Том 25, № 130 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-165-182
УДК 519.6

Условия минимума гладкой функции на границе квазидифференцируемого множества

Рафик Агасиевич ХАЧАТРЯН
Ереванский государственный университет
0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

The conditions of minimum for a smooth function on the boundary of a quasidifferntiable set

Rafik A. KHACHATRYAN
Yerevan State University
1 Alex Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Аннотация. В статье рассматриваются задачи математического программирования с негладкими ограничениями типа равенств, задаваемыми квазидифференцируемыми функциями. С применением техники верхних выпуклых аппроксимаций, разработанной Б. Н. Пшеничным, получены необходимые условия экстремума в таких задачах. Благодаря тому, что для квазидифференцируемой функции можно построить целые семейства верхних выпуклых аппроксимаций, удалось уточнить знаки множителей Лагранжа и тем самым более полно охарактеризовать точки минимума в таких экстремальных задачах. Рассматривается также простейшая задача вариационного исчисления со свободной правой частью в предположении, что левый конец траектории начинается на границе выпуклого множества. При некоторых достаточных условиях уточнено условие трансверсальности на левом конце траектории.

Ключевые слова: верхняя выпуклая аппроксимация; квазидифференцируемая функция; субдифференциал; шатер

Для цитирования: *Хачатрян Р.А.* Условия минимума гладкой функции на границе квазидифференцируемого множества // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 165–182. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-165-182.

Abstract. In this paper, we consider problems of mathematical programming with nonsmooth constraints of equality type given by quasidifferentiable functions. By using the technique of upper convex approximations, developed by B. N. Pshenichy, necessary conditions of extremum for such problems are established. The Lagrange multipliers signs are specified by virtue of the fact that one can construct whole familers of upper convex approximations for quasidifferentiable function and thus the minimum points in such extremal problems are characterized more precisely. Also the simplest problem of calculus of variations with free right hand side is considered, where the left end of the trajectory starts on the boundary of the convex set. The transversality condition at the left end of the trajectory is improved provided sertain sufficient conditons hold.

Keywords: upper convex approximation; quasidifferentiable function; subdifferential; tent

For citation: Khachatryan R.A. Usloviya minimuma gladkoy funktsii na granitse kvazidifferentsiruyemogo mnozhestva [The conditions of minimum for a smooth function on the boundary of a quasidifferntiable set]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 165–182.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-165-182. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В настоящей статье приняты следующие определения и обозначения: (x, y) — скалярное произведение векторов x и y, принадлежащие R^n; $convM$, $conM$, $cl\{M\}$ — выпуклая, коническая оболочка и замыкание множества M соответственно; K^* — конус сопряжений к конусу K. Положим $LinM = conM - conM$. Исследования по необходимым условиям экстремума в последние годы были связаны в основном с более детальным изучением задач, в которых участвуют негладкие функции. При этом на первый план выдвигается учет негладких ограничений типа равенств. Конечно, каждое равенство вида $g(x) = 0$ можно заменить системой неравенств $g(x) \leq 0$, $-g(x) \leq 0$. В этой связи представляется естественной попытка вывести необходимые условия из частного случая, относящегося к задаче только с ограничениями — неравенствами. Однако такой путь не приводит к успеху, поскольку, как правило, не удается получить содержательное необходимое условие экстремума. Это связано с тем, что в задачах с ограничениями — неравенствами потребуется условие регулярности типа Слейтера, которое здесь никогда не выполняется.

В статье [1] Ф. Кларк ввел понятие субдифференциала локально липшицевой функции. Положим
$$F_C(x, \overline{x}) = \lim_{h \to 0} sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + h + \lambda h) - f(x + h)}{\lambda}.$$
Оказывается, что функция $F(x, \overline{x})$ положительно однородна и выпукла по $\overline{x}$. Поэтому множество
$$\partial_C f(x) = \{y^* \in R^n : F_C(x, \overline{x}) \geq (y^*, \overline{x})\ \forall \overline{x}\}$$
— непустой выпуклый компакт. Оно называется субдифференциалом Кларка функции f в точке x. Замечательно то, что многозначное отображение $x \longrightarrow \partial_C f(x)$ полунепрерывно сверху. С использованием именно этого свойства Ф. Кларком в [1] доказано правило множителей Лагранжа в задачах математического программирования с ограничениями типа равенств, задаваемых локально липшицевыми функциями, т. е. в задачах вида:
$$\min_x \{f_0(x) : f_i(x) = 0,\ i \in I\}. \tag{0.1}$$
Этот результат формулируется следующим образом: если точка x^* является решением задачи (0.1), то существуют числа λ_i, $i \in I$, не все равные нулю одновременно, такие, что
$$0 \in \sum_{i \in \{0\} \bigcup I} \lambda_i \partial_C f_i(x^*). \tag{0.2}$$
В дальнейшем аналогичные условия экстремума получены в работах [2, 3] в терминах субдифференциалов Пено и асимптотических субдифференциалов Половинкина [4]. Эти условия более эффективны, чем условие Кларка, поскольку асимптотический субдифференциал и субдифференциал Пено в общем случае входят в субдифференциал Кларка.

Однако существуют подклассы локально липшицевых функций, для которых все перечисленные субдифференциалы совпадают, и простейшие примеры показывают, что полученные в этих терминах необходимые условия экстремума (условие (0.2)) довольно грубы и не позволяют отбросить заведомо неоптимальные точки. Такие негладкие функции рассматриваются и в настоящей статье. Они составляют подкласс в пространстве квазидифференцируемых функций, введенном В. Ф. Демьяновым в работах [5,6].

1. Основные понятия

Напомним определение квазидифференцируемой функции из [5] .

Локально липшицевая функция $g(x)$, дифференцируемая по направлениям, называется квазидифференцирумой в точке $x \in R^n$, если

$$g'(x,\overline{x}) = \lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{g(x+\alpha\overline{x})-g(x)}{\alpha} = \max_{x^*\in\underline{\partial g(x)}}(x^*,\overline{x}) + \min_{y^*\in\overline{\partial g(x)}}(y^*,\overline{x}),$$

где $\underline{\partial g(x)}$, $\overline{\partial g(x)}$ — выпуклые компакты в R^n, которые называются квазидифференциалами.

В статье [7] рассмотрена задача вида

$$\min_x\{f_0(x) : g(x)\le 0\},$$

где $f_0(x)$ и $g(x)$ — квазидифференцируемые функции. С помощью квазидифференциалов удалось достаточно просто описать необходимые условия экстремума в этой задаче, и на примерах было показано, что эти условия эффективее условий Кларка. Если функция $g(x)$ квазидифференцируемая, то множество $M = \{x\in R^n : g(x)\le 0\}$ называется квазидифференцируемым.

В настоящей статье рассматриваются квазидифференцируемые функции следующего вида:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \max_{i\in I} f_i(x) + \min_{j\in J} f_j(x), \tag{1.1}$$

где I, J — конечные множества индексов, а $f_i(x)$, $f_j(x)$ $i\in I$, $j\in J$ — непрерывные дифференцируемые функции.

