

© Усков В.И., 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-68-76

УДК 517.956



Решение задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Solution of a problem for a system of third order partial differential equations

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных третьего порядка. Уравнениями и системами уравнений со старшей смешанной третьей производной описывается теплообмен в почве, осложненный движением почвенной влаги, квазистационарные процессы в двухкомпонентной полупроводной плазме и т. д. Система сводится к дифференциальному уравнению с вырожденным оператором при старшей производной по выделенной переменной в банаховом пространстве. Этот оператор обладает свойством иметь число 0 нормальным собственным числом, позволяющим расщеплять исходное уравнение на уравнения в подпространствах. Получены условия, при которых решение задачи существует, единственно; найдена аналитическая формула.

Ключевые слова: начально-краевая задача; система уравнений в частных производных третьего порядка; смешанная производная; 0 — нормальное собственное число; дифференциальное уравнение в банаховом пространстве; решение

Для цитирования: Усков В.И. Решение задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 68–76. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-68-76.

Abstract. An initial-boundary value problem for a system of third-order partial differential equations is considered. Equations and systems of equations with the highest mixed third derivative describe heat exchange in the soil complicated by the movement of soil moisture, quasi-stationary processes in a two-component semiconductor plasma, etc. The system is reduced to a differential equation with a degenerate operator at the highest derivative with respect to the distinguished variable in a Banach space. This operator has the property of having 0 as a normal eigenvalue, which makes it possible to split the original equations into an equation in subspaces. The conditions are obtained under which a unique solution to the problem exists; the analytical formula is found.

Keywords: initial-boundary value problem; system of third order partial differential equations; mixed derivative; 0 as normal eigenvalue; differential equation in Banach space; solution

For citation: Uskov V.I. Resheniye zadachi dlya sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh tret'yego poryadka [Solution of a problem for a system of third order partial differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 68–76. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-68-76. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследуется задача:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^2\right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(2\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u_2}{\partial t} = B_{11}u_1(x, t) + B_{12}u_2(x, t) + f_1(x, t), \quad (0.1)$$

$$\left(2\beta \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^2\right) \frac{\partial u_2}{\partial t} = B_{21}u_1(x, t) + B_{22}u_2(x, t) + f_2(x, t), \quad (0.2)$$

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= g_1(x), \quad u_2(x, 0) = g_2(x), \\ g_1(0) &= g_1(2\pi/\gamma), \quad g_2(0) = g_2(2\pi/\gamma), \end{aligned} \quad (0.3)$$

$$u_1(0, t) = u_1(2\pi/\gamma, t), \quad u_2(0, t) = u_2(2\pi/\gamma, t), \quad (0.4)$$

где заданы постоянные α, β, γ , $\gamma > 0$, $\gamma^2 = -\alpha\beta > 0$; линейные стационарные операторы B_{ij} , $i, j = 1, 2$, действующие в пространстве $C^2(\mathfrak{X})$; достаточно гладкие функции $f_i(x, t)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2$; $(x, t) \in \Pi = \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$, $\mathfrak{X} = [0; 2\pi/\gamma]$, $\mathfrak{T} = [0; T]$.

Под решением задачи подразумеваются функции $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$

- 1) дважды непрерывно дифференцируемые по x при каждом $t \in \mathfrak{T}$,
- 2) единожды непрерывно дифференцируемые по t при каждом $x \in \mathfrak{X}$,
- 3) удовлетворяющие равенству $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$ в Π ,
- 4) удовлетворяющие (0.1)–(0.4) в Π .

Уравнениями и системами уравнений со старшей смешанной третьей производной описывается теплообмен в почве, осложненный движением почвенной влаги (уравнение Аллера) [1], квазистационарные процессы в двухкомпонентной полупроводной плазме [2] и т. д.

Задача записывается в векторном виде с квадратом вырожденного оператора при старшей производной по выделенной переменной t ; этот оператор обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, 0-NEV) [3]. Данное свойство позволяет расщепить исходное уравнение на уравнения в подпространствах и решать эти уравнения.

Уравнение, не разрешенное относительно старшей производной (далее, УНОП), называется алгебро-дифференциальным, дескрипторным. Задачи для таких уравнений с различными видами вырожденных операторов изучаются в различных работах (см., например, [4–7]). УНОП в частных производных с выделенной производной относятся к уравнениям соболевского типа [8]. Решению задач для таких уравнений посвящены, например, работы [9, 10].

