

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Базулкина А.А., 2023

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226>

УДК 517.929



Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для вероятностных моделей динамики популяций

Анастасия Андреевна БАЗУЛКИНА

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация. Рассматриваются модели однородных и структурированных популяций, заданные дифференциальными уравнениями, зависящими от случайных параметров. Популяция называется однородной, если она состоит только из одного вида животных или растений, и структурированной, если она содержит $n \geq 2$ различных видов или возрастных классов. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0, \dots, x^n \geq 0\}.$$

В моменты времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$, из этой популяции извлекаются случайные доли ресурса ω_k^i , $i = 1, \dots, n$. Если ω_k^i оказывается больше некоторого значения $u_k^i \in [0, 1)$, то сбор ресурса i -го вида в момент τ_k прекращается, и доля извлеченного ресурса получается равной $\ell_k^i = \min(\omega_k^i, u_k^i)$. Пусть $C^i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида, $X_k^i = x^i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида в момент времени τ_k до сбора; тогда величина дохода в данный момент равна $Z_k \doteq \sum_{i=1}^n C^i X_k^i \ell_k^i$. Исследуются свойства характеристики суммарного дохода, которая определяется как сумма ряда из величин дохода в момент времени τ_k с учетом показателя дисконтирования $\alpha > 0$:

$$H_\alpha(\bar{\ell}, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C^i X_k^i \ell_k^i,$$

где $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$, x_0 — начальный размер популяции. Значение показателя α указывает на то, что стоимость позднее получаемого дохода снижается. Получены оценки суммарного дохода с учетом дисконтирования, выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: структурированная популяция, оценка суммарного дохода

Для цитирования: Базулкина А.А. Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для вероятностных моделей динамики популяций // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 217–226. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. A. Bazulkinina, 2023

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226>

Estimation of total income with discounting for probabilistic models of population dynamics

Anastasia A. BAZULKINA

Vladimir State University

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

Abstract. Models of homogeneous and structured populations given by differential equations depending on random parameters are considered. A population is called homogeneous if it consists of only one animal or plant species, and structured if it contains $n \geq 2$ different species or age classes. We assume that in the absence of exploitation, the dynamics of the population is given by the system of differential equations

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0, \dots, x^n \geq 0\}.$$

At times $\tau_k = kd$, where $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$, random shares of the resource $\omega_k = (\omega_k^1, \dots, \omega_k^n) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n$ are extracted from this population. If ω_k^i is greater than some value $u_k^i \in [0, 1]$, then the collection of the resource of the i -th type stops at the moment τ_k and the share of the extracted resource turns out to be equal to $\ell_k^i \doteq \min(\omega_k^i, u_k^i)$. Let $C^i \geq 0$ be the cost of the resource of the i -th type, $i = 1, \dots, n$, $X_k^i = x^i(kd - 0)$ the quantity of the i -th type of resource at the time τ_k before collection; then the amount of income at the moment equals $Z_k \doteq \sum_{i=1}^n C^i X_k^i \ell_k^i$. The properties of the characteristic of the total income, which is defined as the sum of the series of income values at the time τ_k , taking into account the discounting factor $\alpha > 0$ are investigated:

$$H_\alpha(\bar{\ell}, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C^i X_k^i \ell_k^i,$$

where $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$, x_0 is the initial population size. The value of α indicates that the value of the income received later decreases. Estimates of the total income, taking into account discounting, made with probability one are obtained.

Keywords: structured population, total income estimate

Mathematics Subject Classification: 37H35, 39A50, 49N25, 93C15.

For citation: Bazulkinina A.A. Estimation of total income with discounting for probabilistic models of population dynamics. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 217–226. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Начиная с прошлого века многие авторы занимались исследованием вопросов оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами (см., например, [1]). В настоящее время ведутся активные работы по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций (см. [2–4]). Существует также множество работ, посвященных задачам периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса и задачам оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследованию максимальной эффективности сбора ресурса (см. [5, 6]), получению наибольшей выгоды от эксплуатации популяции, заданной разностными уравнениями (см. [7, 8]). Оценки средней временной выгоды для популяций, заданных дифференциальными уравнениями со случайными параметрами, получены в работах [9, 10]. Понятие суммарного дохода с учетом дисконтирования введено в [11]. Отличие данной статьи от публикаций [9, 10] состоит в том, что здесь рассматривается иная характеристика сбора возобновляемого ресурса — суммарный доход с учетом дисконтирования. Кроме того, в работах [10, 11] рассматриваются только однородные популяции, а в настоящей статье — как однородные, так и структурированные, то есть популяции, разделенные на возрастные группы или отдельные виды. Для данных популяций доказаны теоремы об оценках суммарного дохода с учетом дисконтирования, которые выполнены с вероятностью единица.

