Том 25, № 129 2020

© Бурлаков Е.О., Мальков И.Н., 2020
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-6-17
УДК 51-76, 517.988

О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)

Евгений Олегович БУРЛАКОВ[1], **Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D ("bumps")

Evgenii O. BURLAKOV[1], **Ivan N. MALKOV**[2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] University of Tyumen
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation

Аннотация. Предложен метод, позволяющий исследовать существование и близость между стационарными решениями непрерывных и разрывных уравнений нейронных полей с микроструктурой. Данная часть содержит результаты о близости стационарных решений конкретных усредненных уравнений нейронных полей с непрерывной и разрывной функциями активации. Проведено численное исследование стационарных радиально симметричных решений (бампов) уравнения нейронного поля с разрывной функцией активации нейронов и заданной микроструктурой.

Ключевые слова: математическая нейробиология; уравнения нейронных полей с микроструктурой; разрешимость; непрерывная зависимость решений от параметров

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-511-23001 РЯИК_а).

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы») // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 6–17. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-6-17.

Abstract. We suggest a method allowing to investigate existence and the measure of proximity between the stationary solutions to continuous and discontinuous neural fields with microstructure. The present part involves results on proximity of the stationary solutions to specific homogenized neural field equations with continuous and discontinuous activation functions. The results of numerical investigation of radially symmetric stationary solutions (bumps) to the neural field with a discontinuous activation function and a given microstructure are presented.

Keywords: mathematical neuroscience; neural field models with microstructure; solvability; continuous dependence on parameters

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project no. 20-511-23001 РЯИК_а).

For citation: Burlakov E.O., Malkov I.N. O svyazi nepreryvnykh i razryvnykh modeley neyronnykh poley s mikrostrukturoy: II. Radial'no simmetrichnyye statsionarnyye resheniya v 2D («bampy») [On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D ("bumps")]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 6–17. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-6-17. (In Russian, Abstr. in Engl.)

3. Стационарные радиально симметричные решения двумерных усредненных уравнений нейронных полей («бампы»)

В первой части данной работы (см. [1]) были сформулированы и доказаны теоремы о разрешимости непрерывных и разрывных уравнений нейронных полей с микроструктурой и о непрерывной зависимости решений при переходе от непрерывной функции активации к разрывной. Здесь мы применим результаты [1] к исследованию стационарных радиально симметричных локализованных решений усредненной модели двумерного нейронного поля (так назваемых «бампов»). Рассмотрим следующее уравнение (всюду ниже используются обозначениями статьи [1]):

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x,x_{\mathrm{f}}) = -u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\Xi}\int\limits_{\mathcal{Y}} \omega(x-y, x_{\mathrm{f}}-y_{\mathrm{f}}) f_\lambda(u(t,y,y_{\mathrm{f}}))dy_{\mathrm{f}}dy, \\ t>0,\ x\in\Xi\subseteq R^2,\ x_{\mathrm{f}}\in\mathcal{Y},\ \lambda\geq 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathcal{Y}$ — двумерный тор, семейство функций $f_\lambda : R\to[0,1]$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{A3})$, $(\mathbf{A4})$ работы [1], функция связи $\omega : R^2\times\mathcal{Y}\to R$ может быть представлена в виде следующей композиции

$$\omega(x,x_{\mathrm{f}}) = \frac{1}{\sigma(x_{\mathrm{f}})}\chi\Big(\frac{|x|}{\sigma(x_{\mathrm{f}})}\Big), \tag{3.2}$$

где $\sigma\in C(\mathcal{Y},(0,\infty))$ $\mathcal{Y}$-периодична, $\chi\in C^2([0,\infty),R)\bigcap L([0,\infty),\mu,R)$. Таким образом, условия $(\mathbf{A1})$ и $(\mathbf{A2})$ работы [1] также выполнены.