1. Решение линейного уравнения с вырожденным оператором

Рассмотрим уравнение

$$A^2v = w, \quad (1.1)$$

где $A : E \rightarrow E$ — линейный оператор, E — банахово пространство, A является 0-NEV оператором, $v \in E \cap \text{dom } A^2$ — искомый элемент, $w \in E$ — заданный элемент.

Пространство E раскладывается в прямую сумму

$$E = M \oplus N,$$

где N — корневое подпространство оператора A , а M — инвариантное подпространство, дополнительное к N . Рассматривается случай: $\dim \text{Ker } A = n$, элементы ядра не имеют присоединенных элементов, т.е. корневое подпространство $N = \text{Ker } A$. Обозначим Q, P — проекторы на M, N соответственно, $\tilde{A}$ — сужение оператора A на $M \cap \text{dom } A^2$.

Для решения уравнения (1.1) разложим элементы v, w в суммы элементов в подпространствах

$$v = Qv + Pv, \quad (1.2)$$

$$w = Qw + Pw$$

и подставим их в это уравнение. Получим

$$A^2Qv = Qw + Pw,$$

так как $A(Pv) = 0$. Условие $M \cap N = \{0\}$ и инвариантность M относительно A приводят к следующим двум уравнениям в подпространствах M и N , соответственно:

$$\tilde{A}^2Qv = Qw,$$

$$Pw = 0. \quad (1.3)$$

Обратим первое уравнение и запишем его в виде

$$Qv = Hw, \quad (1.4)$$

где

$$H = (\tilde{A}^{-1})^2Q. \quad (1.5)$$

Подставив (1.4) в (1.2), получим

$$v = Hw + Pv \quad \forall Pv \in \text{Ker } A. \quad (1.6)$$

Верно и обратное: при выполнении (1.3) подстановка (1.2), (1.4) в уравнение (1.1) обращает его в тождество.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 1.1. Уравнение (1.1) равносильно системе (1.6), (1.3).

Теперь разложим элемент ядра по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. В N вводится скалярное произведение так, чтобы

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (1.7)$$

Применение функционалов $\langle (\cdot), e_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$, к элементу Pw в равенстве (1.3) позволяет переформулировать лемму 1.1 следующим образом.

Лемма 1.2. *При выполнении (1.7) уравнение (1.1) равносильно системе (1.6) и соотношениям*

$$\langle Pw, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2. О матрично-дифференциальном операторе

Рассматривается линейный оператор

$$A = \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & \alpha \\ \beta & \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$\text{dom } \mathbb{A} = \left\{ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}), y_i(0) = y_i(2\pi/\gamma), i = 1, 2 \right\},$$

действующий в банаховом пространстве

$$E = \left\{ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C(\mathfrak{X}), i = 1, 2 \right\}. \quad (2.1)$$

В работе [11] установлено, что оператор $\mathbb{A}$ обладает свойством 0-NEV; при этом доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Элементы ядра оператора $\mathbb{A}$ не имеют присоединенных элементов.*

В силу леммы 2.1, корневое подпространство оператора $\mathbb{A}$ — это

$$N = \text{Ker } \mathbb{A} = \{c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x), c_1, c_2 \in \mathbb{C}\},$$

$$e_1(x) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma x) \\ \frac{\gamma}{\alpha} \sin(\gamma x) \end{pmatrix}, \quad e_2(x) = \begin{pmatrix} \sin(\gamma x) \\ -\frac{\gamma}{\alpha} \cos(\gamma x) \end{pmatrix}.$$

Базис $\{e_1(x), e_2(x)\}$ ортонормируется (условие (1.7)) введением в N скалярного произведения

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{pmatrix} \right\rangle = v_1(x)w_1(x) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} v_2(x)w_2(x). \quad (2.2)$$

Проектор P равен

$$P(x) = \begin{pmatrix} J_1(x) & J_2(x) \\ \frac{\beta}{\alpha} J_2(x) & J_1(x) \end{pmatrix},$$