1. Основные понятия

Рассмотрим популяцию, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0, \dots, x^n \geq 0\}; \quad (1.1)$$

здесь $g(x)$ — вектор-столбец, координатами которого являются непрерывно дифференцируемые функции $g^1(x), \dots, g^n(x)$. При $n = 1$ популяция однородная, то есть состоит только из одного вида животных или растений. Если $n \geq 2$, то популяцию назовем структурированной, в этом случае она содержит n различных видов или возрастных классов.

Предполагаем, что в моменты времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекаются некоторые случайные доли ресурса $\omega_k = (\omega_k^1, \dots, \omega_k^n) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n$. Если доля добываемого ресурса ω_k^i оказывается больше некоторого значения $u_k^i \in [0, 1]$, то сбор ресурса i -го вида в момент τ_k останавливается; поэтому доля ресурса данного вида, извлекаемого из популяции в момент времени τ_k , равна

$$\ell_k^i \doteq \min(\omega_k^i, u_k^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\ell_k \doteq (\ell_k^1, \dots, \ell_k^n)$, $x^i(kd - 0)$ и $x^i(kd)$ — количество ресурса i -го вида в момент $\tau_k = kd$ до и после сбора соответственно, $(1 - \ell_k)x(kd - 0)$ — вектор с координатами $(1 - \ell_k^1)x^1(kd - 0), \dots, (1 - \ell_k^n)x^n(kd - 0)$. Тогда динамику эксплуатируемой популяции можно описать управляемой системой с импульсным воздействием

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq kd, \quad (1.2)$$

$$x(kd) = (1 - \ell_k)x(kd - 0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Полагаем, что решения системы $\dot{x} = g(x)$ неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях, для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $g^1(x), \dots, g^n(x)$ удовлетворяли условию квазиположительности (см. [12, с. 28]).

Пусть $C^i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида, $i = 1, \dots, n$, $X_k^i = x^i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида в момент времени τ_k до сбора; тогда величина дохода в данный момент равна $Z_k \doteq \sum_{i=1}^n C^i X_k^i \ell_k^i$, $k = 1, 2, \dots$.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [11]). *Суммарным доходом с учетом дисконтирования* называется функция

$$H_\alpha(\bar{\ell}, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C^i X_k^i \ell_k^i,$$

где $\bar{\ell} \doteq (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$, x_0 — начальный размер популяции, $\alpha > 0$ — показатель дисконтирования. Значение показателя α указывает на то, что стоимость позднее получаемого дохода снижается.

З а м е ч а н и е 1.1. В данной статье применяем вероятностную модель $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, описанную в работах [9, 10]. Приведем краткое описание данной модели. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0, 1]^n$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств, на которой задана вероятностная мера $\tilde{\mu}$. Определим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)\}$, где $\omega_k \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \sigma = (\omega_1 \in A_1, \dots, \omega_k \in A_k)\}, \quad \text{где } A_j \in \tilde{\mathfrak{A}}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

и определим меру $\tilde{\mu}(E_k) = \tilde{\mu}(A_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(A_k)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова [13, с. 43] на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ , которая является продолжением меры $\tilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

2. Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для модели однородной популяции

Рассмотрим однородную популяцию, которая при отсутствии эксплуатации задана дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in [0, +\infty),$$

и обозначим через $\varphi(t, x)$ решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Если $u_k = u \in [0, 1]$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то $X_k = x(kd - 0)$ — количество ресурса до сбора, удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$X_{k+1} = \varphi(d, (1 - u)X_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $X_1 = \varphi(d, x_0)$. Отметим, что при $n = 1$ можем предположить, что стоимость ресурса $C_1 = 1$, поэтому суммарный доход с учетом дисконтирования равен

$$H_\alpha(\bar{\ell}, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \ell_k e^{-\alpha k}, \quad \text{где } \alpha > 0.$$

У с л о в и е 2.1. Предположим, что уравнение (1.1) имеет решения $\varphi(t, A) \equiv A > 0$ и $\varphi(t, 0) \equiv 0$.

Напомним, что $X(u)$ называется *неподвижной точкой* уравнения (2.1), если имеет место соотношение $X(u) = \varphi(d, (1-u)X(u))$. В статье [14] доказаны следующие условия существования положительной неподвижной точки уравнения (2.1):

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие 2.1 и неравенство

$$(1-u)\varphi'_x(d, 0) > 1. \quad (2.2)$$

Тогда уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$ такую, что $0 < X(u) \leq A$.