О п р е д е л е н и е 3.1. Зафиксируем $\theta>0$, $a>0$. *Решением типа «бамп»* (далее, «бампом») радиуса $a>0$ уравнения (3.1) назовем стационарное решение $U\in C^1(\Xi\times\mathcal{Y},R)$ уравнения (3.1), обладающее следующими свойствами:

- $U(x,x_{\mathrm{f}})\equiv U(|x|)$, где $x\in\Xi$, $x_{\mathrm{f}}\in\mathcal{Y}$, $x=|x|\exp(i\alpha)$, $\alpha\in[0,2\pi)$;
- $U(x)=\theta$ при $x\in\{x\in\Xi,\ |x|=a\}$;
- $U(x)>\theta$ для всех $x\in B_\Xi(0,a)$ и $U(x)<\theta$ при всех $x\in\Xi\setminus\overline{B_\Xi(0,a)}$.

Далее рассмотрим случай, когда функция активации представлена функцией Хевисайда с выбранным пороговым значением θ, то есть $f_0(u) = H(u-\theta)$, $u \in R$.

В полярных координатах бамп радиуса a будет удовлетворять следующему уравнению:

$$U(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \langle\omega\rangle(|x-y|)r dr d\alpha, \qquad y = (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha)), \tag{3.3}$$

где $\langle\omega\rangle$ — среднее значение функции связи на периоде переменного x_{f}, то есть

$$\langle\omega\rangle(x) = \int_{\mathcal{Y}} \omega(x, x_{\mathrm{f}}) dx_{\mathrm{f}}.$$

Вычислим двойной интеграл в (3.3) при помощи двумерного преобразования Фурье радиально симметричной функции $\langle\omega\rangle(|x|)$, имеющего следующее выражение в полярных координатах:

$$\langle\omega\rangle(|x|) = \int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)\rho J_0(|x|\rho)d\rho,$$

где $\widehat{\langle\omega\rangle}$ — преобразование Ханкеля функции $\langle\omega\rangle$, J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν ($\nu = 0, 1, \dots$). Подставляя последнее выражение в (3.3), получаем

$$U(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \Big(\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)\rho J_0(|x-y|\rho)d\rho\Big) r dr d\alpha.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$U(x) = \int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)\rho\Big(\int_0^{2\pi}\int_0^a J_0(|x-y|\rho) r dr d\alpha\Big)d\rho.$$

В полярных координатах $|x-y| = \sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\beta-\alpha)}$, $x = (\varrho\cos(\beta), \varrho\sin(\beta))$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^a J_0(|xy|\rho) r dr d\alpha &= \int_0^{2\pi}\int_0^a J_0\Big(\rho\sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\beta-\alpha)}\Big) r dr d\alpha \\ &= \frac{1}{\rho^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a\rho} J_0(\rho\sqrt{\tilde\varrho^2 + \tilde r^2 - 2\tilde\varrho\tilde r\cos(\alpha)})\tilde r d\tilde r d\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом, бамп радиуса a уравнения (3.1) в случае $\lambda = 0$ задается следующим выражением:

$$U(x) = 2\pi a\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho) J_0(|x|\rho) J_1(a\rho)d\rho. \tag{3.4}$$

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\int\limits_{0}^{\infty} |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)| r^2 dr < \infty. \tag{3.5}$$

Для любого $\gamma > 0$, используя свойства J_ν (см., например, [2]), получаем

$$|U(x)| \leq 2\pi a \int\limits_{0}^{\gamma} |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)| dr + 2\pi a \Big| \int\limits_{\gamma}^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|x|r) J_1(ar) dr \Big|.$$

В силу сделанных предположений на функции $\chi \in C^2([0,\infty), R) \bigcap L([0,\infty), \mu, R)$ и $\sigma \in C(\mathcal{Y}, (0,\infty))$ и соответствующих свойств функции связи ω, определенной (3.2), для любого $\epsilon > 0$ имеем

$$2\pi a \int\limits_{0}^{\gamma(\epsilon)} |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)| dr < \epsilon/2$$

при некотором $\gamma(\epsilon) > 0$. Учитывая свойства функции Бесселя J_0, при любом $\gamma > 0$ имеем $J_0(sr) \to 0$ равномерно по $r \in [\gamma, \infty)$ при $s \to \infty$. Используя данные свойства и оценку (3.5), получаем

$$|U(x)| \leq 2\pi a \int\limits_{0}^{\gamma(\epsilon)} |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)| dr + 2\pi a \Big| \int\limits_{\gamma(\epsilon)}^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_1(ar) dr \Big| \Big| J_0(|x|r) \Big| < \epsilon$$

при некоторых $\gamma(\epsilon) > 0$ и достаточно большом $|x| \in R$. Таким образом, соотношение

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0 \tag{3.6}$$

гарантирует, что радиально симметричный бамп U удовлетворяет θ-условию (см. [1]).

