

© Барсегян В.Р., Солодуша С.В., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-131-146

УДК 517.977: 534.112

**Задача граничного управления колебаниями струны
смещением левого конца при закреплённом правом конце
с заданными значениями функции прогиба
в промежуточные моменты времени**

Ваня Рафаелович БАРСЕГЯН^{1,2}, Светлана Витальевна СОЛОДУША³

¹ Институт механики НАН Республики Армения

0019, Армения, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б

² Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

³ ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН»

664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130

**The problem of boundary control of string vibrations
by displacement of the left end when the right end is fixed
with the given values of the deflection function
at intermediate times**

Vanya R. BARSEGHYAN^{1,2}, Svetlana V. SOLODUSHA³

¹ Institute of Mechanics NAS RA

24B Marshal Baghramyan Ave., Yerevan 0019, Armenia

² Yerevan State University

1 Alec Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

³ Melentiev Energy Systems Institute SB RAS

130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается задача граничного управления колебаниями однородной струны, для которой наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями заданы значения функции прогиба в промежуточные моменты времени. Задача управления смещением одного конца струны при закреплённом другом конце сведена к задаче управления с нулевыми граничными условиями. Предложен конструктивный метод построения граничного управления процессом колебаний струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Проведен вычислительный эксперимент и построены соответствующие графики, которые подтверждают полученные результаты.

Ключевые слова: колебания струны; управление колебаниями; граничное управление; управление промежуточными состояниями; разделение переменных

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН (рег. № АААА-А17-117030310442-8).

Для цитирования: Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закреплённом правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 131–146. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-131-146.

Abstract. We consider the boundary control problem for the homogeneous string vibration equation with given the classical boundary (initial and final) conditions and with given values of the deflection function at intermediate times. The control is performed by displacement of the left end of the string when the right end is fixed. The problem is reduced to the control problem with zero boundary conditions. We propose the constructive method for constructing the boundary control of the process of string vibrations with given values of the deflection function at intermediate times. We present the results of numerical experiments and the corresponding graphs confirm the validity of the results.

Keywords: string vibrations; vibration control; boundary control; intermediate state control; separation of variables

Acknowledgements: The research is partly supported by the Fundamental Research of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (reg. no. AAAA-A17-117030310442-8).

For citation: Barseghyan V.R., Solodusha S.V. Zadacha granichnogo upravleniya kolebaniyami struny smeshcheniyem levogo kontsa pri zakreplennom pravom kontse s zadannymi znacheniyami funktsii progiba v promezhutochnyye momenty vremeni [The problem of boundary control of string vibrations by displacement of the left end when the right end is fixed with the given values of the deflection function at intermediate times]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 131–146. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-131-146. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Волновыми уравнениями моделируется широкий спектр физических процессов, которые связаны с колебаниями. Управляемые колебательные системы широко распространены в промышленности, технике, механике и других теоретических и прикладных областях науки. Одной из актуальных прикладных задач управления колебаниями является генерация заранее заданной «желаемой» формы колебаний.

В связи с многочисленными приложениями и важным теоретическим значением вопросы управления колебательными процессами с различными типами граничных условий достаточно давно интересуют исследователей и им посвящена многочисленная литература (см., например, монографии [1–3] и их библиографию). Приведем ссылки на некоторые работы, наиболее близко относящиеся к настоящей статье. В [3] для задачи управления упругими колебаниями, описываемыми одномерным волновым уравнением, предложены способы нахождения граничных управлений. Проблема граничного управления и оптимального управления волновыми процессами в классе обобщенных решений рассмотрена в [4, 5]. Отметим, что в [5] изучена классическая задача граничного управления колебаниями струны, которое осуществляется за период времени меньше критического, получены необходимые и достаточные условия существования единственного управления. В работах [6–9] даны различные постановки задач граничного и распределенного управления, а также оптимального управления колебаниями струны с заданными промежуточными состояниями. В [10] рассмотрена задача граничного управления, а в [11] — оптимального граничного управления смещениями на двух концах процессом вынужденных колебаний струны. В работе [12] предложен метод приближенного построения оптимального управления процессом колебаний струны за счет задания режима колебаний ее концов. В работах [13, 14] рассматривается граничная задача для уравнения колебания струны с заданной в некоторый момент времени скоро-

стью и строится ее решение. Управление системами, динамика которых моделируется дифференциальными уравнениями с промежуточными условиями, является актуальным и активно развиваемым направлением современной теории управления.

В настоящей работе исследуются колебания однородной струны с заданными функциями прогиба в некоторые фиксированные моменты времени. Предложен конструктивный метод построения граничного управляющего воздействия. Построено граничное управление, под воздействием которого функция прогиба струны принимает в промежуточные моменты времени заданные (или близкие к заданным) значения. Проведен вычислительный эксперимент и построены соответствующие графики, которые подтверждают полученные результаты.

