

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Максимов В.П., 2023

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267>

УДК 517.929



К вероятностному описанию ансамбля траекторий непрерывно-дискретной системы управления с неполной информацией

Владимир Петрович МАКСИМОВ

ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614068, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с непрерывным и дискретным временем и дискретной памятью. Система содержит неопределенность в описании операторов, реализующих управляющие воздействия. Эта неопределенность является следствием случайных возмущений в предположении об их равномерном распределении на известных интервалах. При каждой реализации случайных возмущений возникает соответствующая траектория, а в совокупности – ансамбль траекторий, для которого дается покомпонентное вероятностное описание в виде семейства плотностей вероятности, параметризованных текущим временем. Для построения этих функций используется полученное ранее представление оператора Коши рассматриваемой системы. Предлагаемое вероятностное описание возмущений для траекторных переменных позволяет находить их стандартные характеристики, включая математическое ожидание и дисперсию, а также весь возможный диапазон значений. Результаты носят конструктивный характер и допускают эффективную компьютерную реализацию. Приводится иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, гибридные системы с последствием, системы с неполной информацией

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00517, <https://rscf.ru/project/22-21-00517/>.

Для цитирования: Максимов В.П. К вероятностному описанию ансамбля траекторий непрерывно-дискретной системы управления с неполной информацией // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 256–267.
<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267>

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. P. Maksimov, 2023

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267>

To probabilistic description of an ensemble of trajectories to a continuous-discrete control system with incomplete information

Vladimir P. MAKSIMOV

Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614068, Russian Federation

Abstract. A linear control system with continuous and discrete times and discrete memory is considered. The model includes an uncertainty in the description of operators implementing control actions. This uncertainty is a consequence of random disturbances under the assumption of their uniform distribution over known intervals. With each implementation a corresponding trajectory arises from random perturbations, and in the aggregate - an ensemble of trajectories, for which a component-by-component probabilistic description is given in the form of a set of probability density functions parametrized by the current time. To construct these functions, the previously obtained representation of the Cauchy operator of the system under consideration is used. The proposed probabilistic description of perturbations for trajectory variables allows one to find their standard characteristics, including expectation and variance, as well as the entire possible range of values. The results are constructive in nature and allow for effective computer implementation. An illustrative example is given.

Keywords: functional differential equations, hybrid systems with aftereffect, systems with uncertainty

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00517, <https://rscf.ru/en/project/22-21-00517/>).

Mathematics Subject Classification: 34F05, 34K06, 34K34, 34K35.

For citation: Maksimov V.P. To probabilistic description of an ensemble of trajectories to a continuous-discrete control system with incomplete information. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 256–267. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Основываясь на результатах общей теории функционально-дифференциальных уравнений [1, 2], мы продолжаем исследования [3, 4] и рассматриваем систему управления с непрерывным и дискретным временем и дискретной памятью, сосредоточенной в заданном наборе точек конечного промежутка. Рассматриваемая система содержит неопределенность в описании операторов, реализующих управляющие воздействия. Эта неопределенность является следствием случайных возмущений в предположении об их равномерном распределении на известных интервалах. При каждой реализации случайных возмущений возникает соответствующая траектория, а в совокупности – ансамбль траекторий, для которого дается покомпонентное вероятностное описание в виде семейства плотностей вероятности, параметризованных текущим временем. В зарубежной литературе такое описание связывают с построением так называемой 1-pdf-функции (*first probability density function*). Подробное обсуждение роли и важности построения такой функции при изучении случайных процессов, а также библиографию по этой тематике можно найти в работе [5], в которой приводятся примеры построения 1-pdf-функции для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. В настоящей работе при построении этих функций для рассматриваемого класса систем с последействием используется полученное ранее в [3] представление оператора Коши, дающего представление решений рассматриваемой системы. Предлагаемое вероятностное описание возмущений для траекторных переменных позволяет находить их стандартные характеристики, включая математическое ожидание и дисперсию, а также весь возможный диапазон значений. Полученные для описания плотностей вероятности соотношения допускают эффективную компьютерную реализацию. В заключение приводится иллюстрирующий пример.

