ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235
УДК 517.977.1

О существовании допустимых процессов для управляемых систем со смешанными ограничениями

Никита Сергеевич БОРЗОВ[1] **, Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ**[2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392036, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается управляемая система со смешанными ограничениями типа равенств и концевыми ограничениями. Для нее в терминах обобщенного якобиана (производной Кларка) по переменной управления отображения, определяющего ограничения, получены достаточные условия существования непрерывных допустимых позиционных управлений. Доказательство соответствующей теоремы основано на сведении рассматриваемой управляемой системы к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения за счет применения нелокальной теоремы о неявной функции. Затем эта задача сводится к задаче о нахождении неподвижной точки непрерывной функции, определенной на конечномерном замкнутом шаре с последующим применением аналога теоремы Брауэра о неподвижной точке. Кроме того, исследована управляемая система со смешанными ограничениями типа неравенств и концевыми ограничениями. Для нее в терминах первых производных по переменной управления функций, определяющих ограничения, тоже получены достаточные условия существования непрерывных допустимых позиционных управлений. Доказательство соответствующей теоремы проводится за счет перехода от системы гладких ограничений типа неравенств к одному локально липшицевому ограничению типа равенства.

Ключевые слова: управляемые системы, смешанные ограничения, позиционные управления, производная Кларка, неявная функция

Благодарности: Предложение 1.1, предложение 2.1 и замечание 2.1 получены первым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/). Теоремы 1.1 и 2.1 получены вторым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/).

Для цитирования: *Борзов Н.С., Жуковская З.Т.* О существовании допустимых процессов для управляемых систем со смешанными ограничениями // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 227–235. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235

On the existence of admissible processes for control systems with mixed constraints

Nikita S. BORZOV[1] **, Zukhra T. ZHUKOVSKAYA**[2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. A control system with mixed equality-type constraints and end-point constraints is considered. In terms of the generalized Jacobian (Clarke's derivative) with respect to the control variable of the mapping defining the constraints, sufficient conditions for the existence of continuous admissible positional controls are obtained. The proof of the corresponding theorem is based on reducing the control system to a boundary value problem for an ordinary differential equation via a nonlocal implicit function theorem. This problem is then reduced to the problem of finding a fixed point of a continuous mapping defined on a finite-dimensional closed ball and to applying an analogue of Brouwer's fixed point theorem. In addition, a control system with mixed inequality-type constraints and end-point constraints is studied. In terms of the first derivatives with respect to the control variable of the functions that define the constraints, sufficient conditions for the existence of continuous admissible positional controls are also obtained. The proof of the corresponding theorem is carried out by passing from a system of smooth inequality-type constraints to one locally Lipschitz equality-type constraint.

Keywords: control systems, mixed constraints, positional controls, Clarke's derivative, implicit function

Acknowledgements: Proposition 1.1, Proposition 2.1 and Remark 2.1 were obtained by the first author who was supported by a grant of the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). Theorems 1.1 and 2.1 were obtained by the second author who was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042, https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/).

Mathematics Subject Classification: 34H05.

For citation: Borzov N.S., Zhukovskaya Z.T. On the existence of admissible processes for control systems with mixed constraints. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 227–235. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается управляемая система

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = g(t,x,u), \quad t \in [0,\tau],\\
&\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)),\\
&f(t,x,u) = 0, \quad h(t,x,u) \le 0.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Здесь $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\Psi,\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ — это заданные непрерывные отображения и функции, а $\tau > 0$ — это заданное число. Пусть, кроме того, задана точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Непрерывную функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, определенную в некоторой окрестности $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ точки $(0,x_0)$, называют *допустимым позиционным управлением*, если

$$f(t,x,u(t,x)) = 0, \quad h(t,x,u(t,x)) \le 0 \quad \forall\, (t,x) \in \Omega$$

(здесь и далее неравенства для векторов из $\mathbb{R}^s$ понимается покоординатно), и существует непрерывно дифференцируемое решение $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot{x} = g(t,x,u(t,x))$, для которого имеет место равенство $\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau))$.

Непрерывную функцию $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}^m$ называют *допустимым программным управлением*, если имеют место соотношения

$$f(t,x,u(t)) = 0, \quad h(t,x,u(t)) \le 0 \quad \forall\, t \in [0,\tau],$$

в которых неравенство выполняется покоординатно, и существует непрерывно дифференцируемое решение $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot{x} = g(t,x,u(t))$, для которого имеет место равенство $\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau))$. Отметим, что если существует допустимое позиционное управление, то существует и программное управление. Действительно, пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — это допустимое позиционное управление, а $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ — это решение соответствующей краевой задачи. Тогда функция $t \mapsto u(t,x(t))$, $t \in [0,\tau]$ является допустимым программным управлением.