1. Постановка задачи

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т. е. отклонение от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Здесь функция $u(t)$ — граничное управление. В уравнении (1.1) коэффициент определяется формулой $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}$.

Пусть в некоторые моменты времени t_k , $k = \overline{1, m}$, такие что

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы значения состояния

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.4)$$

Задача граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, требуется найти управление, переводящее систему из заданного начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) \equiv \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0, m+1}$, принадлежат пространству $C^2[0, l]$, а функции $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ — пространству $C^1[0, l]$. Функция $u(t) \in C^2[0, T]$ называется допустимым управлением. Предполагается также, что все функции таковы, что выполняются условия согласования (см. раздел 2).

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Так как граничные условия (1.3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями (см. [15]). Решение уравнения (1.1) ищем в виде суммы

$$Q(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (2.1)$$

где $V(x, t)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению (1.1) с однородными граничными условиями

$$V(0, t) = V(l, t) = 0, \quad (2.2)$$

а $W(x, t)$ — решение уравнения (1.1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0, t) = u(t), \quad W(l, t) = 0.$$

Функция $W(x, t)$ имеет вид

$$W(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u(t). \quad (2.3)$$

Подставив (2.1) в (1.1) и учитывая (2.3), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (2.4)$$

где

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) u''(t). \quad (2.5)$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (1.2), (1.4) и (1.5), функция $V(x, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u'(0), \quad (2.6)$$

промежуточным условиям

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u(t_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.7)$$

и конечным условиям

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u(T), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u'(T). \quad (2.8)$$

Из условия (2.2) следует

$$V(0, t_i) = V(l, t_i) = 0, \quad \left. \frac{\partial V(0, t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \left. \frac{\partial V(l, t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = 0, \quad i = \overline{0, m+1}. \quad (2.9)$$

Из условий (2.6), (2.7) и (2.8) с учетом (2.9) получим следующие условия согласования:

$$u(0) = \varphi_0(0), \quad u'(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(l) = \psi_0(l) = 0, \quad (2.10)$$

$$u(t_i) = \varphi_i(0), \quad \varphi_i(l) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.11)$$

$$u(T) = \varphi_T(0), \quad u'(T) = \psi_T(0), \quad \varphi_T(l) = \psi_T(l) = 0. \quad (2.12)$$

С учетом условий (2.10)–(2.12), условия (2.6)–(2.8) запишутся следующим образом:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_0(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_0(0), \quad (2.13)$$

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_i(0), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.14)$$

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_T(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_T(0). \quad (2.15)$$

Таким образом, решение задачи граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени сведена к задаче управления (2.4), (2.5) с граничными условиями (2.2), которая формулируется следующим образом: требуется найти граничное управление $u(t)$ при $0 \leq t \leq T$, переводящее колебание, описываемое уравнением (2.4) с граничными условиями (2.2), из заданного начального состояния (2.13) через промежуточные состояния (2.14) в конечное состояние (2.15).

3. Решение задачи

Учитывая, что граничные условия (2.2) однородны, выполнены условия согласованности и принадлежности функций указанным пространствам, решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (3.1)$$

Представим функции $F(x, t)$, $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{0, m+1}$), $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x, t)$ в уравнения (2.4), (2.5) и в условия (2.13)–(2.15), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \quad (3.2)$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_0(0), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_0(0), \quad (3.3)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_i(0), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_T(0), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_T(0), \quad (3.5)$$

где

$$F_k(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l} u''(t), \quad (3.6)$$

а через $\varphi_k^{(i)}$ ($i = \overline{0, m+1}$), $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ обозначены соответственно коэффициенты Фурье функций $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{0, m+1}$), $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$.

Общее решение уравнения (3.2) с начальными условиями (3.3) и его производная имеют вид

$$\begin{aligned} V_k(t) &= V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \\ \dot{V}_k(t) &= -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь используем подходы и преобразования, приведенные в работах [16, 17]. Учитывая промежуточные (3.4) и конечные (3.5) условия, из (3.7) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} \int_0^T F_k(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= \tilde{C}_{1k}(T), \\ \int_0^T F_k(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= \tilde{C}_{2k}(T), \\ \int_0^{t_j} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_j - \tau) d\tau &= \tilde{C}_{1k}(t_j), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{1k}(t_j) &= \lambda_k V_k(t_j) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_j. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя выражение (3.6) функции $F_k(t)$ в (3.8) и интегрируя по частям с учетом условий (2.10)–(2.12), получим