1. Описание системы. Постановка задачи

Следуя обозначениям работы [3], введем банаховы пространства, в которых рассматриваются операторы и уравнения, и дадим описание основной системы. Зафиксируем конечный отрезок $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $L^n = L^n[0, T]$ пространство суммируемых функций $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|v\|_{L^n} = \int_0^T |v(s)|_n ds$, где символ $|\cdot|_n$ обозначает норму в \mathbb{R}^n ; $L_2^r = L_2^r[0, T]$ – пространство квадратично суммируемых функций $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \int_0^T u'(s) \cdot v(s) ds$ ($(\cdot)'$ – символ транспонирования); $AC^n = AC^n[0, T]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n} = |x(0)|_n + \|\dot{x}\|_{L^n}$. Далее фиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T$. Обозначим через $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$ пространство функций дискретного аргумента $z : J \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ с нормой $\|z\|_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^\mu |z(t_i)|_\nu$.

Рассматривается непрерывно-дискретная система управления с дискретной памятью

$$\dot{x}(t) = \sum_{j:t_j < t} A_j(t)x(t_j) + \sum_{j:t_j < t} B_j(t)z(t_j) + (Fu)(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$z(t_i) = \sum_{j < i} D_{ij}x(t_j) + \sum_{j < i} H_{ij}z(t_j) + (Gu)(t_i), \quad i = 1, \dots, \mu. \quad (1.2)$$

Здесь столбцы $(n \times n)$ -матриц A_j и $(n \times \nu)$ -матриц B_j принадлежат пространству

L^n ; D_{ij} и H_{ij} — постоянные матрицы размерности $(\nu \times n)$ и $(\nu \times \nu)$ соответственно; $F : L_2^r \rightarrow L^n$, $G : L_2^r \rightarrow FD^\nu(\mu)$ — линейные ограниченные вольтерровы [2] операторы. Дискретность памяти всех операторов, действующих на фазовые переменные в правой части системы (1.1)–(1.2), определяется их конструкцией.

Для системы (1.1)–(1.2) с заданным начальным состоянием

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta \tag{1.3}$$

ставится задача управления, в которой цель управления задается равенством

$$\ell(x, z) = \beta \in \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

где $\ell : AC^n \times FD^\nu(\mu) \rightarrow \mathbb{R}^N$ — линейный ограниченный вектор-функционал.

Результаты об условиях разрешимости задачи (1.1)–(1.4) в классе программных управлений для случая отсутствия ограничений на управление и для случая поточечных полиэдральных ограничений представлены в работах [4, 6–8]. Здесь мы исследуем вопрос о влиянии случайных возмущений операторов F и G на компоненты траекторных переменных x и z при известном управлении u . Без ограничения общности всюду ниже будем считать нулевым начальное состояние системы: $\alpha = 0$, $\delta = 0$.

Определим вид возмущений в действии операторов F и G , ограничиваясь распространенным в прикладных задачах случаем, когда случайные возмущения описываются постоянными случайными параметрами:

$$(Fu)(t) = (F_0u)(t) + \Delta F \cdot u(t), \quad t \in [0, T],$$

$$(Gu)(t_j) = (G_0u)(t_j) + \Delta G_j \cdot \int_0^{t_j} u(s) ds, \quad j = 1, \dots, \mu,$$

где ΔF и ΔG_j — матрицы размерности $n \times r$ и $\nu \times r$, соответственно, элементы ΔF^{ik} и ΔG_j^{ik} которых являются случайными величинами, распределенными равномерно на отрезках $[a^{ik}, b^{ik}]$ и $[a_j^{ik}, b_j^{ik}]$, соответственно. Для сокращения записи это предположение будем записывать в виде $\Delta F^{ik} \sim U^{ik}$ и $\Delta G_j^{ik} \sim U_j^{ik}$. Предполагается, что операторы F_0 и G_0 реализуют управляющие воздействия без искажений.

Система (1.1)–(1.2) является частным случаем общей непрерывно-дискретной системы, детально рассмотренной в [9]. Теорема 1 [9] дает для решения системы (1.1)–(1.2) с нулевыми начальными значениями представление

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} Fu \\ Gu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Fu \\ Gu \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $z = \text{col}(z(t_1), \dots, z(t_\mu))$, C — оператор Коши с блочными компонентами C_{ij} , $i, j = 1, 2$, действующими следующим образом:

$$C_{11} : L^n \rightarrow AC^m; \quad C_{12} : \mathbb{R}^{\nu\mu} \rightarrow AC^m; \quad C_{21} : L^n \rightarrow \mathbb{R}^{\nu\mu}; \quad C_{22} : \mathbb{R}^{\nu\mu} \rightarrow \mathbb{R}^{\nu\mu}.$$