В настоящей работе рассматриваются различные частные случаи (0.1). Для них получены достаточные условия существования допустимых позиционных управлений.

1. Управляемая система с ограничениями типа равенств

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = g(t,x,u), \quad t \in [0,\tau],\\
&\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)),\\
&f(t,x,u) = 0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть заданы числа $R > 0$, $\tau > 0$, $a > 0$ и точка $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ — это заданное открытое множество такое, что для точек (t,x) таких, что $t \in [0,\tau]$ и $|x - x_0| \le R$, имеет место включение $(t,x) \in \Omega$.

Обозначим через $B(\xi,r)$ замкнутый шар с центром в точке $\xi \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r \ge 0$ в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\alpha := \max_{|x-x_0|\le R} |\Psi(x) - x|, \quad \beta := \max_{|x-x_0|\le R} |\Phi(x) + x - 2x_0|,$$

$$R_0 := a^{-1}\max\{|f(t,x,u_0)| :\ t \in [0,\tau],\ |x - x_0| \le R\},$$

$$\gamma := \max\{|g(t,x,u)| :\ t \in [0,\tau],\ |x - x_0| \le R,\ |u - u_0| \le R_0\}.$$

Предположим, что

(H1) отображение $f(t,x,\cdot)$ локально липшицево для любого $(t,x)\in\Omega$.

Обозначим через $\partial_u f(t,x,u)$ производную Кларка отображения $f(t,x,\cdot)$ в точке u (см. [1, § 2.6]). Предположим, что

(H2) многозначное отображение $(t,x,u)\mapsto \partial_u f(t,x,u)$, $(t,x)\in\Omega$, $u\in\mathbb{R}^m$ полунепрерывно сверху.

Приведем условия регулярности, позволяющие в задаче (0.1) снять ограничения типа равенств.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть выполняются предположения* **(H1)**, **(H2)** *и*

(H3) $$\inf_{(t,x)\in\Omega,\ u\in\mathbb{R}^m}\Big(\max\{\kappa\geq 0:\ A\in\partial_u f(t,x,u),\ \ B^n(0,\kappa)\subset AB^m(0,1)\}\Big)>a.$$

Тогда существует непрерывное отображение $u:\Omega\to\mathbb{R}^m$ такое, что

$$f(t,x,u(t,x))=0,\quad |u(t,x)-u_0|\leq a^{-1}|f(t,x,u_0)|\quad \forall\,(t,x)\in\Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим теорему 1.7 о неявной функции из [2]. Полагая $\Sigma:=\Omega$, $\sigma:=(t,x)$, получаем, что выполняются условия **(L1)** – **(L3)** этой теоремы и $\kappa_0\geq a$. Поэтому существует искомая неявная функция $u:\Omega\to\mathbb{R}^m$. □

Теорема 1.1. *Пусть выполняются предположения* **(H1)** – **(H3)** *и*

$$\alpha+\beta<2R,\quad \tau\gamma\leq 2R-\alpha-\beta.$$

Тогда для задачи (1.1) *существует допустимое позиционное управление, которое определено на множестве* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть далее $u(\cdot)$ — это функция, отвечающая утверждению предложения 1.1. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что существует отвечающее управлению $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируемое решение $x(\cdot)$ краевой задачи

$$\dot{x}=G(t,x),\quad t\in[0,\tau],\quad (t,x)\in\Omega,\quad \Psi(x(0))=\Phi(x(\tau)). \tag{1.2}$$

Здесь

$$G(t,x):=g(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in\Omega.$$

Для доказательства разрешимости краевой задачи мы воспользуемся методом, предложенным в [3] для доказательства разрешимости краевых задач для автономных дифференциальных включений. Дальнейшие рассуждения подобны доказательству теоремы 1 из [3] и приводятся для полноты изложения.

Положим

$$\mathcal{M}:=[0,\tau]\times B(x_0,R).$$

В силу неравенства в предложении 1.1 имеем

$$|G(t,x)|\leq\gamma\quad \forall\,(t,x)\in\mathcal{M}.$$

Поэтому по теореме Вейерштрасса существует последовательность непрерывно дифференцируемых отображений $g_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая сходится равномерно к G на множестве $\mathcal{M}$ и такая, что $|g_j(t,x)| \le \gamma$ для всех $(t,x) \in \mathcal{M}$ и для всех номеров j.