$$\begin{aligned} \int_0^T u(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}(T), \quad \int_0^T u(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \\ \int_0^T u(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_1), \quad \dots, \quad \int_0^T u(\tau) h_k^{(m)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_m), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} \right], \\ C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} \right], \\ C_{1k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(t_j) + X_{1k}^{(j)} \right], \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(0) - \psi_0(0) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(0) \cos \lambda_k T, \\ X_{2k} &= \psi_T(0) - \psi_0(0) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(0) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(j)} &= \lambda_k \varphi_j(0) - \psi_0(0) \sin \lambda_k t_j - \lambda_k \varphi_0(0) \cos \lambda_k t_j, \end{aligned}$$

$$h_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k (T - \tau) \\ \cos \lambda_k (T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) \\ \vdots \\ h_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_m) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Тогда соотношение (3.10) запишется следующим образом:

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau) u(\tau) d\tau = C_k(t_1, \dots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.14)$$

Таким образом, для нахождения функции $u(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получили бесконечные интегральные соотношения (3.14). На практике на основе модального метода выбираются несколько первых n гармоник упругих колебаний и решается задача синтеза управления, используя методы теории управления конечномерными системами [16, 17]. Следуя модальному методу, для первых n гармоник введем следующие обозначения блочных матриц:

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(t_1, \dots, t_m, T) \\ C_2(t_1, \dots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n(t_1, \dots, t_m, T) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

имеющих одинаковые размерности, равные $n(m + 2) \times 1$.

Для первых n гармоник с учетом (3.15) из (3.14) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau) u_n(\tau) d\tau = \eta_n \quad (3.16)$$

(здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы n будет означать «для первых n гармоник»).

На основе вышеприведенного, для произвольных чисел первых гармоник граничное управляющее воздействие $u_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (3.16), построено в виде [16–18]

$$u_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t), \quad (3.17)$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — некоторая вектор-функция, такие что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) dt. \quad (3.18)$$

Здесь $H_n(t) H_n^T(t)$ — внешнее произведение, S_n — известная матрица размерности $n(m + 2) \times n(m + 2)$, относительно которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Из (3.16) следует, что первые n гармоник системы (3.2) с условиями (3.3)–(3.5) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n из (3.15) можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (3.17).

Подставляя (3.17) в (3.6), а полученное для $F_k(t)$ выражение — в (3.7), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь $V(x, t)$, а согласно (2.1), получим функцию $Q(x, t)$ прогиба струны для первых n гармоник.

4. Случай $m = 1$

Рассмотрим случай $m = 1$, т. е. когда в одном промежуточном моменте времени t_1 ($0 < t_1 < T$) задано состояние точек струны: $Q(x, t_1) = \varphi_1(x)$, $0 \leq x \leq l$.

В этом случае, согласно формулам (3.10)–(3.12), будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^T u(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T u(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T),$$

$$\int_0^T u(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, согласно (3.13),

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ \cos \lambda_k(T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для простоты построим функцию граничного управления $u_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). Тогда, согласно (3.15), будем иметь $H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau)$, $\eta_1 = C_1(t_1, T)$, а из (3.18) получим

$$S_1 = \int_0^T H_1(\tau) H_1^T(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} \sin^2 \lambda_1(T - \tau) & \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) \\ \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1(T - \tau) & \cos^2 \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) \\ h_1^{(1)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & (h_1^{(1)}(\tau))^2 \end{pmatrix} d\tau.$$

Элементы матрицы S_1 , согласно обозначениям (3.12), имеют следующий вид:

$$s_{11} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \quad s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, \quad s_{22} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T,$$

$$s_{13} = s_{31} = \int_0^{t_1} \sin \lambda_1(t_1 - \tau) \sin \lambda_1(T - \tau) d\tau = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1(T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T,$$

$$s_{23} = s_{32} = \int_0^{t_1} \sin \lambda_1(t_1 - \tau) \cos \lambda_1(T - \tau) d\tau = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1(T - t_1),$$

$$s_{33} = \int_0^{t_1} \sin^2 \lambda_1(t_1 - \tau) d\tau = \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1,$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$.