Для рассматриваемого случая явное представление всех компонент C_{ij} в терминах матричных параметров системы (1.1)–(1.2) получено в [3]. Ниже мы воспользуемся следующими представлениями компонент C_{ij} :

$$(C_{11}f)(t) = \int_0^t C_{11}(t, s)f(s) ds; \quad (C_{12}g)(t) = \int_0^t \sum_{j: t_j < t} C_{12}(t, s)g(t_j) ds, \quad t \in [0, T];$$

$$C_{21}^i f = \int_0^{t_i} \sum_{j < i} C_{21}^i(t_j, s) f(s) ds; \quad C_{22}^i g = \sum_{j \leq i} C_{22}^i(j) g(t_j), \quad i = 1, \dots, \mu.$$

Верхний индекс в обозначениях компонент C_{22}^i и C_{22}^i соответствует номеру столбца размерности ν в столбце из $\mathbb{R}^{\nu\mu}$.

Наша задача состоит в том, чтобы для каждой компоненты $x_i(t)$, каждой компоненты $z_i(t_j)$ и фиксированного момента времени ($t \in (0, T]$ для x_i и t_j , $j = 1, \dots, \mu$, для z_i) построить соответствующую функцию плотности вероятности для их случайных возмущений. Каждая компонента содержит детерминированную составляющую $x_i^0(t)$, $z_i^0(t_j)$, соответствующую операторам F_0 и G_0 , и случайную составляющую $\xi_i(t)$, $\eta_i(t_j)$, соответствующую матрицам ΔF и ΔG_j :

$$x_i(t) = x_i^0(t) + \xi_i(t); \quad z_i(t_j) = z_i^0(t_j) + \eta_i(t_j).$$

Отметим, что предположение о равномерном распределении возмущений соответствует случаю минимальной информации о частотах, с которой реализуются конкретные значения. В отличие от нормального распределения, равномерное распределение не сохраняет свой вид при линейных преобразованиях. Особо отметим, что решение рассматриваемой задачи позволяет в каждом временном сечении точно указывать диапазон возможных значений для компонент траектории.

2. Вспомогательные построения. Компонента с непрерывным временем

С учетом представления (1.5) для $\xi_i(t)$ имеем

$$\xi_i(t) = \int_0^t \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^r C_{11}^{i\ell}(t, s) u_k(s) ds \Delta F^{\ell k} + \sum_{j: t_j < t} \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^r \int_0^t C_{12}^{i\ell}(t_j, s) ds \int_0^{t_j} u_k(\tau) d\tau \Delta G_j^{\ell k}. \quad (2.1)$$

Здесь верхние индексы у компонент оператора Коши используются как обычно: первый индекс — номер строки, второй — номер столбца соответствующей матрицы. Для более лаконичной записи этого представления введем обозначения

$${}^{11}\theta_{\ell k}^i(t) = \int_0^t C_{11}^{i\ell}(t, s) u_k(s) ds; \quad {}^{12}\theta_{j\ell k}^i(t) = \int_0^t C_{12}^{i\ell}(t_j, s) ds \int_0^{t_j} u_k(\tau) d\tau,$$

с использованием которых представление (2.1) принимает вид

$$\xi_i(t) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^r {}^{11}\theta_{\ell k}^i(t) \Delta F^{\ell k} + \sum_{j: t_j < t} \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^r {}^{12}\theta_{j\ell k}^i(t) \Delta G_j^{\ell k}. \quad (2.2)$$

Занумеруем все слагаемые в этой линейной комбинации случайных величин $\Delta F^{\ell k}$ и $\Delta G_j^{\ell k}$ последовательно с помощью единого индекса q по следующему правилу: 1) сначала в первой двойной сумме начиная с $\ell = 1$ и нумеруя по $k = 1, \dots, r$, затем для $\ell = 2$, начиная с $r + 1, \dots$ и так далее, заканчивая присвоением номера $q = n \cdot r$; 2) затем во второй тройной сумме — по описанному правилу. При этом сами случайные величины обозначим

d_q , а коэффициенты при них, зависящие от времени, — $\varphi_q^i(t)$. Теперь представление (2.2) записывается в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{q=1}^N \varphi_q^i(t) \cdot d_q. \quad (2.3)$$

Здесь $N = n \cdot r + \nu \cdot \mu \cdot r$. Указанным выше способом перенумеровываются также параметры и обозначения равномерных распределений случайных величин, таким образом, $d_q \sim U[a_q, b_q]$. Представим d_q в виде

$$d_q = (b_q - a_q)c_q + a_q,$$

где $c_q \sim U[0, 1]$. Подставляя это выражение в (2.3), получаем для $\xi_i(t)$ представление в виде суммы линейной комбинации случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0, 1]$, и детерминированного числа:

$$\xi_i(t) = \sum_{q=1}^N \varphi_q^i(t) \cdot (b_q - a_q) \cdot c_q + \sigma_i(t), \quad (2.4)$$