Согласно теореме 2.1 из [8, гл. 3, с. 71] функция g липшицева и дифференцируема по любому направлению $\overline{x}$, причем

$$g'(x,\overline{x}) = \max_{i\in I(x)}(f_i'(x),\overline{x}) + \min_{j\in J(x)}(f_j'(x),\overline{x}),$$

где $I(x) = \{i\in I : f_i(x) = g_1(x)\}$, $J(x) = \{j\in J : g_1(x) = f_j(x)\}$. Значит функция g квазидифференцируема, причем

$$\underline{\partial g(x)} = conv\{f_i'(x),\ i\in I(x)\},\quad \overline{\partial g(x)} = conv\{f_j'(x),\ j\in J(x)\}$$

Согласно предложению 2.3.12 из [9, с. 51]

$$\partial_C g(x) = \partial_C g_1(x) + \partial_C g_2(x) = \underline{\partial g(x)} + \overline{\partial g(x)}.$$

Заметим также, что в рассматриваемом случае, согласно [4, теорема 2] субдифференциалы Кларка, Пено и Половинкина совпадают. В общем случае связь квазидифференциала с субдифференциалами Пено и Кларка установлена в [6, гл. 3, п. 4, с. 152].

В настоящей статье рассматриваются задачи минимизации гладких функций при наличии ограничений типа равенств, задаваемых функциями вида (1.1). С использованием техники верхних выпуклых аппроксимаций, разработанной Б. Н. Пшеничным [10], и метода шатров В. Г. Болтянского [11] получены принципиально новые необходимые условия экстремума. Благодаря тому, что для функций вида (1.1) существуют целые семейства верхних выпуклых аппроксимаций, уточнены знаки множителей Лагранжа и тем самым более полно охарактеризованы точки минимума в экстремальных задачах.

Напомним определения верхней выпуклой аппроксимации.

Пусть $f(x)$ — липшицева в окрестности точки x функция. Для $\overline{x}$ положим

$$F(x,\overline{x}) = \lim_{\overline{y}\to\overline{x}} \sup_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(x+\lambda\overline{y})-f(x)}{\lambda}.$$

Положительно однородная и выпуклая по $\overline{x}$ функция $h(x,\overline{x})$ называется верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x, если

$$h(x,\overline{x}) \geq F(x,\overline{x}) \ \ \forall \overline{x}\in R^n.$$

Множество

$$\partial f(x) = \{y^*\in R^n : h(x,\overline{x}) \geq (y^*,\overline{x})\}$$

называется субдифференциалом функции f в точке x. Ясно, что обобщенная производная $F_C(x,\overline{x})$ Кларка является верхней выпуклой аппроксимацией липшицевой функции f в точке x. Из определения следует, что верхняя выпуклая аппроксимация и соответственно субдифференциал определяются неоднозначно. Например, нетрудно видеть, что для квазидифференцируемой функции $f(x)$ при каждом $y^*\in\overline{\partial f(x)}$ функция

$$h(x,y^*) = \max_{u\in\underline{\partial f(x)}} (u,\overline{x}) + (y^*,\overline{x})$$

является верхней выпуклой аппроксимацией, а $\underline{\partial f(x)}+y^*$ — соответствующий субдифференциал.

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [11]). Выпуклый конус K называется шатром множества M в точке $x\in M$, если существуют окрестность U нуля и определенное на этой окрестности отображение r, такое, что

$$x+\overline{x}+r(\overline{x})\in M \ \ \forall \overline{x}\in K\cap U,$$

причем $r(\overline{x})/\|\overline{x}\|\to 0$, при $\overline{x}\to 0$.

Шатер K называется непрерывным, если таковым является отображение r.

Следующее необходимое условие экстремума является простым следствием определения 1.1.

Теорема 1.1 (см. [10]). *Пусть x^* — точка минимума функции $f(x)$ на множестве M. Допустим, что $h(x,\overline{x})$ верхняя выпуклая аппроксимации для f в точке x^*, а $K_M(x^*)$ — шатер к M в точке x^*. Тогда*

$$\partial f(x^*)\cap K_M^*(x^*)\neq\emptyset. \tag{1.2}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат о пересечении локальных непрерывных шатров.

Теорема 1.2 (см. [12]). *Пусть* $M_i,\ i\in I$ *— множества в* R^n, I *— конечное множество индексов,* $K_i,\ i\in I$ *— непрерывные локальные шатры множеств* M_i *в точке* $x^*\in M_i$. *Если шатры* $K_i,\ i\in I$ *неотделимы, то конус* $K=\bigcap_{i\in I}K_i$ *является локальным шатром к множеству* $M=\bigcap_{i\in I}M_i$ *в точке* $x^*\in M$.

Следует отметить, что этот результат в случае двух шатров доказан Б. Н. Пшеничным (см. [10, теорема 1.2., гл. 5, п. 1, с. 200]).

В настоящей статье для вывода необходимых условий экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа равенств центральную роль играет следующий результат, доказанный в [13]. Это утверждение позволяет уточнить знаки множителей Лагранжа в необходимых условиях экстремума.

Теорема 1.3 (см. [13]). *Пусть* $G\subset R^n$ *— выпуклый компакт. Предположим также, что* $0\notin G$ *и число линейно независимых векторов в* G *больше или равно* 2. *Тогда*

$$\bigcap_{x\in G} cl\{conG-conx\}=conG. \tag{1.3}$$

2. Необходимые условия в задачах с одним ограничением типа равенства

Рассмотрим задачу минимизации функции f_0 при ограничении $g(x)=0:$

$$\min_x\{f_0(x):g(x)=0\}, \tag{2.1}$$

где функция $g(x)$ задается соотношением (1.1).

Теорема 2.1. *Пусть* x^* *— решение задачи* (2.1)*; функции* $f_k(x),\ k\in 0\cup I\cup J$ *непрерывно дифференцируемы и существует такой вектор* w, *что* $(f_k'(x^*),w)<0$, $k\in I(x^*)\cup J(x^*)$. *Тогда для любых* $i_0\in I(x^*)$, $j_0\in J(x^*)$ *либо существуют числа* $\lambda_{j_0}^+\geq 0$, $\lambda_i^+\geq 0$, $i\in I(x^*)$ *такие, что*

$$f_0'(x^*)+\lambda_{j_0}^+f_{j_0}'(x^*)+\sum_{i\in I(x^*)}\lambda_i^+f_i'(x^*)=0, \tag{2.2}$$

либо существуют числа $\lambda_{i_0}^-\geq 0$, $\lambda_j^-\geq 0$, $j\in J(x^*)$, *такие, что*

$$f_0'(x^*)-\lambda_{i_0}^-f_{i_0}'(x^*)-\sum_{j\in J(x^*)}\lambda_j^-f_j'(x^*)=0. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что равенства (2.2) и (2.3) одновременно не выполнены. Если условие (2.4) не выполняется, то согласно теореме о строгой отделимости выпуклых множеств это равносильно тому, существуют вектор u_1 и число $\delta_1>0$ такие, что

$$(u_1,f_0'(x^*)+y^*)<-\delta_1\ \ \forall y^*\in con(\underline{\partial g_1(x^*)}+f_{j_0}'(x^*)). \tag{2.4}$$