где

$$J_1(x)(\cdot) = \frac{\gamma}{2\pi}(\cos(\gamma x)J_{11}(\cdot) + \sin(\gamma x)J_{12}(\cdot)), \quad J_2(x)(\cdot) = -\frac{\alpha}{2\pi}(\sin(\gamma x)J_{11}(\cdot) - \cos(\gamma x)J_{12}(\cdot)),$$

$$J_{11}(\cdot) = \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} (\cdot) \cos(\gamma s) ds, \quad J_{12}(\cdot) = \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} (\cdot) \sin(\gamma s) ds. \quad (2.3)$$

Для дальнейших вычислений найдем квадрат оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 & 2\alpha \frac{d}{dx} \\ 2\beta \frac{d}{dx} & \frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Его область определения

$$\text{dom } \mathbb{A}^2 = \{y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C^2(\mathfrak{X}), y_i(0) = y_i(2\pi/\gamma), i = 1, 2\}.$$

В силу леммы 2.1, для определяемого формулой (1.5) оператора получим представление в виде матрицы

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

с элементами

$$H_{11}(x) = J_3(x) - \frac{\gamma}{2\pi}J_4(x), \quad H_{12}(x) = \frac{\gamma}{\beta}J_5(x) + \frac{\alpha}{2\pi}J_6(x),$$

$$H_{21}(x) = \frac{\beta}{\alpha}H_{12}(x), \quad H_{22}(x) = H_{11}(x),$$

где

$$J_3(x) = \int_x^{\frac{2\pi}{\gamma}} \int_s^{\frac{2\pi}{\gamma}} (\cdot) \cos(\gamma(x - s_1)) ds_1 ds, \quad J_4(x) = \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \int_s^{\frac{2\pi}{\gamma}} (\cdot) \cos(\gamma(x - s_1)) s ds_1 ds,$$

$$J_5(x) = \int_x^{\frac{2\pi}{\gamma}} \int_s^{\frac{2\pi}{\gamma}} (\cdot) \sin(\gamma(x - s_1)) ds_1 ds, \quad J_6(x) = \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \int_s^{\frac{2\pi}{\gamma}} (\cdot) \sin(\gamma(x - s_1)) s ds_1 ds.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Операторы P, H ограничены.

3. Разрешение дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$A^2 \frac{du}{dt} = Bu(t) + F(t), \quad (3.1)$$

где $A, B : E \rightarrow E$ — замкнутые линейные стационарные операторы, $\overline{\text{dom}} A^2 = E$, $\overline{\text{dom}} B = E$, A — 0-NEV оператор, $F(t)$ — заданная достаточно гладкая функция со значениями в E .

Рассматривается случай: $\dim \text{Ker } A = n = 2$, элементы ядра не имеют присоединенных элементов.

В силу леммы 1.2 уравнение (3.1) равносильно системе

$$\frac{du}{dt} = H(Bu(t) + F(t)) + \sum_{i=1}^2 c_i(t)e_i, \quad (3.2)$$

$$\langle P(Bu(t) + F(t)), e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.3)$$

где $c_i(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, которые надлежит найти.

У с л о в и е 3.1. Функция $F(t)$ непрерывно дифференцируема.

Дифференцирование соотношений (3.3) и подстановка выражения (3.2) в эти соотношения при выполнении условия 3.1 приводят к системе относительно $c_i(t)$

$$\sum_{i=1}^2 c_i(t)d_{ij} = -K_j HBx(t) + F_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (3.4)$$

в обозначениях

$$K_j = \langle PB(\cdot), e_j \rangle, \quad F_j(t) = -K_j HF(t) - \langle PF'(t), e_j \rangle, \quad d_{ij} = K_j e_i, \quad i, j = 1, 2.$$

Далее определим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

и обозначим ее определитель через $\Delta = \det D$.

У с л о в и е 3.2.

$$\Delta \neq 0.$$

При выполнении условия 3.2 система (3.4) однозначно разрешима. Подстановка ее решения в уравнение (3.2) приводит к уравнению

$$\frac{du}{dt} = Ru(t) + \Phi(t) \quad (3.6)$$

в обозначениях

$$\begin{aligned} R(\cdot) &= HB(\cdot) + \sum_{i=1}^2 R_i(\cdot)e_i, & \Phi(t) &= HF(t) + \sum_{i=1}^2 \Phi_i(t)e_i, \\ R_1(\cdot) &= -\Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} K_1 HB(\cdot) & d_{21} \\ K_2 HB(\cdot) & d_{22} \end{pmatrix}, & R_2(\cdot) &= \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} K_1 HB(\cdot) & d_{11} \\ K_2 HB(\cdot) & d_{12} \end{pmatrix}, \\ \Phi_1(t) &= \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} F_1(t) & d_{21} \\ F_2(t) & d_{22} \end{pmatrix}, & \Phi_2(t) &= -\Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} F_1(t) & d_{11} \\ F_2(t) & d_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом получено следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия 3.1 и 3.2. Тогда уравнение (3.1) равносильно системе (3.6), (3.7) и (3.3).