где

$$\sigma_i(t) = \sum_{q=1}^N \varphi_q^i(t) \cdot a_q. \quad (2.5)$$

В пределах этого раздела мы считали зафиксированными индекс i и момент времени t , сохраняя их во всех определяющих соотношениях. Для случайной величины $\xi_i(t)$ требуется вывести соотношение, определяющее ее плотность вероятности $f_{\xi_i}(y, t)$.

3. Вспомогательные построения. Компонента с дискретным временем

Обратимся теперь к компоненте с дискретным временем. Для $\eta_i(t_j)$ имеем

$$\begin{aligned} \eta_i(t_j) = & \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{\mu} ij Q_{21}^{\ell m} \cdot \int_0^{t_\ell} u_k(s) ds \cdot \Delta F^{mk} \\ & + \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{\mu} ij Q_{22}^{\ell m} \cdot \int_0^{t_\ell} u_k(s) ds \cdot \Delta G_\ell^{mk}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь мы воспользовались представлением компонент \mathcal{C}_{21} и \mathcal{C}_{22}^i оператора Коши в виде (см. [10])

$$\mathcal{C}_{21}f = Q_{21} \cdot \left(\int_0^{t_1} f(s) ds, \dots, \int_0^{t_\mu} f(s) ds \right)'; \quad \mathcal{C}_{22}g = Q_{22} \cdot (g(t_1), \dots, g(t_\mu))',$$

где Q_{21} и Q_{22} — постоянные матрицы размерности $(\mu \cdot \nu) \times (\mu \cdot n)$ и $(\mu \cdot \nu) \times (\mu \cdot \nu)$, соответственно. Поясним индексацию элементов в матрице Q_{21} : в обозначении $ij Q_{21}^{\ell m}$ i — номер строки в j -й группе ν -мерных строк, ℓ — номер группы n элементов в i -й строке, m — номер элемента в указанной группе. Такая же нумерация используется в обозначении $ij Q_{22}^{\ell m}$.

Для более лаконичной записи этого представления введем обозначения

$${}^{21}\theta_{mk}^{ij} = {}^{ij}Q_{21}^{\ell m} \cdot \int_0^{t_\ell} u_k(s) ds; \quad {}^{22}\theta_{\ell mk}^{ij} = {}^{ij}Q_{22}^{\ell m} \cdot \int_0^{t_\ell} u_k(s) ds,$$

с использованием которых представление (3.1) принимает вид

$$\eta_i(t_j) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^r {}^{21}\theta_{mk}^{ij} \Delta F^{mk} + \sum_{m=1}^\nu \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^\mu {}^{22}\theta_{\ell mk}^{ij} \Delta G_\ell^{mk}.$$

Применим к этой линейной комбинации случайных величин ΔF^{mk} и ΔG_ℓ^{mk} способ нумерации слагаемых, использованный ранее в выражении для компоненты $\xi_i(t)$, с помощью единого индекса q по следующему правилу: 1) сначала в первой двойной сумме начиная с $m = 1$ и нумеруя по $k = 1, \dots, r$, затем для $m = 2$, начиная с $r + 1, \dots$ и так далее, заканчивая присвоением номера $q = n \cdot r$; 2) затем во второй тройной сумме — по описанному правилу. При этом сами случайные величины обозначим e_q , а коэффициенты при них, зависящие от дискретного времени, — $\psi_q^i(t_j)$. Теперь последнее представление записывается в виде

$$\eta_i(t_j) = \sum_{q=1}^N \psi_q^i(t_j) \cdot e_q. \quad (3.2)$$

Здесь, как и в (2.4), $N = n \cdot r + \mu \cdot \nu \cdot r$. Указанным выше способом перенумеровываются также параметры и обозначения равномерных распределений случайных величин, таким образом, $e_q \sim U[a_q, b_q]$. Представим e_q в виде

$$e_q = (b_q - a_q)c_q + a_q,$$

где $c_q \sim U[0, 1]$. Подставляя полученное выражение в (3.2), получаем для $\eta_i(t_j)$ представление в виде суммы линейной комбинации независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0, 1]$, и детерминированного числа:

$$\eta_i(t_j) = \sum_{q=1}^N \psi_q^i(t_j) \cdot (b_q - a_q) \cdot c_q + \omega_i(t_j), \quad (3.3)$$

где

$$\omega_i(t_j) = \sum_{q=1}^N \psi_q^i(t_j) \cdot a_q. \quad (3.4)$$

Для случайной величины $\eta_i(t_j)$ требуется вывести соотношение, определяющее ее плотность вероятности $f_{\eta_i}(y, t_j)$.