З а м е ч а н и е 3.1. Для справедливости (3.6) вместо выполнения неравенства (3.5) достаточно сделать следующее, более мягкое, предположение:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_1(ar) dr < \infty.$$

Однако, условие (3.5) нам потребуется в дальнейших доказательствах. Заметим также, что условие (3.5) выполнено для всех типичных функций межнейронной связи, используемых в нейромоделировании (см, например, [3]).

Определим следующее пространство

$$C^1_{rs}(\Xi, R) = \{u \in C^1(\Xi, R),\ u(x) = u(|x|) \text{ для всех } x \in \Xi\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)\Big(J_0(ar)J_1(ar)+\frac{ar}{2}\big(J_0^2(ar)-2J_1^2(ar)-J_0(ar)J_2(ar)\big)\Big)dr\neq 0. \qquad (3.7)$$

Тогда для некоторого достаточно большого $r>0$ *и соответствующего ему множества* $\Omega_r=\Omega\cap B_{R^2}(0,r)\subset R^2$ *найдется такое* $\varepsilon>0$, *что симметричный бамп* U, *заданный* (3.4), *будет единственным решением* (3.1) *в* $B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ *при* $\lambda=0$.

Доказательство. Из определения 3.1 следует, что

$$2\pi a\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(ar)J_1(ar)dr=\theta.$$

Таким образом, выполнение соотношения (3.7) гарантирует единственность решения U в шаре $B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ для некоторых $\varepsilon>0$ и $r>0$. □

Выразим (3.4) в терминах операторного уравнения (как это было сделано в параграфе 2 работы [1])

$$U=F_0U.$$

Для того, чтобы применить теорему 2.2 статьи [1] вычислим топологическую степень $\deg(I-F_0,B_{C^1_{rs}(\Omega,R)}(U,\varepsilon),0)$. По определению вращения векторного поля (см., например, [4]), получаем

$$\deg(I-F_0,B_{C^1_{rs}(\Omega,R)}(U,\varepsilon),0)=\operatorname{ind}(F_0,B_{C^1_{rs}(\Omega,R)}(U,\varepsilon)).$$

Без ограничения общности рассуждений предполагаем, что неподвижная точка U оператора F_0 единственна в замкнутом шаре $\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$. Таким образом, F_0 отображает $\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$ в некоторое многообразие $\mathcal{M}\subset C^1(\Omega_r,R)$,

$$\mathcal{M}=\{v=2\pi c\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(\cdot\, r)J_1(cr)dr,\ c\in \mathrm{M}\subset R\},$$

где множество M выбрано так, что оно содержит c_u для всех $u\in\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$ (в качестве такого множества M можно выбрать, например, отрезок). Определим отображение $\phi:\mathrm{M}\to\mathcal{M}$:

$$\phi(c)=v(x),\ v(x)=2\pi c\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|x|r)J_1(cr)dr,\ x\in\Omega. \qquad (3.8)$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(\cdot\, r)\Big(J_1(ar)+\frac{ar}{2}\big(J_0(ar)-J_2(ar)\big)\Big)dr\not\equiv 0. \qquad (3.9)$$

Тогда отображение $\phi:\mathrm{M}\to\mathcal{M}$, *заданное* (3.8), *является гомеоморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале отметим, что $\phi : \mathrm{M} \to \mathcal{M}$ является сюръекцией по определению. Инъективность отображения $\phi : \mathrm{M} \to \mathcal{M}$ следует из выражения для его производной Фреше, вычисленной в точке $c \in \mathrm{M}$:

$$\phi'(c) = 2\pi \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(\cdot\, r)\Big(J_1(cr) + \frac{cr}{2}\big(J_0(cr) - J_2(cr)\big)\Big)dr$$