Пусть \hat{s}_{ij} ($i, j = \overline{1, 3}$) — элементы матрицы S_1^{-1} , так что

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{s}_{11} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) - \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right)^2 \right],$$

$$\hat{s}_{12} = \hat{s}_{21} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) \right],$$

$$\hat{s}_{13} = \hat{s}_{31} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) - \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \right],$$

$$\hat{s}_{22} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) - \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right)^2 \right],$$

$$\hat{s}_{23} = \hat{s}_{32} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) - \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) \right],$$

$$\hat{s}_{33} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{T^2}{4} - \left(\frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right)^2 - \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \right)^2 \right].$$

Из формулы (3.17) следует, что

$$u_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1} \eta_1 + f_1(\tau).$$

Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} u_1(\tau) = & \sin \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ & + \cos \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] + \\ & + \sin \lambda_1 (t_1 - \tau) [\hat{s}_{31} C_{11}(T) + \hat{s}_{32} C_{21}(T) + \hat{s}_{33} C_{11}(t_1)] \quad \text{при } \tau \in [0, t_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(\tau) = & \sin \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ & + \cos \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] \quad \text{при } \tau \in (t_1, T]. \end{aligned}$$

Отметим, что по аналогии с приведенными в конце раздела 3 формулами можно выписать выражение для функции $Q(x, t)$ при $n = 1$.

5. Пример с вычислительным экспериментом

Предположим, что $t_1 = l/a$, $T = 2l/a$. Тогда с учетом $\lambda_1 = a\pi/l$ получим $t_1\lambda_1 = \pi$, $T\lambda_1 = 2\pi$, $\lambda_1(T - t_1) = \pi$. Для матриц S_1 и S_1^{-1} будем иметь:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\lambda_1} & 0 & -\frac{t_1}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{\lambda_1} & 0 \\ -\frac{t_1}{2} & 0 & \frac{t_1}{2} \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{\pi} & 0 & \frac{2\lambda_1}{\pi} \\ 0 & \frac{\lambda_1}{\pi} & 0 \\ \frac{2\lambda_1}{\pi} & 0 & \frac{4}{t_1} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det S_1 = \pi^2 t_1 / (4\lambda_1^2)$. Из формул (3.9) и (3.11) получим

$$\begin{aligned} C_{11}(T) &= \frac{l}{2a} (V_1(T) - V_1(0)) + \frac{\varphi_T(0) - \varphi_0(0)}{\lambda_1}, \\ C_{21}(T) &= \frac{l}{2a\lambda_1} (\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1^2}, \\ C_{11}(t_1) &= \frac{l}{2a} (V_1(t_1) + V_1(0)) + \frac{\varphi_1(0) + \varphi_0(0)}{\lambda_1}, \end{aligned}$$

а для управления получим

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \cos \lambda_1 \tau \left(\frac{\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)}{2\lambda_1} + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1 \pi} \right) + \\ &\quad + \sin \lambda_1 \tau \left(V_1(t_1) + V_1(0) + \frac{2}{\pi} (\varphi_1(0) + \varphi_0(0)) \right) \quad \text{при } \tau \in [0, t_1], \\ u_1(\tau) &= \cos \lambda_1 \tau \left(\frac{\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)}{2\lambda_1} + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1 \pi} \right) - \\ &\quad - \sin \lambda_1 \tau \left(V_1(T) + V_1(t_1) + \frac{2}{\pi} (\varphi_T(0) + \varphi_1(0)) \right) \quad \text{при } \tau \in (t_1, T]. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $a = 1/3$, $l = 1$, тогда $t_1 = 3$, $T = 6$. Из формулы (3.7) с учетом, что $F_1(t) = -2a u_1''(t) / (\lambda_1 l)$, получим

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \left(V_1(0) - \frac{t(V_1(0) + V_1(3))}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} t + \\ &\quad + \left(\frac{3\dot{V}_1(0)}{\pi} + \frac{V_1(0) + V_1(3)}{\pi} + \frac{t(\dot{V}_1(6) - \dot{V}_1(0))}{2\pi} \right) \sin \frac{\pi}{3} t \quad \text{при } t \in [0, 3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \left(\frac{t(V_1(6) + V_1(3))}{3} - (2V_1(3) + V_1(6)) \right) \cos \frac{\pi}{3} t + \\ &\quad + \left(\frac{3\dot{V}_1(0)}{\pi} - \frac{V_1(3) + V_1(6)}{\pi} + \frac{t(\dot{V}_1(6) - \dot{V}_1(0))}{2\pi} \right) \sin \frac{\pi}{3} t \quad \text{при } t \in (3, 6]. \end{aligned}$$

Из формул (2.1), (2.3) и (3.1) имеем

$$Q_1(x, t) = V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_1(t).$$

Здесь через $Q_1(x, t)$ обозначена функция, которая получается из формулы (2.1) при подстановке первого слагаемого ряда (3.1).