4. Основной результат

Для формулировки основного результата о плотности вероятности для возмущений ξ и η введем два полиэдральных множества, которые строятся по системам функций φ_q , $q = 1, \dots, N$ и ψ_q , $q = 1, \dots, N$, соответственно (см. (2.4), (3.3)).

Для каждого $y_1 \in \mathbb{R}$ определим в \mathbb{R}^{N-1} полиэдральное множество $\mathcal{M}_i(y_1, t)$:

$$\mathcal{M}_i(y_1, t) = \left\{ (y_2, \dots, y_N)' \in \mathbb{R}^{N-1} : 0 \leq y_q \leq 1, q = 2, \dots, N; \right. \\ \left. \frac{1}{\varphi_1^i(t) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot y_1 - 1 \leq \sum_{q=2}^N \frac{\varphi_q^i(t) \cdot (b_q - a_q)}{\varphi_1^i(t) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot y_q \leq \frac{1}{\varphi_1^i(t) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot y_1 \right\}. \quad (4.1)$$

Аналогичным образом определим полиэдральное множество $\mathcal{N}_i(y_1, t_j)$:

$$\mathcal{N}_i(y_1, t_j) = \left\{ (y_2, \dots, y_N)' \in \mathbb{R}^{N-1} : 0 \leq y_q \leq 1, q = 2, \dots, N; \right. \\ \left. \frac{1}{\psi_1^i(t_j) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot y_1 - 1 \leq \sum_{q=2}^N \frac{\psi_q^i(t_j) \cdot (b_q - a_q)}{\psi_1^i(t_j) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot y_q \leq \frac{1}{\psi_1^i(t_j) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot y_1 \right\}. \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. При каждом $t \in [0, T]$ таком, что $\varphi_1^i(t) \neq 0$, функция $f_{\xi_i}(y_1, t)$ компоненты ξ_i определяется равенством

$$f_{\xi_i}(y_1, t) = \frac{\mathbf{V}^{N-1}[\mathcal{M}_i(y_1 - \sigma^i(t), t)]}{|\varphi_1^i(t)| \cdot (b_1 - a_1)}, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{V}^{N-1}[\mathcal{M}]$ — мера Лебега множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{N-1}$, полиэдральное множество \mathcal{M}_i определено равенством (4.1), функции $\varphi_q^i(t)$, $q = 1, \dots, N$ определены равенством (2.4), $\sigma^i(t)$ — равенством (2.5).

При каждом t_j , $j = 1, \dots, \mu$, таком, что $\psi_1^i(t_j) \neq 0$, функция $f_{\eta_i}(y_1, t_j)$ компоненты η_i определяется равенством

$$f_{\eta_i}(y_1, t_j) = \frac{\mathbf{V}^{N-1}[\mathcal{N}_i(y_1 - \omega^i(t_j), t_j)]}{|\psi_1^i(t_j)| \cdot (b_1 - a_1)},$$

где полиэдральное множество \mathcal{N}_i определено равенством (4.2), функции $\psi_q^i(t_j)$, $q = 1, \dots, N$, определены равенством (3.3), $\omega^i(t_j)$ — равенством (3.4).

Доказательство. Доказательство проведем для компоненты ξ_i , для компоненты η_i доказательство проводится аналогично. Определим линейное отображение $\mathbf{F}^i(\cdot, t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\mathbf{F}^i(c, t) = \text{col}(\mathbf{F}_1^i(c, t), \dots, \mathbf{F}_N^i(c, t))$ равенством

$$\mathbf{F}_1^i(c, t) = \sum_{q=1}^N \varphi_q^i(t) \cdot (b_q - a_q) \cdot c_q; \quad \mathbf{F}_q^i(c, t) = c_q, \quad q = 2, \dots, N.$$

