ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 137 2022

© Афанасьев А.П., Дзюба С.М., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15

УДК 517.938

Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ[1,2], **Сергей Михайлович ДЗЮБА**[3]

[1] ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

[2] ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

[3] ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В более ранней статье авторов [А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба. "О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем", Вестник российских университетов. Математика, **26**:133 (2021), 5–14] установлена связь между движениями общего вида и рекуррентными движениями в компактном метрическом пространстве и доказан весьма простой характер поведения рекуррентных движений. В данной работе на основании этих результатов вводится новое определение рекуррентного движения, которое, в отличие от широко используемого в современной литературе, дает достаточно полную информацию относительно строения рекуррентного движения как функции времени и поэтому является более наглядным. При этом мы показываем, что в абстрактном метрическом пространстве предлагаемое определение эквивалентно определению Биркгофа, а в полном метрическом пространстве эквивалентно общепринятому современному определению.

Получены необходимые и достаточные условия рекуррентности (в смысле предложенного в статье определения) движения в компактном метрическом пространстве. Доказано, что в компактном метрическом пространстве α- и ω-предельные множества любого движения являются минимальными (это утверждение было анонсировано в более ранней статье авторов). Из минимальности α- и ω-предельных множеств выведено, что в компактном метрическом пространстве каждая положительно (отрицательно) устойчивая по Пуассону точка лежит на траектории рекуррентного движения, т. е. является точкой минимального множества, и таким образом, в компактном метрическом пространстве с конечной положительной инвариантной мерой почти все точки являются точками минимальных множеств.

Ключевые слова: динамические системы, минимальные множества, рекуррентные и устойчивые по Пуассону движения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00347_а).

Для цитирования: *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 5–15. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15.

© A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, 2022
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15

OPEN ACCESS
CC BY

New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems

Aleksandr P. AFANAS'EV[1,2], **Sergei M. DZYUBA**[3]

[1] Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

[2] Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

[3] Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. In the earlier article by the authors [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba "About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems", Russian Universities Reports. Mathematics, **26**:133 (2021), 5–14] a connection between general motions and recurrent motions in a compact metric space is established, and a very simple behavior of recurrent motions is proved. Based on these results, we introduce here a new definition of recurrent motion which, in contrast to the one widely used in modern literature, provides fairly complete information about the structure of a recurrent motion as a function of time and, therefore, is more illustrative. At the same time, we show that in an abstract metric space, the proposed definition is equivalent to Birkhoff's definition and is equivalent to the generally accepted modern definition in a complete metric space.

Necessary and sufficient conditions for recurrence (in the sense of the definition proposed in the article) of a motion in a compact metric space are obtained. It is proved that α- and ω-limit sets of any motion are minimal in a compact metric space (this assertion was announced in an earlier paper by the authors). From the minimality of α- and ω-limit sets, it is deduced that in a compact metric space, each positively (negatively) Poisson-stable point lies on the trajectory of a recurrent motion, i.e. is a point of a minimal set, and thus, in a compact metric space with a finite positive invariant measure almost all points are points of minimal sets.

Keywords: dynamical systems, minimal sets, recurrent and stable in the sense of Poisson motions

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00347_a).

Mathematics Subject Classification: 73B20.

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. Novyye svoystva rekurrentnykh dvizheniy i predel'nykh mnozhestv dinamicheskikh sistem [New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 5–15. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;

(b) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда, следуя работе [1], будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а функция $t \to f(t, p)$ — *движение*, если точка $p \in \Sigma$ фиксирована (см. также [2, с. 347]).

Основатель общей теории динамических систем Дж. Биркгоф изучал движения системы g^t, заданной на n-мерном замкнутом многообразии (см. [3, с. 194]). Он ввел определение минимального множества, а произвольное движение, расположенное в минимальном множестве, назвал рекуррентным. Исходя из этих определений, Дж. Биркгоф получил необходимое и достаточное условие рекуррентности. Во многих современных источниках это условие принято за определение рекуррентного движения системы g^t, заданной в абстрактном метрическом пространстве (см., например, [2, с. 402]).