4. Решение задачи Коши для уравнения (3.1)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.1) на $\mathfrak{T}$:

$$u(0) = u^0 \in E. \quad (4.1)$$

У с л о в и е 4.1. Операторы PB , HB ограничены.

У с л о в и е 4.2. Функции $PF'(t)$, $HF(t)$ ограничены.

При выполнении этих условий, применяя неравенство треугольника и неравенство Коши–Буняковского на элементах $v(x) \in E$ (формулы (3.7), (2.2), $\|e_i\| = 1$), получаем следующие оценки:

$$|K_j HBv(x)| \leq \|PB\| \|HB\| \|v\|, \quad |R_j v(x)| \leq \mu_{j+2} \|PB\| \|HB\| \|v\|, \quad |\Phi_j(t)| \leq \mu_j \mu_5, \quad j = 1, 2,$$

в обозначениях

$$\begin{aligned} \mu_1 &= |\Delta^{-1}|(|d_{21}| + |d_{22}|) > 0, \quad \mu_2 = |\Delta^{-1}|(|d_{11}| + |d_{12}|) > 0, \\ \mu_3 &= \mu_1 \|PB\| \|HB\| > 0, \quad \mu_4 = \mu_2 \|PB\| \|HB\| > 0, \\ \mu_5 &= \|PB\| \|HF(t)\| + \|PF'(t)\| > 0, \quad \mu_6 = \|HB\| + \mu_1 + \mu_2 > 0, \end{aligned}$$

влекущие искомые оценки

$$\|Rv\| \leq \mu_6 \|v\|, \quad \|\Phi(t)\| \leq \|HF(t)\| + \mu_5(\mu_1 + \mu_2).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Функционал R и функция $\Phi(t)$ ограничены.*

Применение лемм 3.1, 4.1 и результатов монографии [12] приводит к следующему результату.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. Тогда решение задачи (3.1), (4.1) существует при выполнении условий*

$$\langle P(Bu^0 + F(0)), e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4.2)$$

Это решение единственно и определяется формулой

$$u(t) = \exp(tR)u^0 + \int_0^t \exp((t-\tau)R)\Phi(\tau)d\tau. \quad (4.3)$$

Оно обладает свойством

$$\langle P(Bu(t) + F(t)), e_j \rangle \equiv 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

5. Решение задачи (0.1)–(0.4)

Задачу (0.1)–(0.4) относительно искомой функции $u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$, можно записать в виде задачи Коши (3.1), (4.1) с операторами $A^2 = \mathbb{A}^2$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, начальной функцией $u^0(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ и заданной функцией $f(x, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, t) \\ f_2(x, t) \end{pmatrix}$.

Применим к ней результаты, полученные выше.

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{(1)}(x) &= B_{ij}(\cos(\gamma x)), & \varphi_{ij}^{(2)}(x) &= B_{ij}(\sin(\gamma x)), & i, j &= 1, 2, \\ \psi_{11}(x) &= \frac{\gamma}{2\pi} \varphi_{11}^{(1)}(x) - \frac{\beta}{2\pi} \varphi_{12}^{(2)}(x), & \psi_{12}(x) &= \frac{\alpha}{2\pi} \varphi_{21}^{(1)}(x) + \frac{\gamma}{2\pi} \varphi_{22}^{(2)}(x), \\ \psi_{21}(x) &= \frac{\gamma}{2\pi} \varphi_{11}^{(2)}(x) + \frac{\beta}{2\pi} \varphi_{12}^{(1)}(x), & \psi_{22}(x) &= \frac{\alpha}{2\pi} \varphi_{21}^{(2)}(x) - \frac{\gamma}{2\pi} \varphi_{22}^{(1)}(x). \end{aligned}$$