Если уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u) > 0$, то определим $x(u) \doteq (1-u)X(u)$. Обозначим $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots)\}$, где $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 2.2. Предположим, что выполнено условие 2.1 и неравенство (2.2). Тогда для любого $x_0 \in [x(u), A]$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что для всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место неравенство

$$X(u) \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k e^{-\alpha k} \leq H_{\alpha}(\bar{\ell}, x_0) \leq A \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k e^{-\alpha k}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что при выполнении неравенства (2.2) существует неподвижная точка $X(u)$ уравнения (2.1) и $0 < X(u) \leq A$. Тогда $0 < x(u) \leq X(u) \leq A$. Выберем управления $u_k = 1 - \frac{x(u)}{X(u)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку функция $\varphi(d, x)$ возрастает (см. [14]), то для $x_0 \in [x(u), A]$ имеем

$$X(u) = \varphi(d, x(u)) \leq \varphi(d, x_0) = X_1 \leq \varphi(d, A) = A.$$

Таким образом, если $u_1 = 1 - \frac{x(u)}{X(u)}$, то $X(u) \leq X_1 \leq A$. Поэтому, так как $\ell_1 = \min(\omega_1, u) \leq u$, имеем

$$x(u) = X(u)(1-u) \leq X_1(1-\ell_1) = x_1 \leq A,$$

то есть $x_1 \in [x(u), A]$. Аналогично получаем, что при $u_k = 1 - \frac{x(u)}{X(u)}$, $k = 1, 2, \dots$, выполнены неравенства

$$X(u) \leq X_k \leq A, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Из предыдущего неравенства и определения суммарного дохода следует, что для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено (2.3). $\square$

Предположим, что в разных опытах появились различные случайные последовательности $\sigma^{(p)} \doteq \{\omega_1^{(p)}, \dots, \omega_k^{(p)}, \dots\}$, также определим $\bar{\ell}^{(p)} \doteq (\ell_1^{(p)}, \dots, \ell_k^{(p)}, \dots)$, где $p = 1, 2, \dots$. Для каждой последовательности $\bar{\ell}^{(p)}$ реализуется свое значение суммарного дохода, которое равно

$$H_{\alpha}(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(p)} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Обозначим через $M\ell(u)$ математическое ожидание случайных величин $\ell_k = \min\{\omega_k, u_k\}$, где $u_k = 1 - \frac{x(u)}{X(u)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие 2.1. Тогда для любого $x_0 \in [x(u), A]$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$\frac{X(u)M\ell(u)}{e^\alpha - 1} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \leq \frac{AM\ell(u)}{e^\alpha - 1}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Так как случайные величины ω_k^p , $p = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены, то и случайные величины $\ell_k^{(p)} = \ell(\omega_k^p, u)$, $p = 1, 2, \dots$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ также независимы и имеют одинаковое распределение. Поэтому из усиленного закона больших чисел Колмогорова [12, с. 418] следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено следующее равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \ell_k^{(p)} = M\ell(u), \quad k = 1, 2, \dots,$$

из которого получаем, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k} = \frac{M\ell(u)}{e^\alpha - 1}. \quad (2.6)$$

Из неравенства (2.4) следует, что

$$X(u) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \leq A \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k}. \quad (2.7)$$

Таким образом, из (2.6) и (2.7) получаем, что неравенство (2.5) выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$. $\square$

Пример 2.1. Рассмотрим задачу нахождения максимальной оценки снизу для суммарного дохода с учетом дисконтирования. Предположим, что развитие популяции задано логистическим уравнением

$$\dot{x} = (a - bx)x, \quad (2.8)$$

где $a > 0$, $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно.

Найдем решение (2.8), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0$:

$$\varphi(t, x_0) = \frac{ax_0 e^{at}}{a + bx_0(e^{at} - 1)},$$

и выпишем разностное уравнение (2.1) для логистического уравнения (2.8):

$$X_{k+1} = \frac{a(1-u)X_k e^{ad}}{a + b(1-u)X_k(e^{ad} - 1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что одной из неподвижных точек данного уравнения является $X(u) = 0$, второй неподвижной точкой является

$$X(u) = \frac{a(1-u)e^{ad} - a}{b(1-u)(e^{ad} - 1)}.$$

Отметим, что $X(u) > 0$, если $(1 - u)e^{ad} > 1$.