Покажем, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ краевая задача

$$\dot{x} = g_j(t,x), \quad \Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)), \quad x(t) \in B(x_0,R), \quad t \in [0,\tau] \tag{1.3}$$

имеет непрерывно дифференцируемое решение $x_j : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$.

Зафиксируем произвольное натуральное число $j \in \mathbb{N}$. Из гладкости отображения g_j и того, что $|g_j(t,x)| \le \gamma$ в силу теорем о существовании и единственности решения (см., например, [4, теоремы II.4.1, II.4.5]) следует, что для любого $z \in B(x_0,R)$ существует единственное решение $\xi(\cdot,z) : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши

$$\dot{x} = g_j(t,x), \quad x(0) = z, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,\tau]. \tag{1.4}$$

Из [5, следствие 1.10.2] вытекает непрерывность отображения $\xi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|\xi(\tau,z) - z| = \left| \int_0^\tau g_j(t,\xi(t,z))\,dt \right| \le \int_0^\tau |g_j(t,\xi(t,z))|\,dt \le \tau\gamma \quad \forall\,(t,z) \in \mathcal{M}. \tag{1.5}$$

Непрерывные отображения $x \mapsto \Psi(x) - x$ и $x \mapsto \Phi(x) + x - 2x_0$, $x \in B(x_0,R)$, ограничены константами α и β, т. е. $|\Psi(x) - x| \le \alpha$ и $|\Phi(x) + x - 2x_0| \le \beta$ для всех $x \in B(x_0,R)$. Поэтому по теореме Титце о продолжении существуют непрерывные отображения $\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\begin{cases} |\widetilde{\Psi}(x) - x| \le \alpha, \quad |\widetilde{\Phi}(x) + x - 2x_0| \le \beta \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n; \\ \Psi(x) = \widetilde{\Psi}(x), \quad \Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) \quad \forall\,x \in B(x_0,R). \end{cases} \tag{1.6}$$

Покажем теперь, что существует решение уравнения

$$\widetilde{\Psi}(z) = \widetilde{\Phi}(\xi(\tau,z)), \quad z \in B(x_0,R) \tag{1.7}$$

с неизвестным z. Сделаем замену $b = z - x_0$ и положим

$$\Upsilon(b) := b - \widetilde{\Psi}(b + x_0) + \widetilde{\Phi}(\xi(\tau, b + x_0)), \quad b \in B(0,R).$$

Тогда уравнение (1.7) принимает вид

$$b = \Upsilon(b), \quad b \in B(0,R). \tag{1.8}$$

Для каждого $b \in \mathbb{R}^n$, для которого $|b| = R$ справедливо неравенство

$$\langle b, \Upsilon(b) \rangle \le R^2. \tag{1.9}$$

Действительно, для $b \in \mathbb{R}^n$, для которых $|b| = R$, имеем

$$\begin{aligned} \langle b, \Upsilon(b) \rangle &= \langle b, b + x_0 - \widetilde{\Psi}(b + x_0) \rangle \\ &\quad + \langle b, \widetilde{\Phi}(\xi(b + x_0, \tau)) + \xi(\tau, b + x_0) - 2x_0 \rangle + \langle b, b + x_0 - \xi(\tau, b + x_0) \rangle - \langle b, b \rangle \\ &\quad \le \alpha R + \beta R + R\tau\gamma - R^2 \le 2R^2 - R^2 = R^2. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство вытекает из первой строки в (1.6), из соотношения (1.5) и из того, что $|b| = R;$ а последнее неравенство вытекает из предположения $\tau\gamma \le 2R - \alpha - \beta$.

Заметим, что

$$b \ne \lambda\Upsilon(b) \quad \forall\,\lambda \in (0,1), \quad \forall\,b \in \mathbb{R}^n: \quad |b| = R. \tag{1.10}$$

Действительно, в противном случае, если $b = \lambda\Upsilon(b)$ для некоторых b и λ, для которых $|b| = R$ и $\lambda \in (0,1)$, то

$$\langle b, \Upsilon(b)\rangle = \langle b, \lambda^{-1}b\rangle = \lambda^{-1}R^2 > R^2,$$

что противоречит (1.9).

Из (1.10) и непрерывности отображения Υ на $B(0,R)$ по теореме Боля о неподвижной точке (см., например, [6, § 5, теорема 7.2]) следует, что существует решение $\bar b \in B(0,R)$ уравнения (1.8). Значит, точка $\bar z := x_0 + \bar b$ является решением уравнения (1.7).

