lambda > 0$. Положим

$$X_\lambda := \left\{ x \in X : \quad U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) \le U(x_0) \right\}, \quad \lambda > 0.$$

Докажем, что множество X_λ замкнуто. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X_\lambda$ и точку $x \in X$ такую, что $x_n \to x$. Поскольку функция U полунепрерывна снизу, для любого $\delta > 0$ существует номер $N(\delta)$ такой, что $U(x) \le U(x_n) + \delta$ при всех $n > N(\delta)$. Имеем

$$\begin{aligned} U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) &\le U(x_n) + \delta + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) \\ &\le U(x_n) + \delta + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_n) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x_n, x_0) \end{aligned}$$

для любых $\delta > 0$, $n > N(\delta)$. Здесь первое неравенство следует из полунепрерывности снизу функции U, второе следует из неравенства треугольника. Из определения множества X_λ, полунепрерывности сверху функции ρ по первому аргументу, переходя к пределу при $n \to \infty$, а затем переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) \le U(x_0).$$

Тем самым установлено, что $x \in X_\lambda$. Следовательно, X_λ замкнуто.

Докажем вложение $X_\lambda \subset \overline{B}(x_0, \lambda)$. Для любого $x \in X_\lambda$ имеем

$$\rho(x, x_0) \le \lambda \frac{U(x_0) - U(x)}{\varepsilon(\lambda)} \le \lambda \frac{U(x_0) - \gamma(\overline{B}(x_0, \lambda))}{\varepsilon(\lambda)} \le \lambda.$$

Здесь первое неравенство следует из определения X_λ, второе неравенство следует из определения γ, третье неравенство следует из (2.1). Следовательно, $X_\lambda \subset \overline{B}(x_0, \lambda)$.

Так как X_λ замкнуто и ограничено, (X_λ, ρ) является сопряженно-полным квазиметрическим пространством. Дополнительно, U ограничено снизу на X_λ числом $\gamma(\overline{B}(x_0, \lambda))$, т. к. из включения $X_\lambda \subset B(x_0, \lambda)$ следует, что $\gamma(B(x_0, \lambda)) \le \gamma(X_\lambda)$. Применяя вариационный принцип Экланда для квазиметрических пространств для ограничения U на X_λ, мы получим, что существует точка $\bar{x} \in X_\lambda$ такая, что (1.1) выполняется и

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X_\lambda, \quad x \ne \bar{x}. \tag{2.3}$$

Осталось доказать (2.2). Возьмем произвольную точку $x \in X_\lambda$. Для нее неравенство (2.2) следует из неравенства (2.3).

Возьмем теперь точку $x \notin X_\lambda$. Имеем

$$U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x,\bar{x}) \geq U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}(\rho(x,x_0) - \rho(\bar{x},x_0)) > U(x_0) - \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(\bar{x},x_0) \geq U(\bar{x}).$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства треугольника; второе неравенство следует из определения X_λ, поскольку $x \notin X_\lambda$; а третье неравенство следует из определения X_λ, т. к. $\bar{x} \in X_\lambda$. Следовательно, для $x \notin X_\lambda$ неравенство (2.2) также справедливо. □

Приведем пример функции, для которой не применима теорема 1.1, но применима теорема 2.1.

П р и м е р 2.1. Пусть $U(x) = -\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Так как функция неограничена снизу, к ней невозможно применить теорему 1.1, но она удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.1. Применим эту теорему в точке $x_0 = 0$. Положим $\varepsilon(r) = \sqrt{r}$. Тогда предположение (2.1) выполняется. Поэтому по теореме 2.1 существует точка $\bar{x}$ такая, что $|\bar{x}| \leq \lambda$ и

$$\sqrt{|\bar{x}|} < \sqrt{|x|} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}|x - \bar{x}| \quad \forall\, x \neq \bar{x}.$$

Обсудим теперь применение теоремы 2.1. Пусть далее функция $U : X \to \mathbb{R}$ ограничена снизу. Положим

$$\gamma := \inf_{x \in X} U(x).$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что функция U удовлетворяет сопряженному условию типа Кариста с константой $k > 0$, если

$$\forall x \in X : \quad U(x) > \gamma \quad \exists\, x' \in X : \quad U(x') + k\bar{\rho}(x,x') \leq U(x).$$

Сформулируем следствие к теореме 2.1, которое является достаточным условием существования минимума для полунепрерывных снизу функций.