Если для некоторого $y_0^* \in con(\underline{\partial g_1(x^*)} + f'_{j_0}(x^*))$ $(y_0^*, u_1) > 0$, то $(\lambda y_0^*, u_1) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$, что противоречит неравенству (2.4). Поэтому

$$(y^*, u_1) \leq 0, \quad \forall y^* \in con(\underline{\partial g_1(x^*)} + f'_{j_0}(x^*)).$$

Отсюда

$$u_1 \in (-con(\underline{\partial g_1(x^*)} + f'_{j_0}(x^*)))^*. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$h_{j_0}^+(x^*, \overline{x}) = \max_{i \in I(x^*)} (f'_i(x^*), \overline{x}) + (f'_{j_0}(x^*), \overline{x}).$$

Из предположений теоремы следует, что $h_{j_0}^+(x^*, w) < 0$. Тогда, имея ввиду включение (2.5), используя теорему о двойственности выпуклых конусов (см. например [14, теорема 2.6., с. 56]), получим $h_{j_0}^+(x^*, u_1) \leq 0$. Положим $u_1^\alpha = u_1 + \alpha(w - u_1)$. Для $\alpha \in (0, 1]$ получим

$$\begin{aligned} h_{j_0}^+(x^*, u_1^\alpha) = h_{j_0}^+(x^*, u_1 + \alpha(w - u_1)) = h_{j_0}^+(x^*, \alpha w + (1-\alpha)u_1) \\ \leq \alpha h_{j_0}^+(x^*, w) + (1-\alpha) h_{j_0}^+(x^*, u_1) < 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как выполнено $g'(x^*, \overline{x})) \leq h_{j_0}^+(x^*, \overline{x})$, то положительно однородная выпуклая функция $h_{j_0}^+(x^*, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции g в точке x^*. Поэтому в силу леммы 3.5 работы [10, гл. 5, п. 3, с. 232] существует функция $r(\overline{x})$ такая, что $\|x\|^{-1} r(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to 0$ и

$$g(x^* + \overline{x}) \leq g(x^*) + h_{j_0}^+(x^*, \overline{x}) + r(\overline{x}).$$

Отсюда, учитывая неравенство (2.6), для достаточно малых положительных β имеем

$$g(x^* + \beta u_1^\alpha) \leq g(x^*) + h_{j_0}^+(x^*, \beta u_1^\alpha) + r(\beta u_1^\alpha) \leq \beta(h_{j_0}^+(x^*, u_1^\alpha) + \frac{r(\beta u_1^\alpha)}{\beta}) < 0. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.4) следует, что $(f'(x^*), u_1) < 0$. Следовательно, для малых $\alpha > 0$ имеем

$$(f'_0(x^*), u_1^\alpha) = (f'(x^*), u_1 + \alpha(w - u_1)) < 0. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$h_{i_0}^-(x^*, \overline{x}) = \max_{j \in J(x^*)} (-f'_j(x^*), \overline{x}) - (f'_{i_0}(x^*), \overline{x}).$$

Положительно однородная выпуклая функция $h_{i_0}^-(x^*, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $-g$ в точке x^*. Имеем также $h_{i_0}^-(x^*, -w) < 0$. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, докажем существование такого вектора u_2^α, что для малых $\beta > 0$

$$(f'_0(x^*), u_2^\alpha)) < 0, \quad g(x^* + \beta u_2^\alpha) > 0. \tag{2.9}$$

Поскольку функция g непрерывна, из неравенств (2.7)–(2.9) следует существование такого числа $\xi \in (0, 1)$, что

$$g\big(x^* + \xi \beta u_1^\alpha + (1-\xi)\beta u_2^\alpha\big) = 0,$$

$$f_0(x^* + \xi\beta u_1^\alpha + (1-\xi)\beta u_2^\alpha) = f_0(x^*) + \beta\Big(\big(f'(x^*), \xi u_1^\alpha + (1-\xi)u_2^\alpha\big) + \frac{o(\beta)}{\beta}\Big) < f_0(x^*).$$

Но эти соотношения противоречат тому, что x^* является точкой локального минимума функции f_0 при ограничении $g(x) = 0$. □

П р и м е р 2.1. Пусть требуется найти проекцию точки $a = (1, 0, 0, 1)$ на множество

$$M = \big\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max\{x_1 + x_2, x_2\} + \min\{x_3, x_3 + x_4\}\big\},$$

т. е. надо решить задачу:

$$\min_x \big\{f_0(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \ : \ g(x) = 0\big\}.$$

Поскольку проекции любой точки на замкнутое множество существуют, то наша задача имеет решение. Допустим, что точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ — одно из искомых решений. Положим

$$f_1(x) = x_1 + x_2, \quad f_2(x) = x_2, \quad f_3(x) = x_3, \quad f_4(x) = x_3 + x_4.$$

Отсюда

$$f_1'(x^*) = (1, 1, 0, 0), \quad f_2'(x^*) = (0, 1, 0, 0), \quad f_3'(x^*) = (0, 0, 1, 0), \quad f_4'(x^*) = (0, 0, 1, 1).$$

В точке x^* необходимое условие (2.2) не выполнено. Действительно, допустим, что существуют числа $\lambda_1^- \ge 0, \lambda_2^- \ge 0, \lambda_3^- \ge 0, \lambda_4^- \ge 0$, такие, что

$$x_1^* - 1 = \lambda_1^-, \quad x_2^* = \lambda_1^- + \lambda_2^-, \quad x_3^* = \lambda_3^- + \lambda_4^-, \quad x_4^* - 1 = \lambda_4^-.$$

Отсюда $x_1^* > 0$, $x_2^* \ge 0$, $x_3^* \ge 0$, $x_4^* \ge 0$. Значит, $g(x^*) \ne 0$, что противоречит задаче. Следовательно, точка x^* удовлетворяет необходимому условию (2.3). Это означает, что существуют числа $\lambda_1^+ \ge 0$, $\lambda_2^+ \ge 0$, $\lambda_3^+ \ge 0$, $\lambda_4^+ \ge 0$, такие, что

$$x_1^* - 1 = -\lambda_1^+, \quad x_2^* = -\lambda_1^+ - \lambda_2^+, \quad x_3^* = -\lambda_3^+ - \lambda_4^+, \quad x_4^* - 1 = -\lambda_4^+.$$

Если $x_1^* < 0$, то $I(x^*) = \{2\}$. Следовательно $\lambda_1^+ = 0$, и из первого равенства получим $x_1^* = 1$, что также противоречит задаче. Если $x_1^* = 0$, $x_4^* < 0$, то $\lambda_1^+ = 1$, $I(x^*) = \{1, 2\}$, $J(x^*) = 4$. Отсюда $\lambda_3^+ = 0$, $g(x^*) = x_2^* + x_3^* + x_4^* = 0$. Значит,

$$-1 - \lambda_2^+ - \lambda_4^+ + 1 - \lambda_4^+ = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_2^+ + 2\lambda_4^+ = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_2^+ = \lambda_4^+ = 0 \ \Rightarrow x_4^* = 1,$$

и снова получено противоречие. Если $x_1^* = 0$, $x_4^* = 0$, то $I(x^*) = \{1, 2\}$, $J(x^*) = \{3, 4\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(x^*) = x_2^* + x_3^* &= -(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ + \lambda_3^+ + \lambda_4^+) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1^+ = 0, \quad \lambda_2^+ = 0, \quad \lambda_3^+ = 0 \ \ \lambda_4^+ = 0 \ \Rightarrow \ x_4^* = 1, \end{aligned}$$

что опять противоречит задаче.