Дж. Биркгоф показал, что каждое непустое замкнутое компактное инвариантное множество содержит компактное минимальное множество. Поэтому фундаментальное значение определения Биркгофа состоит в том, что из существования движения, расположенного в компактном множестве, следует существование рекуррентного движения. Однако, это определение мало наглядно, поскольку не содержит почти никакой информации относительно строения рекуррентного движения.

В настоящей работе будет введено новое более конструктивное определение рекуррентного движения. Основной целью работы является изучение новых свойств движений и их предельных множеств, которые связаны с данным определением.

1. Новое определение рекуррентного движения

Прежде всего, коротко изложим основные свойства рекуррентных движений и минимальных множеств.

Следуя монографии [2, с. 402], приведем определение рекуррентного движения, которое прочно устоялось в современных источниках.

О п р е д е л е н и е 1.1. Движение $f(t, p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau, T_\varepsilon} = \{f(t, p)\colon\ t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K = \{f(t, p)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью ε, т. е. при заданном ε и соответствующим ему T_ε для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдется такое $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$, что

$$d(f(s,p), f(t,p)) < \varepsilon.$$

Установим связь между определением рекуррентности Биркгофа и определением 1.1.

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см., например, [2, с. 400]). Более того, заметим, что в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}$ траектории K рекуррентного движения $f(t,p)$ является компактным минимальным множеством M, а каждое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно (см. [2, с. 402, 404]).

Таким образом, в компактном пространстве Σ определения рекуррентного движения и минимального множества относятся к одному и тому же математическому объекту. Это фактически и есть определение Биркгофа. Что же касается необходимого и достаточного условия рекуррентности Биркгофа, то в наши дни оно обычно берется за ее определение.

Новое необходимое и достаточное условие рекуррентности движений, эквивалентное необходимому и достаточному условию Биркгофа, устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.1. *В компактном пространстве Σ необходимое и достаточное условие рекуррентности движения $f(t,p)$ состоит в том, что для каждой пары положительных чисел (ε, T) можно указать такое натуральное число $N_{\varepsilon,T}$, что*

$$d(p, f(N_{\varepsilon,T}T, p)) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторое число $T > 0$. Пусть для всех $\varepsilon > 0$ и соответствующих им $N_{\varepsilon,T}$ выполнено неравенство (1.1). Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(N_k T, p) = p. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что $f(t,p)$ — рекуррентное движение вне зависимости от значения T (см. [4, теорема 1.1]).

Предположим теперь, что $f(t,p)$ — рекуррентное движение, но не существует последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, для которой выполнено равенство (1.2). Обозначим через K — траекторию движения $f(t,p)$. Тогда, поскольку отображение f непрерывно, для заданного значения T и каждой точки $q \in K$ не существует последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{k\to+\infty} f(N_k T, q) = q. \tag{1.3}$$

Положим

$$\Omega_{q,T} = \bigcap_{i\geq 0} \overline{\bigcup_{j\geq i} g^{jT} q},$$

где i и j — целые. Тогда множество

$$M_T = \{r \in \Omega_{q,T} \colon\ q \in K\} \tag{1.4}$$

компактно и представляет собой объединение всех минимальных множеств, содержащихся в ω-предельном множестве Ω движения $f(t,p)$ (см. [5, теорема 2]). Более того, для каждой точки $q \in K$ множество $\Omega_{q,T}$ исчерпывает предельные точки последовательности

$$q_k = f(kT, q), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Значит, множество M_T исчерпывает предельные точки всех последовательностей вида (1.5).

Заметим теперь, что из компактности пространства Σ следует его полнота. Следовательно, в силу рекуррентности движения $f(t,p)$ замыкание $\bar{K}$ траектории K является компактным минимальным множеством. Поэтому имеет место равенство

$$\bar{K} = M_T,$$

которое в силу равенства (1.4) противоречит предположению о том, что равенство (1.3) не выполняется.

