ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 130 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-156-164

УДК 519.6

Об устойчивом приближенном решении одной некорректно поставленной краевой задачи для метагармонического уравнения

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Полина Александровна ЛЕСИК, Александр Владиславович КЛИМИШИН, Александр Михайлович КОТЮКОВ, Андрей Андреевич РОМАНОВ, Анна Георгиевна ХЕГАЙ

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

On a stable approximate solution of an ill-posed boundary value problem for the metaharmonic equation

Evgeniy B. LANEEV, Polina A. LESIK, Alexander V. KLIMISHIN, Alexander M. KOTYUKOV, Andrey A. ROMANOV, Anna G. KHEGAI

RUDN University

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача для метагармонического уравнения в области в цилиндре прямоугольного сечения. На боковых гранях цилиндрической области заданы однородные условия первого рода. Цилиндрическую область с одной стороны ограничивает поверхность общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная. Другая граница цилиндрической области – плоская – свободна. Такая задача некорректно поставлена, и для построения ее приближенного решения в случае данных Коши, известных с некоторой погрешностью, необходимо применение регуляризирующих алгоритмов. В работе рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения получено явное представление точного решения поставленной задачи. Устойчивое решение интегрального уравнения получено методом регуляризации Тихонова. В качестве его приближенного решения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе этого решения строится приближенное решение задачи в целом. Приведена теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных. Результаты работы могут быть использованы для математической обработки данных тепловидения в медицинской диагностике.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; метагармоническое уравнение; интегральное уравнение первого рода; метод регуляризации Тихонова

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00590_а).

Для цитирования: *Ланеев Е.Б., Лесик П.А., Климишин А.В., Котюков А.М., Романов А.А., Хегай А.Г.* Об устойчивом приближенном решении одной некорректно поставленной краевой задачи для метагармонического уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 156–164. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-156-164.

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for a metaharmonic equation in a region in a rectangular cylinder. On the side faces cylinder region is set to homogeneous conditions of the first kind. The cylindrical area is bounded on one side by an arbitrary surface on which the Cauchy conditions are set, i. e. the function and its normal derivative are set. The other boundary of the cylindrical region, which is flat, is free. This problem is ill-posed, and to construct its approximate solution in the case of Cauchy data known with some error, it is necessary to use regularizing algorithms. In this paper, the problem is reduced to the Fredholm integral equation of the first kind. Based on the solution of the integral equation, an explicit representation of the exact solution of the problem is obtained. A stable solution of the integral equation is obtained by the method of Tikhonov regularization. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution. Based on this solution, an approximate solution of the problem as a whole is constructed. The convergence theorem of the approximate solution of the problem to the exact one is given when the error in the Cauchy data tends to zero and when the regularization parameter is agreed with the error in the data. The results can be used for mathematical processing of thermal imaging data in medical diagnostics.

Keywords: ill-posed problem; metaharmonic equation; integral equation of the first kind; method of Tikhonov regularization

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00590_a).

For citation: Laneev E.B., Lesik P.A., Klimishin A.V., Kotyukov A.M., Romanov A.A., Khegai A.G. Ob ustoychivom priblizhennom reshenii odnoy nekorrektno postavlennoy krayevoy zadachi dlya metagarmonicheskogo uravneniya [On a stable approximate solution of an ill-posed boundary value problem for the metaharmonic equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 156–164. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-156-164. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается некорректно поставленная смешанная краевая задача для метагармонического уравнения с условиями Коши на поверхности общего вида. Такая задача возникает в медицинской диагностике как задача обработки термографических данных с целью выявления патологий у пациентов [1]. Следуя работам [2, 3], в которых решена соответствующая задача для уравнения Лапласа, краевая задача для метагармонического уравнения приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [4]. Задача аналогична задаче продолжения поля ньютоновского потенциала с плоскости [5]. Установлена сходимость приближенного решения к точному.

1. Постановка задачи

В цилиндрической области

$$D(F,H)=\{(x,y,z):0<x<l_x,0<y<l_y,F(x,y)<z<H\} \tag{1.1}$$

рассмотрим следующую краевую задачу для метагармонического уравнения

$$\begin{array}{l} \Delta u(M)-k^2u(M)=0,\quad M\in D(F,H),\\ u|_S=f,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S=g,\\ u|_{x=0,l_x}=0,\\ u|_{y=0,l_y}=0, \end{array} \tag{1.2}$$

где поверхность

$$S=\{(x,y,z):0<x<l_x,0<y<l_y,z=F(x,y)<H\}. \tag{1.3}$$

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u\in C^2(D(F,H))\bigcap C^1(\overline{D(F,H)})$.