Таким образом, из необходимого условия (2.3) следует, что $x_1^* > 0$, $x_4^* > 0$. Окончательно, решая задачу

$$\min_x \big\{f_0(x) \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ x_1 > 0, \ x_4 > 0\big\},$$

получим точку $x^* = (2/3, -1/3, -1/3, 1)$, которая и является решением нашей задачи.

Пусть $y^* \in \overline{\partial g(x)}$, $z^* \in \underline{\partial g(x)}$. Обозначим

$$h^+_{y^*}(x,\overline{x}) = \max_{u\in\underline{\partial g(x)}}(u,\overline{x}) + (y^*,\overline{x}), \quad h^-_{z^*}(x,\overline{x}) = \max_{v\in\overline{\partial g(x)}}(-v,\overline{x}) - (z^*,\overline{x}).$$

Верна следующая теорема, доказательство которой мы не приведем, поскольку оно совершено аналогично доказательству теоремы 2 работы [13].

Теорема 2.2. *Пусть функции $f_i(x)$, $i \in I\cup J$ являются гладкими и $x^* \in M = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$. Предположим также, что существует такой вектор w, что*

$$f'_k(x^*), w) < 0 \ \ \forall k \in I(x^*) \cup J(x^*).$$

Тогда для любых $y^* \in \overline{\partial g(x)}$, $z^* \in \underline{\partial g(x)}$ выпуклый конус

$$K = \{\overline{x} \in R^n / h^+_{y^*}(x^*,\overline{x}) \le 0, \ h^-_{z^*}(x^*,\overline{x}) \le 0\}$$

является непрерывным шатром к множеству M в точке x^*.

При некотором дополнительном предположении в задаче (2.1) можно уточнить знаки множителей Лагранжа. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть функции $f_i(x)$, $i \in I\cup J$, гладкие и точка x^* — решение задачи (2.1). Предположим также, что градиенты $f'(x^*)$, $i \in I(x^*) \cup J(x^*)$, линейно независимы и*

$$|I(x^*)| \ge 2, \ \ |J(x^*)| \ge 2.$$

Тогда существуют такие числа $\lambda^+_i \ge 0$, $i \in I(x^*)$, $\lambda^-_j \ge 0$, $j \in J(x^*)$, что

$$f'_0(x^*) + \sum_{i\in I(x^*)} \lambda^+_i f'_i(x^*) - \sum_{j\in J(x^*)} \lambda^-_j f'_j(x^*) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем конус K^*, сопряженный конусу K (определение конуса K см. в теореме 2.2). Так как сумма многогранных выпуклых конусов $con\partial h^+_{y^*}(x^*,0)$ и $con\partial h^-_{z^*}(x^*,0)$ замкнута, получаем

$$\begin{aligned} K^* &= -cl\{con\partial h^+_{y^*}(x^*,0) + con\partial h^-_{z^*}(x^*,0)\} \\ &= -con\{f'_i(x^*), \ i \in I(x^*)\} - cony^* + con\{f'_j(x^*), \ j \in J(x^*)\} + conz^*. \end{aligned}$$

Согласно необходимому условию экстремума для задачи (2.1) имеем

$$\begin{aligned} &f'_0(x^*) \in K^* \ \Rightarrow \\ &f'_0(x^*) \in -con\{f'_i(x^*), \ i \in I(x^*)\} - cony^* + con\{f'_j(x^*), \ j \in J(x^*)\} + conz^*. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Фиксируем теперь элемент $z^* \in \underline{\partial g(x^*)}$. Тогда из соотношения (2.10) следует, что для каждого $y^* \in \overline{\partial g(x^*)}$ существует элемент $u^* \in con\{f'_i(x^*), \ i \in I(x^*)\} - conz^*$ такой, что

$$f'_0(x^*) + u^* \in con\{f'_j(x^*), \ j \in J(x^*)\} - cony^*. \tag{2.11}$$

Для всех $y^* \in \overline{\partial g(x)}$, $z^* \in \underline{\partial g(x)}$ существует единственный элемент u^*, удовлетворяющий условию (2.11). Действительно, если существуют два различных элемента u^*_1, u^*_2, удовлетворяющие условию (2.11), то из этого немедленно следует, что ненулевой элемент $u_1^* - u_2^*$ можно представить линейной комбинацией элементов $f_j'(x^*)$, $j \in J(x^*)$. С другой стороны, этот элемент также представляется в виде линейной комбинации векторов $f_i'(x^*)$, $i \in I(x^*)$. Мы получаем противоречие, поскольку система векторов $f_k'(x^*)$, $k \in I(x^*) \cap J(x^*)$, по предположению теоремы линейно независима.

Итак, найдется элемент u^* такой, что

$$u^* \in \bigcap_{z^* \in \underline{\partial g(x)}} \{con\{f_i'(x^*),\ i \in I(x^*)\} - con z^*\}, \tag{2.12}$$

$$f_0'(x^*) + u^* \in \bigcap_{y^* \in \overline{\partial g(x)}} \{con\{f_j'(x^*),\ j \in J(x^*)\} - con y^*\}. \tag{2.13}$$

Так как по предположению $|I(x^*)| \geq 2$, $|J(x^*)| \geq 2$, то согласно теореме 1.3

$$\bigcap_{z^* \in \underline{\partial g(x)}} \big\{con\{f_i'(x^*),\ i \in I(x^*)\} - con z^*\big\} = \big\{con\{f_i'(x^*),\ i \in I(x^*)\}\big\},$$

$$\bigcap_{y^* \in \overline{\partial g(x)}} \big\{con\{f_j'(x^*),\ j \in J(x^*)\} - con y^*\big\} = \big\{con\{f_j'(x^*),\ j \in J(x^*)\}\big\}.$$

Отсюда и из соотношений (2.12)–(2.13) непосредственно вытекает утверждение доказываемой теоремы. □

3. Необходимые условия в задачах с несколькими ограничениями типа равенств

Теперь рассмотрим задачу с несколькими ограничениями типа равенств, задаваемыми квазидифференцируемыми функциями. В частности получим необходимые условия экстремума в задачах следующего типа:

$$f_0(x) \to \min, \quad x \in M_1 \cap M_2, \tag{3.1}$$

где

$$M_1 = \{x : g_1(x) = \max_{i \in I_1} f_i(x) = 0\}, \quad M_2 = \{x : g_2(x) = \max_{i \in I_2} f_i(x) = 0\}.$$

Здесь I_1, I_2 — конечные множества индексов. Пусть $g_1(x^*) = g_2(x^*) = 0$.