При условии $\varphi_1^i(t) \neq 0$ отображение $\mathbf{F}^i(\cdot, t)$ имеет обратное $\Phi^i(y, t) = (\mathbf{F}^i)^{-1}(y, t) = \text{col}(\Phi_1^i(y, t), \dots, \Phi_N^i(y, t))$, ($y = \text{col}(y_1, \dots, y_N)$),

$$\Phi_1^i(y, t) = \frac{1}{\varphi_1^i(t) \cdot (b_1 - a_1)} \cdot (y_1 - \varphi_2^i(t) \cdot (b_2 - a_2)y_2 - \dots - \varphi_N^i(t) \cdot (b_N - a_N)y_N);$$

$$\Phi_q^i(y, t) = y_q, \quad q = 2, \dots, N.$$

Воспользуемся известным утверждением о виде функции распределения для преобразования системы случайных величин (см., например, представление (6.13), с. 131 в [11]), в силу которого имеем

$$f_{\xi_i}(y_1, \dots, y_N, t) = \begin{cases} f_c(\Phi^i(y, t)) \cdot \frac{1}{|\varphi_1^i(t)| \cdot (b_1 - a_1)}, & y : \Phi^i(y, t) \in [0, 1]^N, \\ 0, & y : \Phi^i(y, t) \notin [0, 1]^N. \end{cases}$$

Здесь f_c — плотность вероятности системы N независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Переходя к предельной по отношению к y_2, \dots, y_N плотности вероятности, получаем для искомого распределения:

$$f_{\xi_i}(y_1, t) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{\xi_i}(y_1, \dots, y_N, t) dy_2 \dots dy_N.$$

Отметим, что из определения функции $f_{\xi_i}(y_1, \dots, y_N)$ следует, что при каждом y_1 интеграл в правой части представляет собой интеграл от единицы по полиэдральному множеству $\mathcal{M}_i(y_1, t)$, умноженный на дробь $\frac{1}{|\varphi_1^i(t)|(b_1 - a_1)}$. Таким образом, окончательно получаем равенство (4.3).

Доказательство для компоненты возмущения с дискретным временем повторяет приведенное доказательство с заменой всюду функций $\varphi_q^i(t)$ функциями $\psi_q^i(t_j)$. \square

Отметим, что задача нахождения объема полиэдрального множества решается точно (например, средствами системы компьютерной алгебры Maple), если все коэффициенты и правые части линейной системы неравенств, определяющих полиэдральное множество, являются рациональными числами. Это дает возможность находить значения функций $f_{\xi_i}(y_1, t)$ и $f_{\eta_i}(y_1, t_j)$ в рациональных точках с любой степенью точности.

5. Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.5 x(0) + 0.5 \sin(t) \chi_{(1,4]}(t) x(1) + 0.1 \exp(-0.1t) \chi_{(2,4]}(t) x(2) + 0.1 t^2 \chi_{(3,4]}(t) x(3) \\ &+ 0.3 t z(0) + 0.2 \chi_{(1,4]}(t) z(1) + 0.1 t^2 \chi_{(2,4]}(t) z(2) + 0.15 \chi_{(3,4]}(t) z(3) + \Delta F \cdot u(t), \quad t \in [0, 4], \\ z(i) &= 0.4 x(0) + 0.5 \chi_{(1,4]}(i) x(1) + 0.4 \chi_{(2,4]}(i) x(2) + 0.3 \chi_{(3,4]}(i) x(3) + 0.2 z(0) + 0.2 \chi_{(1,4]}(i) z(1) \\ &+ 0.3 \chi_{(2,4]}(i) z(2) + 0.15 \chi_{(3,4]}(i) z(3) + \Delta G_i \cdot \int_0^i u(s) ds, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Для этой системы имеем (см. [3]):

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{11} f)(t) &= \int_0^t \left\{ 1 + \int_s^t [0.5 \sin(\tau) \chi_{(1,4]}(\tau) + (0.050000000 \tau^2 \right. \\ &+ 0.070807342 \exp(-0.1\tau)) \chi_{(2,4]}(\tau) + (0.139984405 + 0.162851600 \tau^2) \chi_{(3,4]}(\tau) \Big] \chi_{[0,1]}(s) + \\ &+ [0.1 \exp(-0.1\tau) \chi_{(2,4]}(\tau) + (0.060000000 + 0.025918178 \tau^2) \chi_{(3,4]}(\tau) \Big] \chi_{[0,2]}(s) \\ &\left. + [0.1 \tau^2 \chi_{(3,4]}(\tau) \Big] \chi_{[0,3]}(s) \right\} d\tau f(s) ds, \\ (\mathcal{C}_{12} g)(t) &= \int_0^t \left\{ [0.200000000 \chi_{(1,4]}(s) + (0.040000000 \exp(-0.1s) + 0.020000000 s^2) \chi_{(2,4]}(s) + \right. \\ &+ (0.630000000 + 0.088367271 s^2) \chi_{(3,4]}(s) \Big] g(1) + [0.100000000 s^2 \chi_{(2,4]}(s) + \\ &\left. + (0.045000000 + 0.089999999 s^2) \chi_{(3,4]}(s) \Big] g(2) + [0.150000000 \chi_{(3,4]}(s) \Big] g(3) \right\} ds, \end{aligned}$$