Полученное противоречие означает, что для заданного числа T справедливо равенство (1.2). Отсюда следует неравенство (1.1). □

Теорема 1.1 позволяет дать новое определение рекуррентного движения.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что $f(t,p)$ — *рекуррентное движение*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(d) замыкание $\bar{K}$ траектории K движения $f(t,p)$ компактно;

(e) для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_ε, что

$$d(p, f(N_\varepsilon, p)) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Эквивалентность определений 1.1 и 1.2 устанавливает следующее утверждение.

Теорема 1.2. *В полном метрическом пространстве Σ определения 1.1 и 1.2 эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 1.1 каждое движение, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно. Поэтому в силу теоремы 1.1 для движения $f(t,p)$ выполнено условие (1.6) и обратно. Значит, для доказательства теоремы 1.2 остается показать, что в полном пространстве Σ из определения 1.1 следует определение 1.2. Проделаем это.

Согласно определению 1.1 в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}$ траектории K рекуррентного движения $f(t,p)$ является компактным минимальным множеством. Следовательно, в силу теоремы 1.1 для $f(t,p)$ выполнено также и условие (1.6). □

Очевидно, что определение 1.2 эквивалентно определению Биркгофа. Отметим, однако, что определение 1.2 более конструктивно, поскольку оно позволяет выявить новые важные свойства рекуррентных движений (см. теорему 2.1 и следствие 2.1).

2. Новые свойства движений и предельных множеств

Установим новые свойства движений и предельных множеств динамических систем, связанные с определением 1.2. Для этого, прежде всего, заметим, что теорему 1.1 дополняет следующая

Теорема 2.1. *Пусть* $f(t,p)$ *— некоторое рекуррентное движение. Тогда, если пространство* Σ *компактно, то для каждой пары положительных чисел* (ε, T) *можно указать такое натуральное число* $N_{\varepsilon,T}$, *что одновременно выполнены неравенства* (1.1) *и*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(f(t,p), f(t+N_{\varepsilon,T}T,p)) \le \varepsilon. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку движение $f(t,p)$ рекуррентно, а пространство Σ компактно, то согласно теореме 1.1 для каждой пары положительных чисел (ε, T) существует такое натуральное число $N_{\varepsilon,T}$, что выполнено неравенство (1.1). Поэтому для каждого фиксированного $T>0$ и некоторой последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, составленной из чисел $N_{\varepsilon,T}$, выполнено равенство (1.2). Следовательно, для всех $t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{k\to+\infty} f(t+N_kT,p) = f(t,p). \tag{2.2}$$

Покажем, что равенство (2.2) выполняется равномерно на всей оси $\mathbb{R}$.

В самом деле, зафиксируем некоторое положительное число T и обозначим через F множество функций

$$t \to f(t \pm NT, p), \quad N = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$. Поскольку пространство Σ компактно, то очевидно, что множество F равностепенно непрерывно (см., например, [6, с. 212]). Следовательно, согласно теореме Арцела замыкание $\bar{F}$ множества F компактно в топологии равномерной сходимости. В силу равенства (2.2) это означает, что

$$\bar{F} = \bigcap_{k\ge1} g^{N_kT}\bar{F} \tag{2.3}$$

(см., например, [7, с. 105]).

Предположим, что сходимость в (2.2) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существует такое положительное число ε, что для всех $k=1,2,\ldots$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(f(t+N_kT,p), f(t,p)) \ge \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_k = \max_{-m_kT\le t\le m_kT} d(f(t+N_kT,p), f(t,p)) \ge \varepsilon_k.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to+\infty} \sup\, \delta_k \ge \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (2.3).