Смешанная задача (1.2) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g. Получим явное выражение точного решения задачи в зависимости от точных данных Коши f и g.

2. Построение точного решения задачи

Пусть $\varphi(M,P)$ — функция источника первой краевой задачи для метагармонического уравнения

$$\begin{array}{l} \Delta v(P)-k^2v(P)=-\rho(P),\quad P\in D^\infty,\\ v|_{x=0,l_x}=0,\\ v|_{y=0,l_y}=0,\\ v\to 0\quad \text{при}\quad |z|\to\infty \end{array} \tag{2.1}$$

в бесконечном цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty=\{(x,y,z):0<x<l_x,0<y<l_y,-\infty<z<\infty\}. \tag{2.2}$$

Функция источника представляет собой сумму фундаментального решения метагармонического уравнения и метагармонической по P функции $W(M,P)$

$$\varphi(M,P)=\frac{\exp\{-kr_{MP}\}}{4\pi r_{MP}}+W(M,P), \tag{2.3}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P, и удовлетворяет граничным условиям. Функция источника (2.3) может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(M,P)=\frac{2}{l_xl_y}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2+(\frac{m\pi}{l_y})^2+k^2}|z_M-z_P|}}{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2+(\frac{m\pi}{l_y})^2+k^2}}\sin\frac{\pi nx_M}{l_x}\sin\frac{\pi my_M}{l_y}\sin\frac{\pi nx_P}{l_x}\sin\frac{\pi my_P}{l_y}.$$

Пусть $M \in D(F,H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.2) и функции источника $\varphi(M,P)$, получим

$$u(M) = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H). \tag{2.4}$$

Учитывая однородные граничные условия для φ и u на боковых гранях цилиндрической области $D(F,H)$, получим

$$u(M) = \int\limits_S \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P + \\ + \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \tag{2.5}$$

где второй интеграл берется по прямоугольнику

$$\Pi(H) = \{(x,y,z) :\, 0 < x < l_x,\, 0 < y < l_y,\, z = H\}. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\Phi(M) = \int\limits_S \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.7}$$

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.8}$$

тогда решение задачи (1.2) получим в виде

$$u(M) = v(M) + \Phi(M), \quad M \in D(F,H), \tag{2.9}$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g.

Функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} &\Delta v(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ &v|_{z=H} = v_H, \\ &v|_{x=0,l_x} = 0, \\ &v|_{y=0,l_y} = 0, \\ &v \to 0 \qquad\quad \text{при} \quad z \to -\infty. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.2) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье

$$v(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (\tilde{v_H})_{nm} \exp\{\sqrt{\Big(\frac{n\pi}{l_x}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{l_y}\Big)^2 + k^2}(z_M - H)\} \sin\frac{\pi n x_M}{l_x} \sin\frac{\pi m y_M}{l_y}, \tag{2.11}$$

$$(\tilde{v_H})_{nm} = \frac{4}{l_x l_y} \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} v_H(x,y) \sin\frac{\pi n x}{l_x} \sin\frac{\pi m y}{l_y} dxdy, \tag{2.12}$$

причем ряд (2.11) сходится равномерно области $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\left|(\tilde{v_H})_{nm} e^{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2+(\frac{m\pi}{l_y})^2+k^2}(z_M-H)} \sin\frac{\pi n x_M}{l_x} \sin\frac{\pi m y_M}{l_y}\right| \leqslant \left|(\tilde{v_H})_{nm}\right| e^{-\varepsilon\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2+(\frac{m\pi}{l_y})^2+k^2}}.$$

Таким образом, из представления (2.9) решения задачи (1.2) и (2.11) следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.2) достаточно выразить функцию v_H в (2.11) через заданные функции f и g.