и условия (3.9). □

Для произвольного оператора $\Phi : \overline{D} \to \mathfrak{B}$ обозначим через $\mathrm{ind}(\Phi, D)$ вращение его векторного поля. Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3. *(см. [4]) Пусть D — открытое подмножество компактного выпуклого множества $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}'$ — выпуклое подмножество некоторого банахова пространства $\mathfrak{B}'$. Пусть также отображение $\psi : D \to \mathfrak{D}$ вполне непрерывно, и множество его неподвижных точек компактно в $\mathfrak{B}$. Если отображение $\phi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ является гомеоморфизмом, то композиция $\phi\circ\psi\circ\phi^{-1} : \phi(D) \to \mathfrak{D}'$ вполне непрерывна, множество ее неподвижных точек компактно, и справедливо равенство*

$$\mathrm{ind}(\psi, D) = \mathrm{ind}(\phi\circ\psi\circ\phi^{-1}, \phi(D)).$$

Определим теперь сужение $\mathcal{F}$ отображения F_0 на множество $\mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$, то есть

$$\mathcal{F} = F_0|_{\mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}},$$
$$\mathcal{F} : \mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)} \to \mathcal{M}.$$

Ввиду данного определения, отображение $\psi = \mathcal{F} : \mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)} \to \mathcal{M}$ удовлетворяет условиям леммы 3.3. Используя свойства вращения векторного поля, получаем

$$\mathrm{ind}(F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)) = \mathrm{ind}(\mathcal{F}, \mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)).$$

По лемме 3.3 имеем

$$\mathrm{ind}(\mathcal{F}, \mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)) = \mathrm{ind}(\phi^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\phi, \phi^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))).$$

Лемма 3.4. *Пусть выполнено условие (3.5). Тогда существует такое $\delta > 0$, что оператор $\Psi = \phi^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\phi$ отображает $\overline{B_R(a,\delta)}$ в M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u(x) = 2\pi c \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|x|r) J_1(cr)dr, \ c \in \mathrm{M}.$$

Используя теорему о среднем и свойства функции Бесселя J_1, оценим

$$\|u - U\|_{C^1(\Omega_r,R)} \le$$
$$2\pi\Big\| c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|\cdot|r) J_1(cr)dr - a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|\cdot|r) J_1(ar)dr\Big\|_{C(\Omega_r,R)} +$$
$$2\pi\Big\| -c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) r J_1(|\cdot|r) J_1(cr)dr + a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) r J_1(|\cdot|r) J_1(ar)dr\Big\|_{C(\Omega_r,R)} \le$$

$$2\pi\Big\|\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|\cdot|r)\big(c\frac{r}{2}(J_0(\xi r)-J_2(\xi r))+aJ_1(ar)\big)dr(a-c)\Big\|_{C(\Omega_r,R)}+$$
$$2\pi\Big\|\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)rJ_1(|\cdot|r)\big(c\frac{r}{2}(J_0(\xi r)-J_2(\xi r))+aJ_1(ar)\big)dr(a-c)\Big\|_{C(\Omega_r,R)},$$

где $\xi\in B_R(a,|a-c|)$. Из выполнения условия (3.5) следует, что

$$\|u-U\|_{C^1(\Omega_r,R)}\le\mathfrak{N}|c-a|<\varepsilon$$

для некоторого $\mathfrak{N}\in R$ и всех $c\in\overline{B_R(a,\delta)}$, где $\delta<\varepsilon/\mathfrak{N}$. Из последней оценки получаем

$$\overline{B_R(a,\delta)}\subset\phi^{-1}(\mathcal{M}\bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)),$$

что, в свою очередь, влечет

$$\mathcal{M}_\delta\subset\mathcal{F}(\mathcal{M}\bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))$$
$$\mathcal{M}_\delta=\Big\{v=2\pi c\int\limits_0^\infty\widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|\cdot|r)J_1(cr)dr,\ c\in\overline{B_R(a,\delta)}\Big\}.$$

Итак,

$$\phi^{-1}(\mathcal{M}_\delta)=\overline{B_R(a,\delta)}\subset\phi^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{M}\bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))).$$

□

З а м е ч а н и е 3.2. Условие (3.5) избыточно для доказательства леммы 3.4. Однако то условие, до которого оно может быть ослаблено, является более громоздким и сложным для проверки.