$$C_{21}f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.500000000 \int_0^1 f(s) ds \\ 0.933229367 \int_0^1 f(s) ds + 0.400000000 \int_0^2 f(s) ds \\ 1.795075907 \int_0^1 f(s) ds + 0.637754534 \int_0^2 f(s) ds + 0.300000000 \int_0^3 f(s) ds \end{pmatrix},$$

$$C_{22}g = \begin{pmatrix} g(1) \\ 0.200000000 g(1) + g(2) \\ 0.420000000 g(1) + 0.300000000 g(2) + g(3) \\ 0.853101814 g(1) + 0.690000000 g(2) + 0.400000000 g(3) + g(4) \end{pmatrix}.$$

Здесь числовые значения приведены с точностью до 10^{-9} .

Зафиксируем управление $u(t) = t(4 - t)$ и зададим $a_q = -0.1, b_q = 0.1, q = 1, \dots, 4$.

В таком случае представление (2.4) для ξ принимает вид

$$\xi(t) = \varphi_1(t) \cdot 0.2 \cdot c_1 + \dots + \varphi_4(t) \cdot 0.2 \cdot c_4 + \sigma(t),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 5.110544 \cdot \chi_{(2,4]}(t) + 2 \cdot t^2 - 0.333333 \cdot t^3 - 13.446769 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \\ &\quad + 0.450252 \cdot \chi_{(1,4]}(t) - 6.513456 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot \exp(-0.100000 \cdot t) \\ &\quad - 0.833333 \cdot \chi_{(1,4]}(t) \cdot \cos(t) + 0.553307 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t + 0.027778 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3 \\ &\quad + 0.436550 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3; \\ \varphi_2(t) &= 0.049093 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3 + 1.050000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t - 4.475509 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \\ &\quad + 0.011111 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3 - 0.666667 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot \exp(-0.100000 \cdot t) \\ &\quad + 0.456932 \cdot \chi_{(2,4]}(t) + 0.333333 \cdot \chi_{(1,4]}(t) \cdot t - 0.333333 \cdot \chi_{(1,4]}(t); \\ \varphi_3(t) &= 0.160000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3 + 0.240000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t \\ &\quad - 5.040000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) + 0.177778 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3 - 1.422222 \cdot \chi_{(2,4]}(t); \\ \varphi_4(t) &= 1.350000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t - 4.050000 \cdot \chi_{(2,4]}(t); \\ \sigma(t) &= -0.002338 \cdot \chi_{(1,4]}(t) - 0.063866 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t + 0.540245 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \\ &\quad - 0.006667 \cdot \chi_{(1,4]}(t) + 0.006667 \cdot t^3 - 0.040000 \cdot t^2 - 0.082905 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \\ &\quad - 0.012913 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3 - 0.004333 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3 \\ &\quad + 0.143602 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot \exp(-0.100000 \cdot t) + 0.016667 \cdot \chi_{(1,4]}(t) \cdot \cos(t). \end{aligned}$$

Здесь и ниже числовые значения приведены с точностью до 10^{-6} .

Представление о функции плотности вероятности для возмущения ξ компоненты с непрерывным временем дает рис. 1, на котором изображены четыре сечения этой функции.

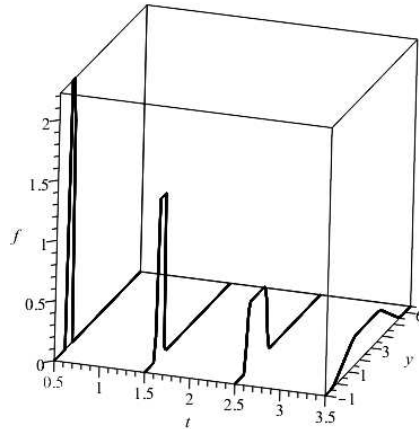


Рис. 1. Сечения $f_\xi(y, 1/2)$, $f_\xi(y, 3/2)$, $f_\xi(y, 5/2)$, $f_\xi(y, 7/2)$