Пусть при $t = 0$

$$\varphi_0(x) = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 - \frac{4x}{3}, \quad \psi_0(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3},$$

промежуточное состояние при $t = t_1 = 3$

$$\varphi_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

конечное состояние при $t = T = 6$

$$\varphi_T(x) = 0, \quad \psi_T(x) = 0.$$

Коэффициенты рядов Фурье функций $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \varphi_T, \psi_T$ соответственно равны:

$$\varphi_1^{(0)} = -\frac{8}{\pi^3}, \quad \psi_1^{(0)} = \frac{8}{3\pi^3}, \quad \varphi_1^{(1)} = \frac{12}{\pi^3}, \quad \varphi_1^{(T)} = 0, \quad \psi_1^{(T)} = 0.$$

Значения этих функций на краях струны следующие:

$$\varphi_0(0) = \varphi_T(0) = \varphi_1(0) = \psi_T(0) = \psi_0(0) = \varphi_0(1) = \varphi_T(1) = \varphi_1(1) = \psi_T(1) = \psi_0(1) = 0.$$

Из (3.3)–(3.5) получаем

$$V_1(0) = -\frac{8}{\pi^3}, \quad \dot{V}_1(0) = \frac{8}{3\pi^3}, \quad V_1(3) = \frac{12}{\pi^3}, \quad V_1(6) = \dot{V}_1(6) = 0.$$

Следовательно, для функций $u_1(t)$ и $V_1(t)$ при $t \in [0, 3]$ имеем:

$$u_1(t) = -\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t + \frac{4}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t, \quad V_1(t) = \left(-\frac{8}{\pi^3} - \frac{4t}{3\pi^3}\right) \cos \frac{\pi}{3}t + \left(\frac{12}{\pi^4} - \frac{4t}{3\pi^4}\right) \sin \frac{\pi}{3}t,$$

а при $t \in (3, 6]$ имеем:

$$u_1(t) = -\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t - \frac{12}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t, \quad V_1(t) = \left(-\frac{24}{\pi^3} + \frac{4t}{\pi^3}\right) \cos \frac{\pi}{3}t - \left(\frac{4}{\pi^4} + \frac{4t}{3\pi^4}\right) \sin \frac{\pi}{3}t.$$

Значение функции $u_1(t)$ в конечный момент первого промежутка совпадает со значением в начале второго промежутка и $u_1(3) = 4/\pi^4$. Отметим, что для функции $u_1(t)$ получается следующая оценка:

$$\max_{t \in [0, 6]} |u_1(t)| = \frac{4}{\pi^4} \sqrt{1 + 9\pi^2} \approx 0,3892.$$

График поведения функции $u_1(t)$ приведен на рис. 1.

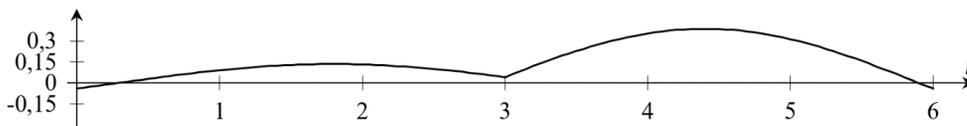


Рис. 1. График функции $u_1(t)$

Для функции прогиба $Q_1(x, t)$ имеем следующие явные выражения:

$$Q_1(x, t) = \left[\left(-\frac{8}{\pi^3} - \frac{4t}{3\pi^3} \right) \cos \frac{\pi}{3}t + \left(\frac{12}{\pi^4} - \frac{4t}{3\pi^4} \right) \sin \frac{\pi}{3}t \right] \sin \pi x +$$

$$+ \left(-\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t + \frac{4}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t \right) (1-x) \quad \text{при } t \in [0, 3],$$

$$Q_1(x, t) = \left[\left(-\frac{24}{\pi^3} + \frac{4t}{\pi^3} \right) \cos \frac{\pi}{3}t - \left(\frac{4}{\pi^4} + \frac{4t}{3\pi^4} \right) \sin \frac{\pi}{3}t \right] \sin \pi x +$$

$$+ \left(-\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t - \frac{12}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t \right) (1-x) \quad \text{при } t \in (3, 6].$$

Можно проверить, что выражение функции прогиба $Q_1(x, 3)$ в конечный момент первого промежутка совпадает с выражением в начале второго промежутка и имеет следующий вид:

$$Q_1(x, 3) = \frac{12}{\pi^3} \sin \pi x + \frac{4}{\pi^4} (1-x).$$

Функция прогиба струны в момент времени $t = 0$ имеет вид:

$$Q_1(x, 0) = -\frac{8}{\pi^3} \sin \pi x + \frac{4}{\pi^4} (x-1).$$

Сравнивая построенную функцию $Q_1(x, 0)$ с заданной функцией $\varphi_0(x)$, получим, что

$$\max_{x \in [0,1]} |Q_1(x, 0) - \varphi_0(x)| \approx 0,0411.$$

Небольшое расхождение в поведении этих функций иллюстрируется на графике (рис. 2).