Легко видеть, что a является неподвижной точкой оператора $\Psi:\overline{B_R(a,\delta)}\to$ M. Более того, a — изолированная неподвижная точка Ψ ввиду того, что U — изолированная неподвижная точка отображения $\mathcal{F}$ и ввиду топологической инвариантности вращения векторного поля. Вращение векторного поля отображения в конечномерном пространстве может быть вычислено по формуле

$$\mathrm{ind}(\Psi,\phi^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{M}\bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)))=\mathrm{sgn}(1-\Psi'(a)).$$

Из задания оператора $\Psi=\phi^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\phi$ следует, что

$$2\pi c\int\limits_0^\infty\widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(\Psi(c)r)J_1(cr)dr=\theta\ \text{ для всех }\ c\in\overline{B_R(a,\delta)}.$$

Используя теорему о неявной функции и цепное правило дифференцирования, получаем

$$\int\limits_0^\infty\widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(ar)J_1(ar)+ar\Big(J'_{0a}(ar)J_1(ar)\Psi'(a)+J_0(ar)J'_{1a}(ar)\Big)dr=0.$$

Последнее выражение дает следующее достаточное условие для выполнения неравенства $\Psi'(a) \neq 1$:

$$\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(ar)J_1(ar) + a\Big(J_0(ar)J_1(ar)\Big)'_a dr \neq 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, $\deg(I - F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon), 0) \neq 0$ в случае, если выполнено неравенство (3.10).

Учитывая теоремы 2.1 и 2.2 работы [1], мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть функции семейства* $f_\lambda : R \to [0,1]$, $\lambda \in [0,\infty)$, *являются непрерывными, неубывающими и удовлетворяют следующим условияи по параметру* λ:

(i) $f_0(u) = \begin{cases} 0, & u \leq \theta, \\ 1, & u > \theta \end{cases}$

(ii) $f_\lambda \to f_{\widehat{\lambda}}$ *равномерно на* R *при* $\lambda \to \widehat{\lambda}$, $\widehat{\lambda} \in (0,\infty)$;

(iii) для любого $\varepsilon > 0$, $f_\lambda \to f_0$ *равномерно на* $R \setminus B_R(\theta,\varepsilon)$ *при* $\lambda \to 0$.

Пусть также функция связи ω *задана равенством (3.2), где функция* $\sigma \in C(\mathcal{Y},(0,\infty))$ $\mathcal{Y}$*-периодична, а функция* $\chi \in C^2([0,\infty),R)\bigcap L([0,\infty),\mu,R)$ *радиально симметрична. Наконец, пусть выполнены условия (3.5), (3.7), (3.9) и (3.10).*

Тогда найдется такое $r > 0$, *что при каждом* $\lambda \in (0,\infty)$ *существует решение* $u_\lambda \in C^1_{rs}(\Omega_r,R))$ *уравнения (3.1), где* $\Xi = \Omega_r$. *Более того,* $\|u_\lambda - U\|_{C^1(\Omega_r,R))} \to 0$, *при* $\lambda \to 0$, *где бамп* $U \in C^1_{rs}(R^2,R))$ *— решение уравнения (3.1) при* $\Xi = R^2$, $\lambda = 0$, *заданное (3.4).*

4. Численное исследование бампов в двумерном уравнении нейронного поля с периодической микроструктурой

Уравнение Амари двумерного неоднородного нейронного поля имеет вид (см. [1], уравнение (0.5))

$$\begin{gathered}\partial_t u_\varepsilon(t,x) = -u_\varepsilon(t,x) + \int\limits_{R^2} \omega_\varepsilon(x-y) f(u_\varepsilon(t,y))dy, \\ t > 0,\ x \in R^2.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Как было показано в работе [5], в случае периодичности микроструктуры, при $\varepsilon \to 0$ решения (4.1) сходятся к решению следующего уравнения