По определению функции $\xi(\cdot)$ функция $x_j(\cdot) := \xi(\cdot, \bar z)$ является решением задачи Коши (1.4). Кроме того, поскольку $\bar z = x_j(0)$, $\xi(\tau, \bar z) = x_j(\tau)$ и $\bar z$ является решением уравнения (1.7), то $\widetilde\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Phi(x_j(\tau))$. Таким образом,

$$\dot x(t) = g_j(t, x(t)) \quad \forall\,t \in [0,\tau], \quad \widetilde\Psi(x(0)) = \widetilde\Phi(x(\tau)), \quad x_j(0) = \bar z \in B(x_0, R). \tag{1.11}$$

Покажем, функция $x_j(\cdot)$ является решением задачи (1.3).

Из первого равенства в (1.11) и того, что $|g_j(t,x)| \le \gamma$, следует, что

$$|x_j(t) - x_j(0)| \le t\gamma, \quad |x_j(\tau) - x_j(t)| \le (\tau - t)\gamma \quad \forall\,t \in [0,\tau] \tag{1.12}$$

(доказательство этих неравенств аналогично рассуждениям в (1.5)).

Для $t \in [0,\tau]$ имеем

$$\begin{aligned} &2|x_j(t) - x_0| \\ &\quad\le \Big|x_j(t) - x(0)\Big| + \Big|x_j(0) - \widetilde\Psi(x_j(0))\Big| + \Big|\widetilde\Phi(x_j(\tau)) + x_j(\tau) - 2x_0\Big| + \Big|x_j(t) - x_j(\tau)\Big| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le t\gamma + \alpha + \beta + (\tau - t)\gamma \le 2R. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство вытекает из неравенства треугольника и того, что $\widetilde\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Phi(x_j(\tau))$ в силу (1.11); второе неравенство вытекает из первой строки в (1.6) и из (1.12); а последнее неравенство вытекает из предположения $\tau\gamma \le 2R - \alpha - \beta$.

Из доказанного неравенства следует, что $x_j(t) \in B(x_0, R)$ для любого $t \in [0,\tau]$. Поэтому

$$\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Phi(x_j(\tau)) = \Phi(x_j(\tau)).$$

Здесь первое и последнее равенства вытекают из второй строки в (1.6), а второе — из второго равенства в (1.11). Из полученного равенства, из тождества в (1.11) следует, что функция $x_j(\cdot)$ является решением краевой задачи (1.3).

Построенная при каждом j последовательность непрерывно дифференцируемых функций $x_j : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Это вытекает из того, что $x_j(\cdot)$ является решением краевой задачи (1.3) и из того, что $|g_j(t,x)| \le \gamma$. Поэтому, по теореме Арцела, существует равномерно сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_j(\cdot)\}$. Переходя к подпоследовательности, не ограничивая общности будем считать, что $\{x_j(\cdot)\}$ сходится равномерно к некоторой функции $\bar x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$.

По построению $\bar{x}(t) \in B(x_0, R) \subset \Omega$ для любого $t \in [0, \tau]$. Кроме того, из того, что g_j сходятся равномерно к G на $\mathcal{M}$, а функции x_j являются решениями задачи (1.3) следует, что $\bar{x}$ является решением краевой задачи (1.2). Таким образом, существующая в силу предложения 1.1 функция $u(\cdot)$ является искомым управлением. □

2. Управляемая система с ограничениями типа неравенств

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = g(t, x, u), \quad t \in [0, \tau] \\ &\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)), \\ &h(t, x, u) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $h = (h_1, ..., h_s)$, $h_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, s}$ — это заданные непрерывные функции.

Управляемая система (2.1) может быть сведена к управляемой системе (1.1) за счет следующего построения. Положим

$$f(t, x, u) = \max_{j=\overline{1,s}} h_j(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{2.2}$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть функция $u(\cdot)$ является допустимым позиционным управлением для управляемой системы* (1.1), *в которой f определено по формуле* (2.2) (*т. е. $k = 1$ и система содержит одно ограничение типа равенства*). *Тогда эта же функция $u(\cdot)$ является допустимым позиционным управлением для управляемой системы* (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(\cdot)$ — это соответствующая управлению $u(\cdot)$ фазовая траектория, т. е.

$$\dot{x}(t) \equiv g(t, x(t), u(t, x(t))), \quad f(t, x(t), u(t, h(t))) \equiv 0, \quad t \in [0, \tau], \quad \Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)).$$

Тогда, из определения функции f следует, что

$$\max_{j=\overline{1,s}} h_j(t, x(t), u(t, x(t))) \equiv 0, \quad t \in [0, \tau].$$

Значит,

$$h_j(t, x(t), u(t, x(t))) \leq 0 \quad \forall\, t \in [0, \tau].$$

Следовательно, $u(\cdot)$ является допустимым позиционным управлением для управляемой системы (2.1). □

Используя это утверждение из теоремы 1.1 выведем достаточные условия существования допустимого управления для системы (2.1).