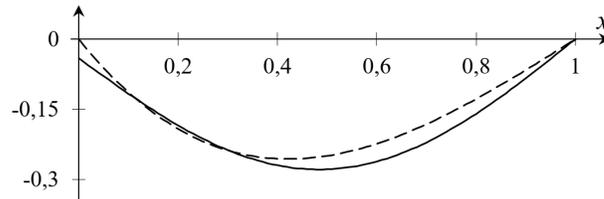


Рис. 2. Графики функций $Q_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия)

Вычислим

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{Q}_1(x, 0) = \frac{8}{3\pi^3} \sin \pi x + \frac{4}{3\pi^2} (1-x)$$

и сравним $\dot{Q}_1(x, 0)$ с заданной функцией $\psi_0(x)$. Получим, что

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \dot{Q}_1(x, 0) - \psi_0(x) \right| \approx 0,1351.$$

Графики этих функций приведены на рис. 3.

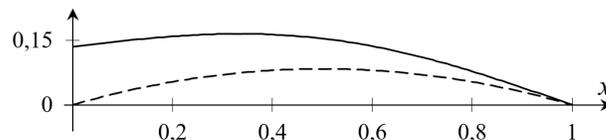


Рис. 3. Графики функций $\dot{Q}_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x)$ (пунктирная линия)

Сравнивая построенную функцию $Q_1(x, 3)$ с заданной функцией $\varphi_1(x)$, получим, что

$$\max_{x \in [0,1]} |Q_1(x, 3) - \varphi_1(x)| \approx 0,0527.$$

Небольшое расхождение между этими функциями иллюстрирует рис. 4, на котором представлены их графики.

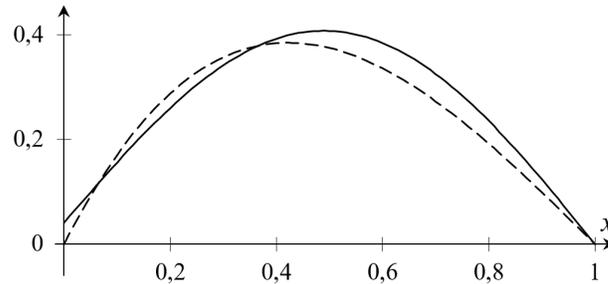


Рис. 4. Графики функций $Q_1(x, 3)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия)

Функция прогиба и ее производная в момент времени $t = 6$ определяются формулами:

$$Q_1(x, 6) = \frac{4}{\pi^4}(x - 1), \quad \left. \frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \right|_{t=6} = \dot{Q}_1(x, 6) = \frac{4}{\pi^2}(x - 1).$$

Оценивая отклонение этих функций соответственно от заданных функций $\varphi_T(x)$ и $\psi_T(x)$, получим

$$\max_{x \in [0,1]} |Q_1(x, 6) - \varphi_T(x)| = \frac{4}{\pi^4} \approx 0,0411, \quad \max_{x \in [0,1]} |\dot{Q}_1(x, 6) - \psi_T(x)| = \frac{4}{\pi^2} \approx 0,4053.$$

Графики функций $Q_1(x, 6)$ и $\dot{Q}_1(x, 6)$ приведены на рис. 5 и 6 соответственно.

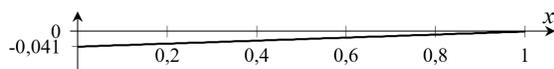


Рис. 5. График функции $Q_1(x, 6)$

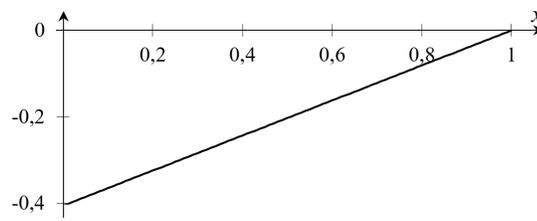


Рис. 6. График функции $\dot{Q}_1(x, 6)$

На рис. 7 приводится графическая иллюстрация динамики поведения состояния колебательной системы — функции $Q_1(x, t)$ при $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