Для фиксированных $u^* \in \underline{\partial g_1(x^*)}$, $v^* \in \underline{\partial g_2(x^*)}$ положим

$$K_1(x^*, u^*) = \big\{\overline{x} : \max_{i \in I_1(x^*)} \big(f_i'(x^*), \overline{x}\big) \leq 0,\ (-u^*, \overline{x}) \leq 0\big\},$$

$$K_2(x^*, v^*) = \big\{\overline{x} : \max_{i \in I_2(x^*)} \big(f_i'(x^*), \overline{x}\big) \leq 0,\ (-v^*, \overline{x}) \leq 0.\big\}.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $f_i(x)$, $i \in 0 \cup I_1 \cup I_2$ — непрерывно дифференцируемые функции. Допустим, что x^* является решением задачи (3.1) и в этой точке градиенты $f_i'(x*)$, $i \in I_1(x^*) \cup I_2(x^*)$ линейно независимы. Предположим также, что выполнены* *неравенства* $|I_1(x^*)| \geq 2$, $|I_2(x^*)| \geq 2$. *Тогда существуют числа* $\lambda_i \geq 0$, $i \in I_1 \cup I_2$ *такие, что*

$$f_0'(x^*) + \sum_{i \in I_1(x^*) \cup I_2(x^*)} \lambda_i f_i'(x^*) = 0. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпуклые конусы $K_1(x^*, u^*)$ и $K_2(x^*, v^*)$, согласно теореме 2.2, являются непрерывными шатрами соответственно к множествам M_1 и M_2 в точке x^*. Проверим условие неотделимости конусов $K_1(x^*, u^*)$ и $K_2(x^*, v^*)$. Это условие следующее (см. теорему 1.2 работы [10, гл. 5, п. 1, с. 200]):

$$K_1(x^*, u^*) - K_2(x^*, u^*) = R^n \;\Leftrightarrow\; (K_1(x^*, u^*))^* \cap (-K_2(x^*, v^*)^* = \{0\}$$
$$\Leftrightarrow\; (con\underline{\partial g_1(x^*)} - conu^*) \cap (-con\underline{\partial g_2(x^*)} + conv) = \{0\}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что

$$(con\underline{\partial g_1(x^*)} - conu^*) \subseteq Lin\{f_i'(x^*),\ i \in I_1(x^*)\}, \tag{3.4}$$
$$(con\underline{\partial g_2(x^*)} - conv^*) \subseteq Lin\{f_i'(x^*),\ i \in I_2(x^*)\}. \tag{3.5}$$

Поскольку система векторов $\{f_i'(x^*),\ i \in I_1 \cup I_2\}$ линейно независима, то

$$Lin\{f_i'(x^*),\ i \in I(x^*)\} \cap Lin\{f_i'(x^*),\ i \in I_2(x^*)\} = \{0\}.$$

Отсюда, учитывая также соотношения (3.4)–(3.5), получим (3.3). Таким образом, согласно теореме 1.2 о пересечении непрерывных шатров конус $K = K_1(x^*, u^*) \cap K_2(x^*, v^*)$ является шатром к множеству $M = M_1 \cap M_2$ в точке x^*. Поэтому в силу необходимого условия экстремума (1.2) имеем

$$f_0'(x^*) \in K^* \;\Rightarrow\; f_0'(x^*) \in (K_1(x^*, u^*) \cap K_2(x^*, v^*))^* = cl\{K_1^*(x^*, u^*) + K_2^*(x^*, v^*)\}$$
$$= -con\{f_i'(x^*),\ i \in I_1(x^*)\} + conu^* - con\{f_i'(x^*),\ i \in I_2(x^*)\} + conv^*. \tag{3.6}$$

Фиксируем теперь элемент $u^* \in \underline{\partial g(x^*)}$. Тогда из (3.6) следует, что для каждого элемента $v^* \in \overline{\partial g(x^*)}$ существует $w^* \in con\{f_i'(x^*),\ i \in I(x^*)\} - conu^*$ такой, что

$$f_0'(x^*) + w^* \in con\{f_j'(x^*),\ j \in J(x^*)\} - conv^*. \tag{3.7}$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы (2.3), мы покажем, что найдется элемент w^* такой, что

$$w^* \in \bigcap_{u^* \in \overline{\partial g(x)}} \{con\{f_i'(x^*),\ i \in I_1(x^*)\} - conu^*\}, \tag{3.8}$$

$$f_0'(x^*) + w^* \in \bigcap_{y^* \in \overline{\partial g(x)}} \{con\{f_i'(x^*),\ i \in I_2(x^*)\} - conv^*\}. \tag{3.9}$$

Так как по предположению $|I_1(x^*)| \geq 2$, $|I_2(x^*)| \geq 2$, то согласно теореме 1.3

$$\bigcap_{u^* \in \underline{\partial g(x)}} \big\{con\{f_i'(x^*),\ i \in I_1(x^*)\} - conu^*\big\} = con\big\{f_i'(x^*),\ i \in I_1(x^*)\big\},$$

$$\bigcap_{v^* \in \overline{\partial g(x)}} \big\{con\{f_i'(x^*),\ i \in I_2x^*)\} - conv^*\big\} = con\big\{f_i'(x^*),\ i \in I_2(x^*)\big\}.$$

Отсюда и из соотношений (3.8)–(3.9) вытекает утверждение теоремы. □

Проиллюстрируем полученные результаты на следующих примерах.

П р и м е р 3.1. Пусть $b = (1, 0, 0, 0)$. Рассмотрим задачу

$$\min_x \left\{1/2\,\|x-b\|^2 :\ g_1(x) = \max\{x_1, x_2\} = 0,\ g_2(x) = \max\{x_3, x_4\} = 0\right\}. \tag{3.10}$$

Очевидно, точка $x^* = (0, 0, 0, 0)$ является решением этой задачи и в этой точке выполняются все условия теоремы 3.1. Условие (3.2) выполняется, если положить $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Очевидно также, что точка x^* является и решением задачи

$$\min_x \left\{1/2\,\|x-b\|^2 \to \min,\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \le 0\right\}.$$

П р и м е р 3.2. Пусть теперь $b = (-1, 0, 0, 1)$, и снова рассмотрим задачу (3.10). Для точки $x^* = (0, 0, 0, 0)$ имеем $I_1(x^*) = \{1, 2\}$, $I_2(x^*) = \{3, 4\}$. Легко заметить, что в этой точке необходимое условие (3.2) не выполняется. Следовательно, точка x^* не является решением задачи. Однако в этой точке очевидным образом имеет место необходимое условие (0.2) Кларка, поскольку в нем можно выбрать $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$. Таким образом, этот простой пример показывает, что условие (3.2) более эффективно, чем условие (0.2).