Теорема 2.1. *Предположим, что отображение $h(t, x, \cdot)$ дифференцируемо для любого $(t, x) \in \Omega$ и его частная производная $\frac{\partial h}{\partial u}(\cdot)$ непрерывна в каждой точке $(t, x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Пусть*

$$\inf\left\{ |A| : A \in \operatorname{conv}\left\{ \frac{\partial h_j}{\partial u}(t, x, u) : j = \overline{1, s} \right\}, \ (t, x) \in \Omega, \ u \in \mathbb{R}^m \right\} > a, \tag{2.3}$$

$$\alpha + \beta < 2R, \quad \tau\bar{\gamma} \leq 2R - \alpha - \beta.$$

Здесь conv *— это выпуклая оболочка множества,*

$$\bar{\gamma} := \max\{|g(t,x,u)| : t \in [0,\tau],\ |x - x_0| \le R,\ |u - u_0| \le \bar{R}_0\},$$

$$\bar{R}_0 := a^{-1} \max\{|f(t,x,u_0)| : t \in [0,\tau],\ |x - x_0| \le R\}.$$

Тогда для задачи (2.1) *существует допустимое позиционное управление, которое определено на множестве* Ω.

Доказательство. Зададим функцию f по формуле (2.2). Покажем, что для функции f выполняются предположения теоремы 1.1.

Предположение **(H1)** выполняется в силу гладкости h по u. Предположение **(H2)** вытекает из гладкости h по u, из очевидного тождества $\partial_u h_j(t,x,u) \equiv \{\frac{\partial h_j}{\partial u}(t,x,u)\}$, и из того, что зависимость множества активных индексов (т. е. номеров j таких, что $h_j(t,x,u) = f(t,x,u)$) от (t,x,u) является полунепрерывной сверху. Предположение **(H3)** вытекает из (2.3). Кроме того, имеем $\alpha + \beta < 2R$ и $\tau\gamma < 2R - \alpha - \beta$, поскольку $\gamma = \bar{\gamma}$ и $R_0 = \bar{R}_0$ по построению.

Таким образом, для функции f выполняются предположения теоремы 1.1. Следовательно, существует функция $u(\cdot)$, которая является допустимым позиционным управлением для системы (2.1). В силу предложения 2.1 эта функция является допустимым позиционным управлением для системы (1.1). □

Замечание 2.1. Если функции h_j не являются гладкими по u, а всего лишь локально липшицевы, и многозначные отображения $\partial_u h^j : \Omega \times \mathbb{R}^m$ полунепрерывны сверху, то для функции f, определенной по формуле (2.2) предположение **(H2)** может нарушаться. Действительно, пусть $n = m = 2$, $s = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $h_1(t,x,u) \equiv u$, $h_2(t,x,u) \equiv t^2 - |u + t^2|$. Тогда $\partial_u f(0,0,0) = \{1\}$ и $\partial_u f(t,0,0) = [-1,1]$ при $t \ne 0$. Значит, предположение **(H2)** нарушается.

References

[1] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, N.Y., 1983.

[2] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Smoothing procedure for lipschitzian equations and continuity of solutions”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2023.

[3] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуовский, “О нелинейных краевых задачах для дифференциальных включений”, *Дифференциальные уравнения*, 2023; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “On nonlinear boundary value problems for differential inclusions”, *Differential Equaitions*, 2023.

[4] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, N.Y., 1972.

[5] H. Cartan, *Differential Calculus*, Kershaw Publ. Company, London, 1971.

[6] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Verlag, New York, 2003.

Информация об авторах

Борзов Никита Сергеевич, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: borzov-nikita@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7439-0405

Information about the authors

Nikita S. Borzov, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: borzov-nikita@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7439-0405

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Зухра Тагировна
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Zukhra T. Zhukovskaya
E-mail: zyxra2@yadex.ru

Received 01.06.2023
Reviewed 07.09.2023
Accepted for press 12.09.2023