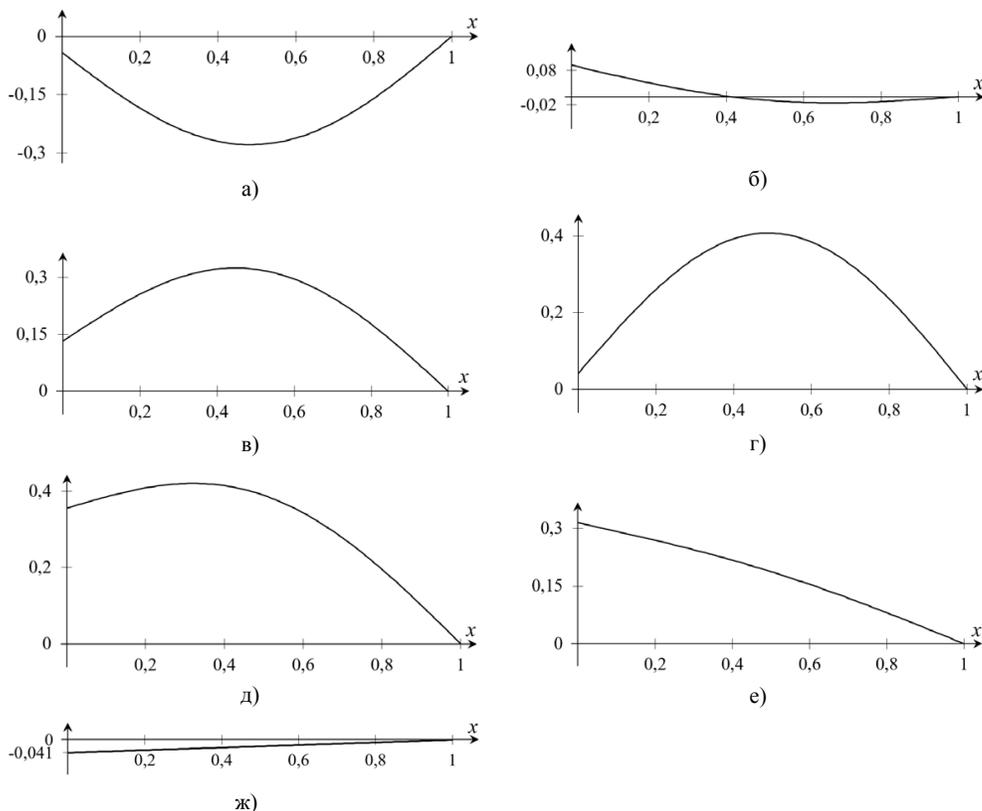


Рис. 7. График функции $Q_1(x, t)$ в фиксированные моменты времени t :
 а) $Q_1(x, 0)$, б) $Q_1(x, 1)$, в) $Q_1(x, 2)$, г) $Q_1(x, 3)$, д) $Q_1(x, 4)$, е) $Q_1(x, 5)$, ж) $Q_1(x, 6)$

Таким образом, полученные результаты (даже при $n = 1$) показывают, что под воздействием построенного граничного управления $u_1(t)$ поведение функции $Q_1(x, t)$ достаточно близко к заданным исходным функциям.

Заключение

Предложен конструктивный метод построения граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Предложенный для волнового уравнения подход допускает распространение на другие неоднородные системы. Вычислительный эксперимент показал, что под воздействием построенного граничного управления поведение функции прогиба струны достаточно близко к заданным исходным функциям. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления процессами колебаний в физических и технологических системах.

References

- [1] А. Г. Бутковский, *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965. [A. G. Butkovskii, *The Theory of Optimal Control of Systems with Distributed Parameters*, Nauka, Moscow, 1965 (In Russian)].
- [2] А. Г. Бутковский, *Методы управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1975. [A. G. Butkovskii, *Control Methods for Systems with Distributed Parameters*, Nauka, Moscow, 1975 (In Russian)].