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(x,y,z) :\ 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ -\infty < z < F(x,y)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.2) и функции $\varphi(M,P)$ вида (2.3), аналогично (2.4) получим

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для φ и u и обозначений (2.7) и (2.8) получим

$$v(M) = -\Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \tag{2.13}$$

Из (2.11), (2.12) функция v может быть выражена через v_H в виде интеграла

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} G(M,P) v_H(P) dx_P dy_P, \quad M \in D(-\infty, H), \tag{2.14}$$

где

$$G(M,P) = \frac{4}{l_x l_y}\sum_{n,m=1}^{\infty} e^{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2+(\frac{m\pi}{l_y})^2+k^2}(-H+z_M)} \sin\frac{\pi n x_M}{l_x} \sin\frac{\pi m y_M}{l_y} \sin\frac{\pi n x_P}{l_x} \sin\frac{\pi m y_P}{l_y}. \tag{2.15}$$

Пусть $a < \min\limits_{(x,y)} F(x,y)$ и $M \in \Pi(a)$, где $\Pi(a)$ — область вида (2.6) при $z = a$, тогда из (2.13) и (2.14) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\Pi(H)} G(M,P) v_H(P) dx_P dy_P = -\Phi(M), \quad M \in \Pi(a). \tag{2.16}$$

Из уравнения (2.16) с учетом разложения (2.15) при $z_M = a$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$-(\tilde{v_H})_{nm} \exp\{-\sqrt{\big(\frac{n\pi}{l_x}\big)^2 + \big(\frac{m\pi}{l_y}\big)^2 + k^2}(H-a)\} = \tilde{\Phi}_{nm}(a), \tag{2.17}$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M\in\Pi(a)}$:

$$\tilde{\Phi}_{nm}(a) = \frac{4}{l_x l_y}\int\limits_{\Pi(a)} \Phi(x,y,a)\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}dxdy. \tag{2.18}$$

Отметим, что формула (2.17) характеризует убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ с ростом n и m, если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.2) и, следовательно, — функции v_H вида (2.11). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v_H})_{nm}$ из (2.17) в ряд (2.11), получим функцию v в области $D(-\infty,H)$

$$v(M) = -\sum_{n,m=1}^{\infty}\tilde{\Phi}_{nm}(a)\exp\{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2+(\frac{m\pi}{l_y})^2+k^2}(z_M-a)\}\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}. \tag{2.19}$$

Ряд (2.19) как и ряд (2.11) сходится равномерно в $D(-\infty,H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$, если решение задачи (1.2) существует при данных f и g.

Формула (2.9), где функции v и Φ вида (2.19) и (2.7) соответственно, дает явное выражение для решения задачи (1.2).

3. Решение задачи в случае приближенных данных

Пусть функции f и g в задаче (1.2) заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ, такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.2), сходящееся к точному решению при $\delta\to 0$. Функция Φ вида (2.7) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \Big[g^\delta(P)\varphi(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P. \tag{3.1}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.7) при $M\in\Pi(a)$, $a<\min\limits_{(x,y)}F(x,y)$, получим оценку погрешности правой части интегрального уравнения (2.16)

$$|\Phi^\delta(M)-\Phi(M)| \le \max_{M\in\Pi(a)}\Big(\int\limits_S \varphi^2(M,P)d\sigma_P\Big)^{1/2}||g^\delta - g||_{L_2(S)} +$$
$$+\max_{M\in\Pi(a)}\Big(\int\limits_S \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]^2 d\sigma_P\Big)^{1/2}||f^\delta - f||_{L_2(S)} \leqslant C\delta. \tag{3.2}$$

В качестве приближенного решения интегрального уравнения (2.16) с приближенной правой частью (3.1) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [4] со стабилизатором нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \big\|Gw - \Phi^\delta\big\|^2_{L_2(\Pi(a))} + \alpha\|w\|^2_{L_2(\Pi(H))},\ \alpha>0. \tag{3.3}$$

Здесь G — интегральный оператор в (2.16). Экстремаль функционала может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.3)

$$G^*Gw + \alpha w = G^*\Phi^\delta,$$

которое может быть получено в виде алгебраического уравнения относительно коэффициентов Фурье функции w

$$\exp\{-2\sqrt{\Big(\frac{n\pi}{l_x}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{l_y}\Big)^2 + k^2}(H-a)\}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = \\ = -\exp\{-\sqrt{\Big(\frac{n\pi}{l_x}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{l_y}\Big)^2 + k^2}(H-a)\}\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a), \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a) = \frac{4}{l_x l_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\Phi^\delta(x,y,a)\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}dxdy$$

— коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(a)}$.