Найдем математическое ожидание $M\ell(\omega, u)$, где $\omega_1, \omega_2, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на $[0, 1]$, а $\ell(\omega, u) = \min(\omega, u)$. Тогда $M\ell(\omega, u)$ можно найти как интеграл Лебега, то есть

$$M(\omega, u) = \int_0^1 \ell(\omega, u) d\omega = \int_0^u \omega d\omega + \int_u^1 u d\omega = \frac{u^2}{2} + u(1 - u) = u - \frac{u^2}{2}.$$

Подставим полученные результаты в неравенство (2.5), тогда

$$\frac{a((1 - u)e^{ad} - 1)(2u - u^2)}{2b(1 - u)(e^{ad} - 1)(e^\alpha - 1)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \leq \frac{a(2u - u^2)}{2b(e^\alpha - 1)}. \quad (2.9)$$

Пусть $a = 1$, $b = 1$, $d = \ln 25$, $\alpha = \ln 2$, тогда (2.9) принимает следующий вид:

$$\frac{(24 - 25u)(2u - u^2)}{48(1 - u)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \leq \frac{2u - u^2}{2}. \quad (2.10)$$

При помощи стандартных вычислений можно показать, что в последнем неравенстве оценка снизу максимальная при $u = u^* \approx 0,722$. Подставляя данное значение u^* в (2.10), получим приближенную оценку снизу и сверху, которая выполнена с вероятностью единица:

$$0,411 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \leq 0,461. \quad (2.11)$$

Таким образом, для уравнения (2.8) оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования удовлетворяет (2.11).

3. Теорема об оценке суммарного дохода с учетом дисконтирования для моделей структурированных популяций

Рассмотрим структурированную популяцию, особи которой разделены на $n \geq 2$ возрастных групп или отдельных видов. Пусть количество особей i -го вида равно x^i , $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $X(u) = (X^1(u), \dots, X^n(u))$ неподвижную точку системы (2.1) (если она существует), пусть

$$x(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u)), \quad \text{где } x^i(u) \doteq (1 - u)X^i(u), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Для $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ включение $x_0 \in [a, b]$ будем понимать следующим образом: $x_0^i \in [a^i, b^i]$, $i = 1, \dots, n$.

В данном разделе будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 3.1. Если $x_0^i \geq x^i$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $\varphi^i(d, x(0)) \geq \varphi^i(d, x)$, $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что условие 3.1 можно записать в сокращенном виде: если $x(0) \geq x$, то $\varphi(d, x(0)) \geq \varphi(d, x)$. Обозначим через $M\ell_k^i$ математическое ожидание случайных величин ℓ_k^i , $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 3.1. Пусть система (1.2), (1.3) имеет стационарную точку $A > 0$, и существует неподвижная точка $X(u)$ системы (2.1) такая, что $X(u) \in (0, A]$. Тогда для любого $x_0 \in [x(u), A]$ найдется управление $\bar{u} \in U$, при котором для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C^i X^i(u) \ell_k^i \leq H_{\alpha}(\bar{\ell}, x_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C^i A^i \ell_k^i. \quad (3.2)$$

Доказательство. Поскольку $x_0 \in [x(u), A]$, то из условия (3.1) следует, что

$$X^i(u) = \varphi^i(d, x(u)) \leq \varphi^i(d, x_0) = X_1^i \leq \varphi^i(d, A) = A^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Выберем управления $u_k = \left(1 - \frac{x^1(u)}{X^1(u)}, \dots, 1 - \frac{x^n(u)}{X^n(u)}\right)$ для всех $k = 1, 2, \dots$ и отметим, что $\ell_k = \min\{\omega_k, u_k\} \leq u_k$, тогда

$$x_1^i = (1 - \ell_1^i) X_1^i \geq (1 - u_k) X_k^i = \frac{x^i(u) X_1^i}{X_1^i} = x^i(u).$$

Аналогично при выбранных управлениях получаем

$$X^i(u) \leq X_k^i \leq A^i, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Из (3.3) и определения суммарного дохода следует, что для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства (3.2). $\square$

Для каждой последовательности $\bar{\ell}^{(p)}$ выпишем значение суммарного дохода

$$H_{\alpha}(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} C^i X_k^{i(p)} \ell_k^{i(p)} e^{-\alpha k}, \quad \text{где } \alpha > 0, \quad p = 1, 2, \dots$$