Определим матрицы

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & -J_{11} \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x) & \psi_{21}(x) \\ \psi_{12}(x) & \psi_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где J_{ij} , $i, j = 1, 2$, заданы формулами (2.3). Определим также матрицу D (см. (3.5)) соотношением

$$D(x) = \mathcal{J}\Psi(x). \quad (5.1)$$

Используя обозначения $h_i(x) = \sum_{j=1}^2 B_{ij}g_j(x)$, $\tilde{f}_i(x, t) = h_i(x) + f_i(x, t)$, $i = 1, 2$, запишем равенства (4.2) в виде

$$\int_0^{2\pi/\gamma} \gamma \tilde{f}_1(s, 0) \begin{pmatrix} \cos(\gamma s) \\ \sin(\gamma s) \end{pmatrix} + \alpha \tilde{f}_2(s, 0) \begin{pmatrix} \sin(\gamma s) \\ -\cos(\gamma s) \end{pmatrix} ds = 0. \quad (5.2)$$

Таким образом получено следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть определитель матрицы, определенной формулой (5.1), отличен от нуля. Пусть функции $\varphi_{ij}^{(1)}(x)$, $\varphi_{ij}^{(2)}(x)$, $i, j = 1, 2$, непрерывны в $\mathfrak{X}$, функции $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ непрерывны по x в $\mathfrak{X}$ и непрерывно дифференцируемы в Π . Тогда при выполнении условия (5.2) решение задачи (0.1)–(0.4) существует, единственно, определяется формулой (4.3) и удовлетворяет условию (4.1).

References

- [1] А. Ф. Чудновский, *Теплофизика почв*, Наука, М., 1976. [A. F. Chudnovskyy, *Teplofizika Pochv*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [2] В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, Наука, М., 1975. [V. L. Ginzburg, A. A. Rухадze, *Volny v Magnitoaktivnoj Plazme*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

- [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопрояженных операторов*, Наука, М., 1965. [I. T. Gohberg, M. G. Krein, *Vvedenie v Teoriyu Linejnyh Nesamosopryazhennyh Operatorov*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].
- [4] В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Наука, Новосибирск, 2003. [V. F. Chistyakov, A. A. Shcheglova, *Izbrannye Glavy Teorii Algebro-Differencial'nyh Sistem*, Nauka Publ., Novosibirsk, 2003 (In Russian)].
- [5] С. П. Зубова, “О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 192–198. [S. P. Zubova, “On the solvability of the Cauchy problem for a descriptor pseudoregular equation in a Banach space”, *Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Maths*, 2013, № 2, 192–198 (In Russian)].
- [6] Г. А. Свиридюк, В. Е. Фёдоров, “Полугруппы операторов с ядрами”, *Вестник Челябинского государственного университета*, 2002, № 6, 42–70. [G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, “Semigroups of operators with kernels”, *Bulletin of the Chelyabinsk State University*, 2002, № 6, 42–70 (In Russian)].
- [7] P. Kunkel, V. Mehrmann, *Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, Germany, 2006.
- [8] А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007. [A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, Yu. D. Pletner, A. G. Sveshnikov, *Linejnye i Nelinejnye Uravneniya Sobolevskogo Tipa*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].
- [9] S. M. Wade, I. B. Paul, “A differentiation index for partial differential algebraic equations”, *SIAM Journal of Scientific Computing*, **21**:6 (2000), 2295–2316.
- [10] Нгуен Хак Диеп, В. Ф. Чистяков, “О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных”, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, **6**:1 (2013), 98–111. [Nguyen Khac Diep, V. F. Chistyakov, “Using Partial Differential Algebraic Equations in Modelling”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **6**:1 (2013), 98–111 (In Russian)].
- [11] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, В. И. Усков, “О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора и их применение”, *Проблемы математического анализа*, 2021, в печати. [S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, V. I. Uskov, “On the degeneracy properties of some matrix differential operator and their application”, *Problems of Mathematical Analysis*, 2021, In print (In Russian)].
- [12] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krein, *Linejnye Differencial'nye Uravneniya v Banahovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторах

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3542-9662>

Information about the authors

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3542-9662>

Поступила в редакцию 27.01.2021 г.
 Поступила после рецензирования 25.02.2021 г.
 Принята к публикации 05.03.2021 г.

Received 27.01.2021
 Reviewed 25.02.2021
 Accepted for press 05.03.2021