Следствие 2.1. *Пусть пространство (X,ρ) сопряженно-полно, квазиметрика ρ полунепрерывна сверху по первому аргументу, а функция $U : X \to \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу. Если функция U удовлетворяет сопряженному условию типа Каристи с константой k, то для любого $x_0 \in \mathrm{dom} U$ существует $\bar{x} \in X$ такой, что*

$$U(\bar{x}) = \gamma, \quad \rho(\bar{x},x_0) \leq \frac{U(x_0) - U(\bar{x})}{k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности предположим, что выполнено $\gamma = 0$ и $U(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon(r) := U(x_0)$, а $\lambda = \frac{U(x_0)}{k}$. Применяя теорему 2.1, получим, что существует $\bar{x} \in X$ такой, что

$$U(\bar{x}) \leq U(x_0), \quad \rho(\bar{x},x_0) \leq \lambda,$$

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x,\bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}. \tag{2.4}$$

Покажем, что точка $\bar{x}$ является искомой. Достаточно доказать, что $U(\bar{x}) = 0$.

Предположим противное, пусть $U(\bar{x}) > 0$. Тогда, по сопряженному условию Каристи, существует такой $x' \in X$, $x' \neq \bar{x}$, что

$$U(x') + k\bar{\rho}(\bar{x},x') \leq U(\bar{x}).$$

Получили противоречие со строгим неравенством (2.4). □

References

[1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Dokl. RAS*, **94**:1 (2016), 434–437.

[2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975. [M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreiko, *Geometric Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[4] J. P. Aubin, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, J. Wiley & Sons, N.Y., 1984.

[5] A. V. Arutyunov, B. D. Gel'man, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition. Existence of solutions to equations and minima of functions in metric spaces”, *Fixed Point Theory*, **20**:1 (2019), 31–58.

[6] R. Vinter, *Optimal Control*, Birkhauser, Boston, 2000.

[7] A. V. Arutyunov, V. A. de Oliveira, F. L. Pereira, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the solvability of implicit differential inclusions”, *Applicable Analysis*, **94**:1 (2015), 129–143.

[8] A. V. Arutyunov, N. T. Tynyanskii, “The maximum principle in a problem with phase constraints”, *Soviet Journal of Computer and System Sciences*, **23** (1985), 28–35.

[9] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

[10] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer–Verlag, N.Y., 2003.

[11] M. A. Khamsi, “Remarks on Caristi's fixed point theorem”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **71**:1-2 (2009), 227–231.

[12] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, “Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points”, *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.

[13] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities”, *St. Petersburg Mathematical Journal*, **30**:1 (2019), 73–94.

[14] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, N. G. Pavlova, “Equilibrium price as a coincidence point of two mappings”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:2 (2013), 158–169.

[15] J. M. Borwein, D. Preiss, “A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303**:2 (1987), 517–527.

[16] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[17] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Variational Principles in Nonlinear Analysis and Their Generalization”, *Mathematical Notes*, **103**:5-6 (2018), 1014–1019.

[18] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.

[19] R. Sengupta, S. Zhukovskiy, “Ekeland's Variational Principle for Functions Unbounded from below”, *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, **9**:4 (2020), 553–558.

[20] S. Cobzas, “Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle”, *Topology and its Applications*, **158**:8 (2011), 1073–1084.

Информация об авторе

Сенгупта Ричик, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Сколковский институт науки и технологий, г. Москва; научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: r.sengupta@skoltech.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9916-8177

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 08.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Richik Sengupta, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow; Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: r.sengupta@skoltech.ru.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9916-8177

Received 15.07.2023
Reviewed 08.09.2023
Accepted for press 12.09.2023