Теорема 3.1. Пусть система (1.2), (1.3) имеет стационарную точку $A > 0$, и существует неподвижная точка $X(u)$ системы (2.1) такая, что $X(u) \in (0, A]$. Тогда для любого $x_0 \in [x(u), A]$ найдется управление $\bar{u} \in U$, при котором для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$\frac{\sum_{i=1}^n C^i X^i(u) M \ell^i(u)}{e^{\alpha} - 1} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_{\alpha}(\bar{\ell}^{(p)}, x_0) \leq \frac{\sum_{i=1}^n C^i A^i M \ell^i(u)}{e^{\alpha} - 1}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Случайные величины $\ell_1^{i(p)}, \ell_2^{i(p)}, \dots$ удовлетворяют условиям усиленного закона больших чисел Колмогорова, поэтому для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{i=1}^n C^i X^i(u) \ell_k^{i(p)} e^{-\alpha k} = \sum_{i=1}^n C^i X^i(u) M \ell^i(u) e^{-\alpha k}. \quad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) следует, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\sum_{i=1}^n C^i X^i(u) M \ell^i(u) e^{-\alpha k} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{i=1}^n C^i X_k^{i(p)} \ell_k^{i(p)} e^{-\alpha k}. \quad (3.6)$$

Суммируя (3.6) по всем $k = 1, 2, \dots$, получаем левую часть (3.4). Аналогично доказыва-
ется неравенство в правой части (3.4). $\square$

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых Л. И. Родиной за внимание к работе и руководство ее выполнением.

References

- [1] D.D. Bainov, “Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population”, *Applied Mathematics and Computation*, **39**:1 (1990), 37–48.
- [2] Г. П. Неверова, О. Л. Жданова, Е. Я. Фрисман, “Динамические режимы структурированного сообщества хищник-жертва и их изменение в результате антропогенного изъятия особей”, *Математическая биология и биоинформатика*, **15**:1 (2020), 73–92. [G. P. Neverova, O. L. Zhdanova, E. Ya. Frisman, “Dynamics of predator-prey community with age structures and its changing due to harvesting”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **15**:1 (2020), 73–92 (In Russian)].
- [3] А. И. Абакумов, Ю. Г. Израильский, “Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:2 (2016), 191–204. [A. I. Abakumov, Yu. G. Izraily, “The harvesting effect on a fish population”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:2 (2016), 191–204 (In Russian)].
- [4] Г. П. Неверова, А. И. Абакумов, Е. Я. Фрисман, “Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:1 (2016), 1–13. [G. P. Neverova, A. I. Abakumov, E. Ya. Frisman, “Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:1 (2016), 1–13 (In Russian)].
- [5] А. О. Беляков, А. А. Давыдов, “Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса”, Труды Института математики и механики УрО РАН, **22**, 2016, 38–46; англ. пер.: A. O. Belyakov, A. A. Davydov, “Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **299**:suppl. 1 (2017), 14–21.
- [6] А. А. Давыдов, “Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова, Труды МИАН, **310**, МИАН, М., 2020, 135–142; англ. пер.: A. A. Davydov, “Existence of Optimal Stationary States of Exploited Populations with Diffusion”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **310** (2020), 124–130.
- [7] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].
- [8] А. В. Егорова, “Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 15–25. [A. V. Egorova, “Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 15–25 (In Russian)].
- [9] Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина, “Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции”, *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **56** (2020), 41–49. [Yu. V. Masterkov, L. I. Rodina, “Estimation of average time profit for stochastic structured population”, *Izv. IMI UdGU*, **56** (2020), 41–49 (In Russian)].
- [10] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

- [11] L. I. Rodina, A. H. Hammadi, “Optimization problems for models of harvesting a renewable resource”, *Journal of Mathematical Sciences*, **25**:1 (2020), 113–122.
- [12] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Издательство ННГУ, Н. Новгород, 2007, 324 с. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Mathematical Modelling of Selection Processes*, Nizhny Novgorod University Press, Nizhnii Novgorod, 2007 (In Russian), 324 pp.]
- [13] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, Наука, М., 1989, 580 с. [A. N. Shiryaev, *Probability-1*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 580 pp.]
- [14] М. С. Волдеаб, “Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:141 (2023), 26–38. [M. S. Woldeab, “Properties of the average time benefit for probabilistic models of exploited populations”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:141 (2023), 26–38 (In Russian)].

Информация об авторе

Базулкина Анастасия Андреевна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: hirasawa33rus@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-5283-5295>

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.

Поступила после рецензирования 29.08.2023 г.

Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Anastasia A. Bazulkina, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation.

E-mail: hirasawa33rus@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-5283-5295>

Received 15.05.2023

Reviewed 29.08.2023

Accepted for press 12.09.2023