- [3] Л. Н. Знаменская, *Управление упругими колебаниями*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004. [L. N. Znamenskaya, *Control of Elastic Vibrations*, Fizmatlit, Moscow, 2004 (In Russian)].
- [4] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, “Оптимизация граничных управлений колебаниями струны”, *Успехи математических наук*, **60**:6(366) (2005), 89–114; англ. пер.: V. A. Il'in, E. I. Moiseev, “Optimization of boundary controls of string vibrations”, *Russian Mathematical Surveys*, **60**:6 (2005), 1093–1120.
- [5] Е. И. Моисеев, А. А. Холومهова, А. А. Фролов, “Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического”, *Материалы международной конференции «International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17»*, Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **160**, ВИНТИ РАН, М., 2019, 74–84. [E. I. Moiseev, A. A. Holomeeva, A. A. Frolov, “Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical”, *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS-17, St. Petersburg Polytechnic University, July 24-28, 2017*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **160**, VINITI, Moscow, 2019, 74–84 (In Russian)].
- [6] В. Р. Барсегян, М. А. Саакян, “Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени”, *Известия НАН РА. Механика*, **61**:2 (2008), 52–60. [V. R. Barseghyan, M. A. Saakyan, “The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time”, *Proc. of NAS RA. Mechanics*, **61**:2 (2008), 52–60 (In Russian)].
- [7] V. R. Barseghyan, L. A. Movsisyan, “Optimal Control of the Vibration of Elastic Systems Described by the Wave Equation”, *Int. Appl. Mech.*, **48**:2 (2012), 234–239.
- [8] В. Р. Барсегян, “О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени”, *Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики*, XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015), Сборник трудов, 2015, 354–356. [V. R. Barseghyan, “O zadache granichnogo upravleniya kolebaniyami struny s zadannymi sostoyaniyami v promezhotochnye momenty vremeni”, *Fundamental'nyye problemy teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki*, XI Vserossiyskiy s'yezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki (Kazan', 2015), Sbornik trudov, 2015, 354–356 (In Russian)].
- [9] В. Р. Барсегян, “Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени”, *Аналитическая механика, устойчивость и управление движением*, XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Иркутск, 2017), **3**, Сборник трудов конференции, 2017, 119–125. [V. R. Barseghyan, “On one problem of optimal boundary control of string vibrations with restrictions in the intermediate moment of time”, *Analytical Mechanics, Stability and Motion Control*, XI International Chetaev Conference “Analytical Mechanics, Stability and Motion Control” (Irkutsk, 2017), **3**, Conference proceedings, 2017, 119–125 (In Russian)].
- [10] А. А. Андреев, С. В. Лексина, “Задача граничного управления для системы волновых уравнений”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*, 2008, №1(16), 5–10. [A. A. Andreev, S. V. Leksina, “The boundary control problem for the system of wave equations”, *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta, Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2008, №1(16), 5–10 (In Russian)].
- [11] М. Ф. Абдукаримов, “Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны”, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **56**:8 (2013), 612–618. [M. F. Abdugarimov, “On optimal boundary control of forced oscillations of the displacements at the two ends strings”, *Dokl. AN Respubliki Tadzhikistan*, **56**:8 (2013), 612–618 (In Russian)].
- [12] Н. В. Гибкина, М. В. Сидоров, А. В. Стадникова, “Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны”, *Радиоэлектроника и информатика*, 2016, №2, 3–11. [N. V. Gibkina, M. V. Sidorov, A. V. Stadnikova, “Optimal'noe granichnoe upravlenie kolebaniyami odnorodnoy struny”, *Radioelektronika i Informatika*, 2016, №2, 3–11 (In Russian)].

- [13] В. И. Корзюк, И. С. Козловская, “Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I”, *Тр. Ин-та матем.*, **18**:2 (2010), 22–35. [V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya, “Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. I”, *Tr. Inst. Mat.*, **18**:2 (2010), 22–35 (In Russian)].
- [14] В. И. Корзюк, И. С. Козловская, “Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II”, *Тр. Ин-та матем.*, **19**:1 (2011), 62–70. [V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya, “Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. II”, *Tr. Inst. Mat.*, **19**:1 (2011), 62–70 (In Russian)].
- [15] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнение математической физики*, Наука, М., 1977. [A. N. Tihonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1977 (In Russian)].
- [16] В. Р. Барсегян, *Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями*, Наука, М., 2016. [V. R. Barseghyan, *Control of Composite Dynamic Systems and Systems with Multipoint Intermediate Conditions*, Nauka, Moscow, 2016 (In Russian)].
- [17] В. Р. Барсегян, Т. В. Барсегян, “Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями”, *Автоматика и телемеханика*, 2015, № 4, 3–15; англ. пер.: V. R. Barseghyan, T. V. Barseghyan, “On an approach to the problems of control of dynamic systems with nonseparated multipoint intermediate conditions”, *Automation and Remote Control*, 2015, № 4, 549–559.
- [18] В. И. Зубов, *Лекции по теории управления*, Наука, М., 1975. [V. I. Zubov, *Lekcii po Teorii Upravleniya*, Nauka, Moscow, 1975 (In Russian)].

Информация об авторах

Барсегян Ваня Рафаелович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении; профессор факультета математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: barseghyan@sci.am
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Солодуша Светлана Витальевна, доктор технических наук, заведующий лабораторией. Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: solodusha@isem.irk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6162-7542>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Барсегян Ваня Рафаелович
E-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 7 апреля 2020 г.
Поступила после рецензирования 28 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Vanya R. Barseghyan, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Scientific Researcher, Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA; Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Armenia. E-mail: barseghyan@sci.am
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Svetlana V. Solodusha, Doctor of Engineering, Head of Laboratory. Melentiev Energy Systems Institute, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: solodusha@isem.irk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6162-7542>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Vanya R. Barseghyan
E-mail: barseghyan@sci.am

Received 7 April 2020
Reviewed 28 May 2020
Accepted for press 8 June 2020