Теорема 3.2. *Пусть x^* является решением задачи (0.1). Предположим, что*

1) функция $f_0(x)$ дифференцируема и выпукла, а функции $f_i(x)$, $i \in I$, выпуклые на R^n.

2) $dim Lin \partial g_i(x^*) \ge 2$, $\forall i \in I$;

3) для любых не равных одновременно нулю векторов $x_i^* \in Lin\partial g_i(x^*)$, $i \in I$, выполнено $\sum_{i\in I} x_i^* \ne 0$.

Тогда x^* является точкой минимума функции $f_0(x)$ при ограничениях — неравенствах $f_i(x) \le 0$, $i \in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Тем не менее, приведем основные аспекты доказательства.

Покажем сначала, что в условиях теоремы сумма выпуклых конусов $K_i^*(x^*, u*_i)$, $i \in I$, замкнута, т. е.

$$K^* = cl\Big\{\sum_{i\in I} K_i^*(x^*, u_i^*)\Big\} = \sum_{i\in I} K_i^*(x^*, u_i^*).$$

Доказательство этого проведем в случае двух конусов. Пусть

$$y_k^* \in \big(K_1^*(x^*, u_1^*) + K_2^*(x^*, u_2^*)\big)$$

и $y_k^* \to y_0^*$. Отсюда, существуют последовательности $p_k^* \in K_1^*(x^*, u^*)$, $q_k^* \in K_2^*(x^*, v^*)$ такие, что

$$y_k^* = p_k^* + q_k^*.$$

Предположим, что $\|p_k^*\| \to +\infty$. Имеем

$$\frac{y_k^*}{\|p_k^*\|} = \frac{p_k^*}{\|p_k^*\|} + \frac{q_k^*}{\|p_k^*\|}. \tag{3.11}$$

Не нарушая общности, допустим, что $p_k^*/\|p_k^*\| \to p_0^*$. Очевидно, что вектор p_0^* ненулевой и он принадлежит конусу $K_1^*(x^*, u^*)$. Теперь, в (3.11) переходя к пределу, получим

$$0 = p_0^* + \lim_{k\to\infty} \frac{q_k^*}{\|p_k^*\|}.$$

Значит, предел $\lim_{k\to\infty} q_k^*/\|p_k^*\|$ также существует и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q_k^*}{\|p_k^*\|} \to q_0^* \in K_2^*(x^*, v^*).$$

Таким образом

$$p_0^* + q_0^* = 0, \ \ p_0^* \in Lin f_1(x^*), \ \ q_0^* \in Lin f_2(x^*),$$

что противоречит предположению 3) теоремы.

Аналогично рассматривается случай, когда последовательность p_k^* ограничена. Таким образом, доказано, что конус K^* замкнут.

Теперь, применяя необходимое условие экстремума (1.1), получаем

$$\begin{aligned} f_0'(x^*) \in K^* = cl\{K_1^*(x^*, u^*) + K_2^*(x^*, v^*)\} &= K_1^*(x^*, u^*) + K_2^*(x^*, v^*) \\ = -cl\{con\partial g_1(x^*) - con u^*\} &- cl\{con\partial g_2(x^*) - con v^*\} \\ &\subseteq Lin\partial g_1(x^*) + Lin\partial g_2(x^*). \end{aligned}$$

Отсюда следует существование элементов $p^* \in Lin\partial g_1(x^*)$, $q^* \in Lin\partial g_2(x^*)$ таких, что

$$f'(x^*) + p^* + q^* = 0. \tag{3.12}$$

Такие элементы единственны, поскольку, если найдутся элементы $h^* \in Lin\partial g_1(x^*)$ и $m^* \in Lin\partial g_1(x^*)$, такие, что

$$f'(x^*) + h^* + m^* = 0, \ \ h^* \neq p^*, \ \ m^* \neq q^*,$$

то из (3.12) получим

$$(p^* - h^*) + (q^* - m^*) = 0.$$

Но элементы $(p^* - h^*) \in Lin\partial g_1(x^*)$, $(q^* - m^*) \in Lin\partial g_2(x^*)$ ненулевые, что противоречит предположению 3) теоремы. Окончательно, имея ввиду теорему 1.3, получим

$$p^* \in \bigcap_{u^* \in \partial f_1(x^*)} -cl\{con\partial g_1(x^*) - con u^*\} = -con\partial f_1(x^*),$$

$$q^* \in \bigcap_{v^* \in \partial f_2(x^*)} -cl\{con\partial f_2(x^*) - con v^*\} = -con\partial f_2(x^*).$$

Отсюда и из включения (3.12) имеем

$$0 \in f_0'(x^*) + con\partial f_1(x^*) + con\partial f_2(x^*).$$

Заметим, что согласно теореме Куна-Таккера в дифференциальной форме (см. теорему 2.4 в [15, гл. 4, п. 2, с. 139]) это условие является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности в задаче выпуклого программирования:

$$\min_x \{f_0(x) : f_1(x) \leq 0, \ f_2(x) \leq 0\},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Приведем пример, показывающий, что предположение 2) теоремы 3.2 существенно.

П р и м е р 3.3. Определим функции

$$f_0(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2,\;\; g_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1.$$

Очевидно, что любая точка окружности $g_1(x_1,x_2)=0$ является решением задачи

$$\min_x\{f_0(x):g_1(x)=0\}$$

и $Lin\partial g_1(x_1,x_2)=1$. Однако, $x^*=(0,0)$ является единственным решением задачи

$$\min_x\{f_0(x):g_1(x)\le 0\}.$$

Таким образом, предположение 2) теоремы 3.2 не выполнено, и утверждение теоремы не верно.

4. Условия максимума выпуклой функции на границе выпуклого множества

Теперь рассмотрим задачу максимизации выпуклой функции на границе выпуклого множества. Известно, что если выпуклая функция f не является постоянной на выпуклом множестве M, то она может достигать наибольшего значения только на границе множества M. Однако она может иметь и точки локальных максимумов. В этой связи представляет интерес следующий результат, который показывает, что в некоторых случаях точки локальных максимумов выпуклой функции f на границе выпуклого множества M являются и точками локальных максимумов этой функции на целом множестве M.