Для возмущения η компоненты с дискретным временем ограничимся сечением функции $f_\eta(y, t_j)$ при $t_j = 3$. В таком случае представление (3.3) принимает вид

$$\eta(3) = \psi_1(3) \cdot 0.200000 \cdot c_1 + \dots + \psi_4(3) \cdot 0.200000 \cdot c_4 + \omega(3),$$

где

$$\psi_1(3) = 0.737743, \quad \psi_2(3) = 0.140000, \quad \psi_3(3) = 0.320000, \quad \psi_4(3) = 1.800000,$$

$$\omega(3) = -1.498872.$$

На рис. 2 плотность вероятности $f_\eta(y, 3)$ изображена так, как она выглядит при последовательном вычислении объема полиэдральных множеств $\mathcal{N}(y_1 - \omega(3), 3)$ с шагом 0.1 по y_1 .

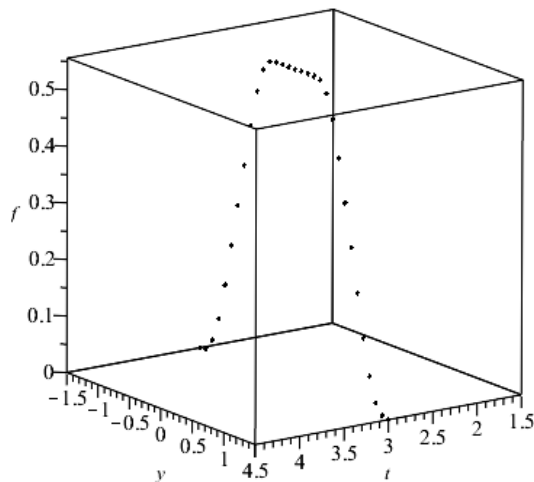


Рис. 2. Сечение $f_\eta(y, 3)$

References

- [1] N. V. Azbelev, L. F. Rakhmatullina, “Theory of linear abstract functional differential equations and applications”, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **8** (1996), 1–102.
- [2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Elements of the Contemporary Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Institute of Computer-Assisted Studies Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].
- [3] V. P. Maksimov, “On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 385–395. [V. P. Maksimov, “On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 385–395 (In English)].
- [4] В. П. Максимов, “О внутренних оценках множеств достижимости для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью”, *Труды ИМИ УрО РАН*, **27**, 2021, 141–151. [V. P. Maksimov, “On internal estimates of reachable sets for continuous-discrete systems with discrete memory”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **27**, 2021, 141–151 (In Russian)].
- [5] J. Calatayud, J.-C. Cortes, M. Jornet, A. Navarro–Quiles, “Solving random ordinary and partial differential equations through the probability density function: theory and computing with applications”, *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals, Problems and Challenges, Understanding Complex Systems*, eds. V. Sadovnichiy, Z. Zgurovsky, Springer, Cham, 2019, 261–282.
- [6] В. П. Максимов, “Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики”, *Прикладная математика и вопросы управления*, 2019, № 4, 124–135. [V. P. Maksimov, “Attainability values of on-target functionals in economic dynamics problems”, *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2019, № 4, 124–135 (In Russian)].
- [7] Е. И. Бравуи, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, “Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect”, *Mathematics*, **8**:10 (2020), 1832.
- [8] В. П. Максимов, “Непрерывно-дискретные динамические модели”, *Уфимский математический журнал*, **13**:3 (2021), 97–106; англ. пер.: V. P. Maksimov, “Continuous-discrete dynamic models”, *Ufa Math. J.*, **13**:3 (2021), 95–103.
- [9] V. P. Maksimov, “The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:1 (2019), 40–51. [V. P. Maksimov, “The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:1 (2019), 40–51 (In English)].
- [10] V. P. Maksimov, “Constructive study of controllability for a class of continuous-discrete systems with an uncertainty”, *Functional Differential Equations*, **29**:3-4 (2022), 183–195.
- [11] В. Я. Дерр, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Лань, М., 2021. [V. Ya. Derr, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Lan’ Publ., Moscow, 2021 (In Russian)].

Информация об авторе

Максимов Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация. E-mail: maksimov@econ.psu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0051-3696>

Поступила в редакцию 09.06.2023 г.
 Поступила после рецензирования 05.09.2023 г.
 Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Vladimir P. Maksimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation. E-mail: maksimov@econ.psu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0051-3696>

Received 09.06.2023
 Reviewed 05.09.2023
 Accepted for press 12.09.2023