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x,x_{\mathrm{f}},\gamma) = -u(t,x,x_{\mathrm{f}},\gamma) + \int\limits_{R^2}\int\limits_{[0,1)^2} \omega(x-y,x_{\mathrm{f}}-y_{\mathrm{f}},\gamma) f(u(t,y,y_{\mathrm{f}},\gamma))dy_{\mathrm{f}}dy, \\ t > 0,\ x \in R^2.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Неоднородность среды при этом параметризуется с помощью $\gamma \in \Gamma$, где Γ — некоторое допустимое множество значений параметра. Нас будут интересовать условия существования бампов U — решений уравнения (4.2). В случае, когда функция активации f представлена функцией Хевисайда с пороговым значением $\theta > 0$ (случай $\lambda = 0$), такие решения, как было показано в [1], удовлетворяют в полярных координатах уравнению (3.3) и имеют вид (3.4) (см. [1]). Учитывая параметр неоднородности, уравнение (3.4) работы [1] записывается следующим образом

$$U(x,\gamma) = 2\pi a \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho,\gamma) J_0(|x|\rho) J_1(a\rho) d\rho. \tag{4.3}$$

Таким образом, для заданного порогового значения $\theta > 0$, уравнение

$$U(a,\gamma) = \theta \tag{4.4}$$

задает линию уровня на плоскости параметров a, γ, показывая изменение радиуса a бампа от неоднородности нейронного поля γ.

Зададим функцию связи нейронного поля следующим образом

$$\omega(x, x_{\mathrm{f}}, \gamma) = \frac{1}{\sigma(x_{\mathrm{f}},\gamma)} \chi\Big(\frac{x}{\sigma(x_{\mathrm{f}},\gamma)}\Big),$$

где

$$\sigma(x_{\mathrm{f}},\gamma) = 1 + \gamma \cos(2\pi x_{\mathrm{f}1}) \cos(2\pi x_{\mathrm{f}2}),\ x_{\mathrm{f}} = (x_{\mathrm{f}1}, x_{\mathrm{f}2}),\ \gamma \in \Gamma = [0,1)$$

и

$$\chi(x) = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\exp(-|x|)}{2} - \frac{\exp(-|x|/2)}{4}\Big). \tag{4.5}$$

Рисунок 1 представляет собой график функции (4.4) для значений параметра неоднородности $\gamma = 0,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.9.$ Абсцисса точки пересечение графика данной функции с прямой $\theta = const$ определяет радиус соответствующего бампа. На рис. 1 использовано значение $\theta = 0.1.$ В целом, картина сосуществования «широкого» и «узкого» бампов при допустимых значениях порога активации θ повторяет случай бампов в одномерной модели Амари (см. [6]). Кроме того, для фиксированного значения порога активации, радиусы, как «широкого», так и «узкого» бампов растут с увеличением неоднородности нейронного поля.