А именно, верна следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть x^* — точка локального максимума непрерывной выпуклой функции $f_0(x)$ при ограничении $g(x)=0$, где $g(x)$ — выпуклая непрерывная функция, причем*

$$0\notin\partial g(x^*),\;\; dimLin\partial g(x^*)\ge 2.$$

Допустим также, что существует вектор x^1 такой, что

$$g(x^1)\le 0,\;\; f_0'(x^*,x^1-x^*)<0.$$

Тогда x^* является точкой локального максимума функции $f_0(x)$ на множестве

$$M=\{x\in R^n/g(x)\le 0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любого линейного функционала $-(y^*,\overline{x})$, $y^*\in\partial f_0(x^*)$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $-f_0$ в точке x^*, поскольку

$$-f_0'(x^*,\overline{x})=-\max_{y^*}\{(y^*,\overline{x}),\; y^*\in\partial f_0(x^*)\}=\min_{y^*}\{-(y^*,\overline{x}),\; y^*\in\partial f_0(x^*)\}\le-(y^*,\overline{x}).$$

Поэтому согласно необходимому условию экстремума (1.2) имеем

$$-y^*\in -cl\{con\partial g(x^*)-conz^*\}\;\;\forall y^*\in\partial f_0(x^*),\; z^*\in\partial g(x^*).$$

Отсюда учитывая утверждение теоремы (1.3) получим

$$-y^* \in \bigcap_{z^* \in \partial g(x^*)} -cl\{con\partial g(x^*) - conz^*\} \ \Rightarrow \ -y^* \in -con\partial g(x^*).$$

Это означает, что линейный функционал $-(y^*, x)$ достигает своего минимального значения на множестве M в точке x^*, т. е.

$$-(y^*, x) \geq -(y^*, x^*) \ \ \forall x \in M \ \Rightarrow \ (y,^* x) \leq (y^*, x^*) \ \Rightarrow \ f_0'(x^*, x - x^*) \leq 0 \ \ \forall x \in M.$$

По предположению теоремы существует точка $x^1 \in M$ такая, что $f_0'(x^*, x^1 - x^*) < 0$. Положим $w = x^1 - x^*$. Согласно [16, теорема 2.2] существует отображение $\varphi(\overline{x}, \lambda) \geq 0$ такое, что

$$f_0\big(x^* + \lambda\overline{x} + \varphi(\overline{x}, \lambda)w\big) \leq f_0(x^*), \tag{4.1}$$

для фиксированного $\overline{x} \in con(M - x^*) \bigcap B_1(0)$ и для достаточно малых $\lambda > 0$, причем $\varphi(\overline{x}, \lambda)/\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$ **равномерно** относительно $\overline{x} \in B_1(0)$. Поэтому, если $\overline{x} \in con(M - x^*)$, то применяя теорему о среднем значении для липшицевой функции (см. [9, теорема 2.3.7, с. 46]), получим

$$f_0\big(x^* + \lambda\overline{x}\big) - f_0\big(x^* + \lambda\overline{x} + \varphi(\overline{x}, \lambda)\big) = \big(z^*, \varphi(\overline{x}, \lambda)w\big),$$

для некоторых

$$z^* \in \partial f_0(c), \ \ c \in \big[x^* + \lambda\overline{x}, x^* + \lambda\overline{x} + \varphi(\overline{x}, \lambda)\big].$$

Отсюда, учитывая неравенство (4.1), имеем

$$f_0(x^* + \lambda\overline{x}) \leq f_0(x^*) + \varphi(\overline{x}, \lambda)(z^*, w). \tag{4.2}$$

Поскольку многозначное отображение $x \to \partial f_0(x)$ полунепрерывно сверху, найдется такое положительное число δ, что

$$(y^*, w) \leq \frac{f_0'(x^*, w)}{2} < 0$$

для $\forall \lambda \in (0, \delta)$, $\forall \overline{x} \in B_1(0)$. Отсюда и из (4.2) следует, что

$$f_0(x^* + \lambda\overline{x}) \leq f_0(x^*) \ \ \forall \lambda \in [0, \delta), \ \ \forall \overline{x} \in B_1(0) \cap con(M - x^*).$$

Поэтому найдется окрестность V точки x^* такая, что

$$f_0(x) \leq f_0(x^*) \ \ \forall x \in V \cap M,$$

т. е, x^* — точка локального максимума функции f на множестве M, что и доказывает теорему. □

5. Задача вариационного исчисления с негладким ограничением типа равенства в левом конце траектории

Рассмотрим теперь следующую простейшую задачу вариационного исчисления со свободной правой частью:

$$\mathfrak{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x(t)}) \to min, \quad \varphi(x(t_0)) = 0, \tag{5.1}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $L = L(x, \dot{x}) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x_1}, \dot{x_2}, ..., \dot{x_n})$ — функция $2n$ переменных, непрерывная со своими частными производными на R^{2n}, $L'_x = (L'_{x_1}, L'_{x_2}, ..., L'_{x_n})$ и $L'_{\dot{x}} = (L'_{\dot{x_1}}, L'_{\dot{x_2}}, ..., L'_{\dot{x_n}})$, $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ — выпуклая функция n переменных, определенная на R^n.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены вышеуказанные предположения, а непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x^*(\cdot) \in C_1^n[t_0, t_1]$ является решением задачи (5.1). Предположим также, что*

$$0 \notin \partial\varphi(x^*(t_0)), \quad dimcon\partial\varphi(x^*(t_0)) \geq 2.$$

Тогда существует число $\lambda \geq 0$ такое, что выполняются

a) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L'_{\dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t)) + L'_x(x^*(t), \dot{x^*}(t)) = 0;$$

b) условие трансверсальности

$$L'_{\dot{x}}(t_0, x^*(t_0), \dot{x^*}(t_0)) \in \lambda\partial\varphi(x^*(t_0)).$$

Доказательство. Рассмотрим множество допустимых функций:

$$\mathfrak{M} = \{x(\cdot) \in C_1^n[t_0, t_1] : \quad \varphi(x(t_0)) = 0\}.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{B}'(x^*(\cdot), h) \geq 0 \quad \forall h \in \Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot)), \tag{5.2}$$

где $\mathfrak{B}'(x^*(\cdot), h(\cdot))$ — производная по направлению $h(\cdot)$ функционала $\mathfrak{B}$ в точке $x^*(\cdot)$, а $\Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot))$ — конус возможных направлений к множеству $\mathfrak{M}$ в точке $x^*(\cdot)$. Действительно, если $h \in K_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot))$, то для любой последовательности положительных чисел $\alpha_i \downarrow 0$ существует последовательность элементов $h_i(\cdot)$ такая, что

$$x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot) \in \mathfrak{M}.$$

Отсюда для достаточно больших i имеем

$$\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) \geq \mathfrak{B}(x * (\cdot)).$$

Нетрудно убедиться, что функционал $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x^*(\cdot)$ с некоторой константой $L > 0$. Поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h(\cdot)) - \mathfrak{B}(x^*(\cdot))}{\alpha_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) - \mathfrak{B}(x^*(\cdot))}{\alpha_i}$$

$$+\lim_{i\to\infty}\frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot)+\alpha_i h_i(\cdot))-\mathfrak{B}(x^*(\cdot)+\alpha_i h(\cdot))}{\alpha_i}.$$