Решая алгебраическое уравнение относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя экстремаль w^δ_α вместо v_H в (2.11), найдем приближение v^δ_α к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v^\delta_\alpha(M) = -\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a)\exp\{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}(z_M - a)\}}{1 + \alpha\exp\{2\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}(H-a)\}}\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (3.5)$$

Функция (3.5) отличается от точного решения (2.19) интегрального уравнения (2.16) множителем $(1 + \alpha\exp\{2\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}(H-a)\})^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствие с (2.9) приближенное решение задачи (1.2) получим в виде

$$u^\delta_\alpha(M) = v^\delta_\alpha(M) + \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F,H), \quad (3.6)$$

где v^δ_α и Φ^δ — функции вида (3.5) и (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть решение задачи (1.2) существует. Тогда для любого* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *функция* $u_{\alpha(\delta)}$ *вида (3.6) равномерно сходится при* $\delta \to 0$ *к точному решению в* $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0,5(H - \max\limits_{(x,y)} F(x,y))$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство соответствующей теоремы в [2].

Формулы (3.6), (3.5) и (3.1), таким образом, дают приближенное решение поставленной задачи (1.2), устойчивое к погрешностям в данных.

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Построенное решение задачи (1.2) может быть использовано для решения обратной задачи термографии [6] в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [7]. В частности в медицине при моделировании участка тела пациента к задаче (1.2) приводит модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего источники тепла и систему кровотока, которая связана со вторым слагаемым в метагармоническом уравнении [1]. На боковых гранях цилиндра поддерживается постоянная температура, а на поверхности S имеет место теплообмен с внешней средой, описываемый законом Ньютона, то есть третьим краевым условием. Если распределение температуры на поверхности S может быть измерено как функция f, например, тепловизионными методами, то в рамках этой модели оказывается известной и нормальная производная, что приводит к рассмотренной здесь задаче восстановления пространственного распределения температуры, аномалии которого могут быть связаны с патологиями.

References

[1] J. P. Agnelli, A. A. Barrea, C. V. Turner, "Tumor location and parameter estimation by thermography", *Mathematical and Computer Modelling*, **53**:7-8 (2011), 1527–1534.

[2] Е. Б. Ланеев, Б. Васудеван, "Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа", *Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика*, 1999, № 1, 128–133. [E. B. Laneev, B. Vasudevan,, "On a stable solution of a mixed problem for the Laplace equation", *PFUR Reports. Series: Applied Mathematics and Computer Science*, 1999, № 1, 128–133 (In Russian)].

[3] Е. Б. Ланеев, "О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа", *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.:E. B. Laneev, "Construction of a Carleman Function Based on the Tikhonov Regularization Method in an Ill-Posed Problem for the Laplace Equation", *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 476–485.

[4] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. YA. Arsenin, *Metody Resheniya Nekorrektnyh Zadach*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russian)].

[5] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, "О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации", *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1968, № 1, 30–48. [A. N. Tikhonov A.N., V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov, "O prodolzheni potenciala v storonu vozmushchayushchih mass na osnove metoda regulyarizacii", *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1968, № 1, 30–48 (In Russian)].

[6] Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, "Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе.", *Вестник РУДН. Серия Математика*, **10**:1 (2003), 100–110. [E. B. Laneev, M. N. Muratov,, "Ob odnoy obratnoy zadache k kraevoy zadache dlya uravneniya Laplasa s usloviem tret'ego roda na netochno zadannoy granitse", *PFUR Reports. Series: Mathematics*, **10**:1 (2003), 100–110 (In Russian)].

[7] Г. Р. Иваницкий, "Тепловидение в медицине", *Вестник РАН*, **76**:1 (2006), 48–58. [G. R. Ivanitskii, "Thermovision in medicine", *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**:1 (2006), 48–58 (In Russian)].

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Лесик Полина Александровна, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: polinalesik@yandex.ru

Климишин Александр Владиславович, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Котюков Александр Михайлович, аспирант Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: amkotyukov@mail.ru

Романов Андрей Андреевич, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: an1romanov@gmail.com

Хегай Анна Георгиевна, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: annh98@icloud.com

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 10 апреля 2020 г.
Поступила после рецензирования 22 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Polina A. Lesik, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: polinalesik@yandex.ru

Aleksandr V. Klimishin, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Aleksandr M. Kotyukov, Post-Graduate Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: amkotyukov@mail.ru

Andrey A. Romanov, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: an1romanov@gmail.com

Anna G. Khegai, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: annh98@icloud.com

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Received 10 April 2020
Reviewed 22 May 2020
Accepted for press 8 June 2020