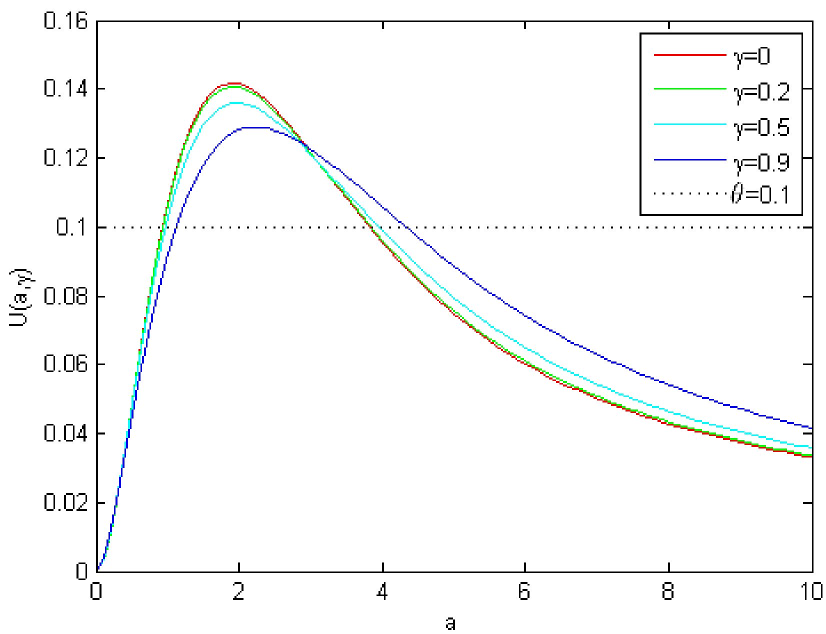

Рис. 1. График функции (4.4) при фиксированных значениях параметра неоднородности γ

Изменение радиусов бампов при вариации параметра неоднородности γ показано на рис. 2 и 3. Радиус a «узкого» бампа растет с увеличением γ. Радиус «широкого» бампа растет для малых и средних значений порога активации θ, убывая при росте γ для больших значений θ. Изменение форм бампов при вариации параметра неоднородности γ представлено на рис. 4.

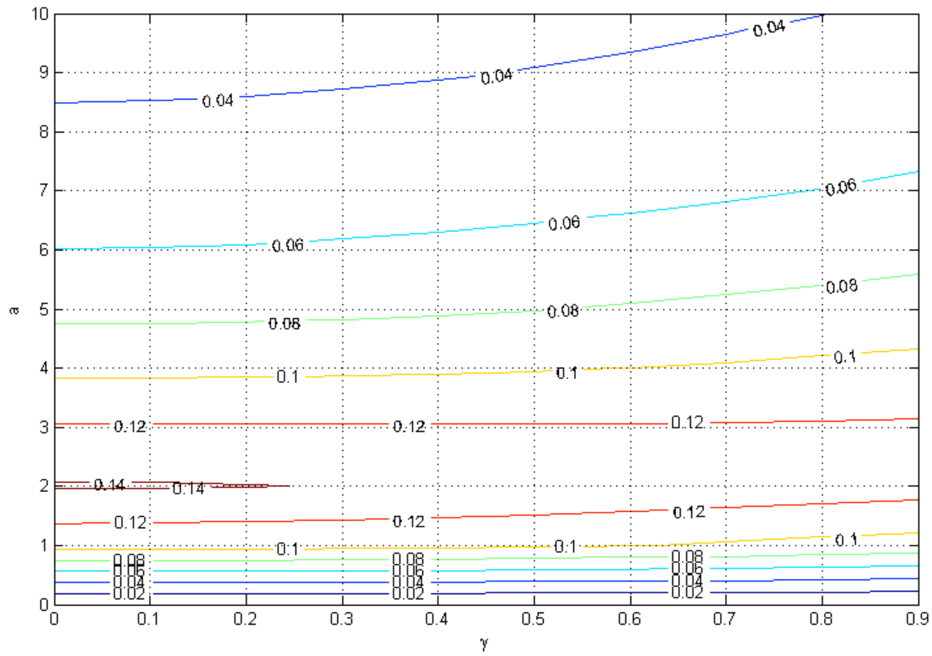

Рис. 2. Линии уровня, определяемые (4.4) для различных значений порога активации (линии отмечены данными значениями)