Последний член стремится к нулю, поскольку

$$\Big|\frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot)+\alpha_i h_i(\cdot))-\mathfrak{B}(x^*(\cdot)+\alpha_i h(\cdot))}{\alpha_i}\Big|\le L\|h_i-h\|_{C_1^n}\to 0,$$

и, следовательно, верно неравенство (5.2). Известно (см. [17, формула 4, с. 89]), что

$$\mathfrak{B}'(x^*(\cdot),h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(L'_x-\frac{d}{dt}L'_{\dot{x}},h(t))dt+(L'_{\dot{x}}(t_1),h(t_1))-(L'_{\dot{x}}(t_0),h(t_0))\ge 0, \tag{5.3}$$

$$\forall h(\cdot)\in\Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot)).$$

Согласно [13, теорема 2] для любого фиксированного $y^*\in\partial\varphi(x^*(t_0))$ выпуклый конус

$$K(x^*(t_0),y^*)=\{\overline{x}\in R^n:\ \varphi(x^*(t_0),\overline{x})\le 0,\ (-y^*,\overline{x})\le 0\}$$

является шатром для множества $M\equiv\{x\in R^n:\varphi(x)=0\}$ в точке $x^*(t_0)$. Следовательно, множество

$$\Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot))=\{h(\cdot)\in C_1^n[t_0,t_1]:\ h(t_0)\in K(x^*(t_0),y^*)\}$$

является конусом возможных направлений к множеству $\mathfrak{M}$ в точке $x^*(\cdot)$.

Подставляя в (5.3) $h(t_0)=h(t_1)=0$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}(L'_x-\frac{d}{dt}L'_{\dot{x}},h(t))dt\ge 0\ \ \forall h(\cdot)\in C_1^n[t_0,t_1],\ \ h(t_0)=h(t_1)=0.$$

Отсюда из леммы Дюбуа–Раймона следует, что

$$-\frac{d}{dt}L'_{\dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t))+L'_x(x^*(t),\dot{x}^*(t))=0.$$

Учитывая это, из (5.3) получаем

$$\big(L'_{\dot{x}}(t_1),h(t_1)\big)-\big(L'_{\dot{x}}(t_0),h(t_0)\big)\ge 0.$$

Поскольку $h(t_1)$ произвольно, то

$$-\big(L'_{\dot{x}}(t_0),h(t_0)\big)\ge 0\ \ \forall h(t_0)\in K(x^*(t_0),y^*),$$

т. е.

$$-L'_{\dot{x}}(t_0)\in K^*(x^*(t_0),y^*)=cl\{-con\partial\varphi(x^*(t_0))+cony^*\}.$$

Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что

$$L'_{\dot{x}}(t_0)\in\bigcap_{y^*\in\partial\varphi(x^*(t_0))}cl\{con\partial\varphi(x^*(t_0))-cony^*\}=con\partial\varphi\big(x^*(t_0)\big),$$

это и есть условие трансверсальности. $\square$

References

[1] F. H. Clarke, “A new approah to Lagrange multipliers”, *Mathematics of Operations Research*, **1**:2 (1976), 165–174.

[2] Р. А. Хачатрян, “О необходимых условиях экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа равенств”, *Владикавказский математический журнал*, **18**:3 (2016), 72–83. [R. A. Khachatryan, “On Necessary Optimality Conditions in Non-Smooth Problems with Constraints”, *Vladikavkazian Mathematical Journal*, **18**:3 (2016), 72–83 (In Russian)].

[3] A. D. Ioffe, “Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional costraints”, *Mathematical Programming*, **58** (1993), 137–145.

[4] Е. С. Половинкин, “Субдифференциалы разности двух выпуклых функций”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **19**:5 (2014), 167–184; англ. пер.:E. S. Polovinkin, “Subdifferential for the difference of two convex functions”, *J. Math. Sci.*, **218**:5 (2016), 664–677.

[5] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981. [V. F. Dem’yanov, L. V. Vasilev, *Nedifferenciruemaja Optimizacia*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[6] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Наука, М., 1990. [V. F. Dem’yanov, A M. Rubinov, *Osnovi Negladkogo Analisa i Kvazidifferentialnogo Ischislenya*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].

[7] В. Ф. Демьянов, Л. Н. Полякова, “Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве”, *ЖВМ и МФ*, **20**:4 (1980), 849–846; англ. пер.:V. F. Dem’yanov, L. N. Polyakova, “Minimization of a quasi-differentiable function in a quasi-differntiable set”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:4 (1980), 34–43.

[8] В. Ф. Демьянов, Б. Н. Малоземов, *Введение в минимакс*, Наука, М., 1972. [V. F. Dem’yanov, B. N. Malozemov, *Vvedenie v Minimax*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[9] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Мир, М., 1988; англ. пер.:F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[10] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980. [B. N. Pshenycnii, *Vypuklij Analiz i Extremalnye Zadachi*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[11] В. Г. Болтянский, “Метод шатров в теории экстремальных задач”, *Успехы мат. наук*, **30**:3 (1975), 3–53; англ.пер.:V. G. Boltyanskii, “The method of tents in the theory of extremal problems”, *Russian Math. Surveys*, **30**:3 (1975), 1–54.

[12] R. Ivanachi, “On the intersection of Continous local Tents”, *Proc. Japan Acad.*, **69**:A (1993), 308–311.

[13] Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, “О необходимых условиях экстремума для негладких функций”, *Известия НАН Армении, сер. Математика*, **18**:4(1983), 318–325. [B. N. Pshenychnii, R. A. Khachatryan, “On the necessary extremum conditions for a nonsmooth functions”, *Izwestya NAN Armenii, Mathematika*, **18**:4(1983), 318–325 (In Russian)].

[14] Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, Наука, М., 1982. [B. N. Pshenychnii, *Neobkhodymie Uslovya Extremuma*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].

[15] А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров, *Методы оптимизации*, Наука, М., 1986. [A. G. Sukharev, A. V. Timokhov, V. V. Fedorov, *Methodi Optimizacii*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[16] Р. А. Хачатрян, “О регулярных касательных конусах”, *Известия НАН Армении. Математика*, **52**:2 (2017), 66–77; англ. пер.:R. A. Khachatryan, “On regular tangent cones”, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **52**:2 (2017), 74–80.

[17] В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров, *Сборник задач по оптимизации, теория и примеры-задачи*, Наука, М., 1984. [V. M. Alekseev, E. M. Galeev, V. M. Tikhomirov, *Sbornik Zadach po Optimizacii, Teoria i Primeri-zadachy*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

Информация об авторе

Хачатрян Рафик Агасиевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования. Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: khrafik@ysu.am

Для контактов:

Хачатрян Рафик Агасиевич
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Поступила в редакцию 18 марта 2020 г.
Поступила после рецензирования 13 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the author

Rafik A. Khachatryan, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department. Yerevan State University, Yerevan, Armenia. E-mail: khrafik@ysu.am

Corresponding author:

Rafik R. Khachatryan
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Received 18 March 2020
Reviewed 13 May 2020
Accepted for press 8 June 2020