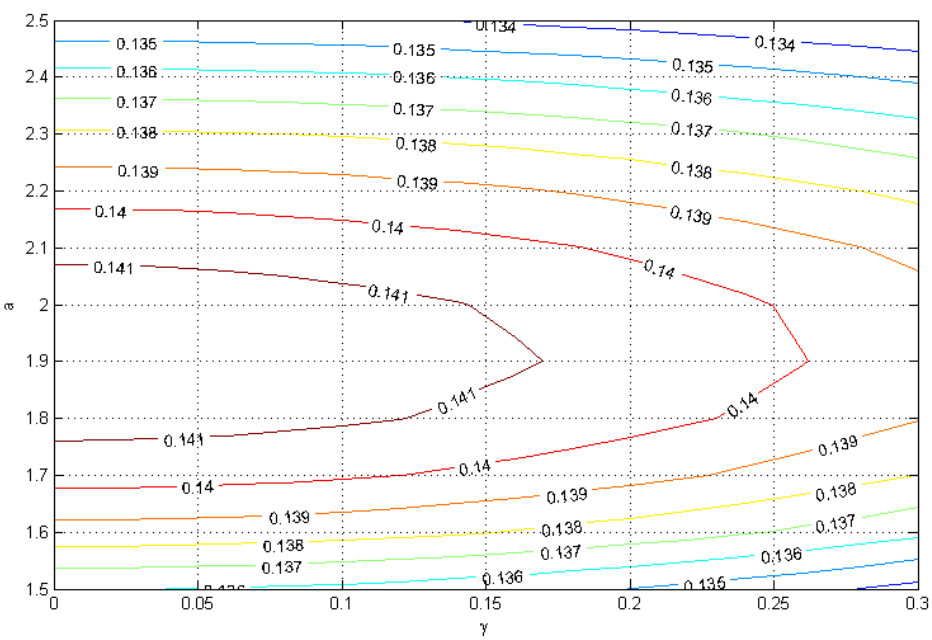

Рис. 3. Увеличение области рис. 2, где «широкий» и «узкий» бампы совпадают (линии уровня отмечены соответствующими значениями порогов активации)

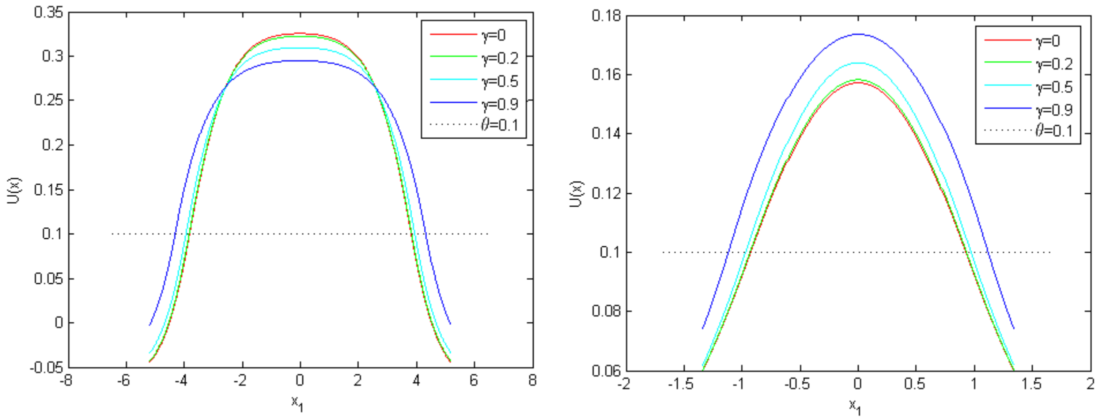

Рис. 4. Форма «широкого» (слева) и «узкого» (справа) бампов $U(x)$, $x = (x_1, x_2)$, при фиксированных значениях параметра неоднородности γ

References

[1] Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина, "О связи непрерывных и разрывных меделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 17–30. [E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina, "On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure I. General theory", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 17–30 (In Russian)].

[2] S. Bochner, K. Chandrasekharan, *Fourier Transforms*, Princeton University Press, New Jersey, 1949.

[3] E. Burlakov, E. Zhukovskiy, A. Ponosov, J. Wyller, "Ow well-posedness of generalized neural field equations with delay", *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, **6**:1 (2015), 51–80.

[4] A. Granas, "The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs", *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, **100** (1972), 209–228.

[5] N. Svanstedt, J. L. Woukeng, "Homogenization of a Wilson-Cowan model for neural fields", *Nonlinear Analysis. Real World Applications*, **14**:3 (2013), 1705–1715.

[6] N. Svanstedt, J. Wyller, E. Malyutina, "A one-population Amari model with periodic microstructure", *Nonlinearity*, **27** (2014), 1394–1417.

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, PhD, научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, студент института математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Research and Educational Center "Fundamental Mathematical Research". Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Ivan N. Malkov, Student of the Institute of Mathematics and Computer Science. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 14 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 26 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Received 14 January 2020
Reviewed 26 February 2020
Accepted for press 6 March 2020