Таким образом, равенство (2.2) выполняется равномерно на всей оси $\mathbb{R}$. Отсюда следует неравенство (2.1). □

З а м е ч а н и е 2.1. В силу теоремы 2.1 несложно заметить, что вместе с неравенством (1.1) справедливо также неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(f(t,p), f(t-N_{\varepsilon,T}T,p)) \le \varepsilon. \tag{2.4}$$

Неравенства (1.1), (2.1) и (2.4) определяют новое конструктивное свойство рекуррентных движений. Новое свойство предельных множеств движений устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть p — некоторая точка пространства Σ и Ω — ω-предельное множество движения $f(t,p)$. Тогда, если пространство Σ компактно, то Ω — минимальное множество.*

Доказательство. Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \to f(t + N + l, p), \quad l = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N. При этом положим

$$P = \bigcap_{N \geq 0} \bar{P}_N. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\bar{P}_0 \supset \bar{P}_1 \supset \ldots \supset \bar{P}_N \supset \ldots.$$

Поэтому для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$

$$P = \bigcap_{k \geq 1} \bar{P}_{N_k}. \tag{2.6}$$

Если пространство Σ компактно, то каждое из множеств P_N равностепенно непрерывно (см., например, [6, с. 212]). В этом случае множество P непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно (см. [7, с. 105]). Значит, P содержит компактное (в топологии равномерной сходимости) минимальное множество M (см. [2, с. 401]). Более того, в силу равенств (2.5) и (2.6) несложно заметить, что P — объединение компактных (в топологии равномерной сходимости) минимальных множеств (см. [4, теорема 1.1]). Покажем, что M не является собственной частью P, т. е. что P — минимальное множество.

В самом деле, зафиксируем некоторую последовательность $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$. Тогда без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k \to +\infty} f(N_k, p) = q.$$

Предположим, что функция $t \to f(t, q)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит множеству M. Пусть $(N'_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ — такая последовательность натуральных чисел, что

$$\lim_{k \to +\infty} f(N'_k, p) = q',$$

и пусть функция $t \to f(t, q')$, определенная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит другому минимальному множеству $M' \subset P$. Если

$$\sup_{k \geq 1} |N_k - N'_k| < +\infty,$$

то, очевидно,

$$M' \cap M \neq \varnothing.$$

Краткое доказательство теоремы 2.2 приведено в [4].

Однако, пересечение минимальных множеств по определению пусто, а объединение всех последовательностей $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ исчерпывает множество $\mathbb{N}$. Значит, P — минимальное множество.

Заметим теперь, что по определению

$$\Omega = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} f(s,p)}.$$

Следовательно, Ω — минимальное множество. □

З а м е ч а н и е 2.2. Легко видеть, что утверждение, аналогичное теореме 2.2, справедливо также и для α-предельного множества A движения $f(t,p)$.

Значение теоремы 2.2 подчеркивает следующий

П р и м е р 2.1. Для полноты картины рассмотрим одну попытку построения компактного ω-предельного множества, которое не является минимальным.

На действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = [-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2)], \tag{2.7}$$

$$\dot{x}_2 = [x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2)] \tag{2.8}$$

(см., например, [2, с. 375]). В полярных координатах (r,θ) система (2.7), (2.8) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)(1 + r^2 - 2r\cos\theta), \quad \dot{\theta} = (1 + r^2 - 2r\cos\theta). \tag{2.9}$$

Положим $x_1(0) \in (0,1)$ и $x_2(0) \in (0,1)$. В [2, с. 375] считается, что движения системы (2.7), (2.8) осуществляются по кривым дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2).$$

Если это так, то ω-предельным множеством движения $(x_1(t), x_2(t))$ является окружность

$$C = \{(x_1, x_2)\colon\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Окружность C содержит положение равновесия $\{r=1\}, \{\theta=0\}$ и дугу $\{r=1\}, \{\theta\in(0,2\pi)\}$, причем траектория K движения $(x_1(t), x_2(t))$ наматывается на C как спираль. Последнее, однако, неверно.

В самом деле, при всех $r_0 \in (0,1)$ и $\theta_0 \in \mathbb{R}$ непродолжаемое решение $(r(t), \theta(t))$ системы (2.9) с начальным условием

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0$$

ограничено при $t \to +\infty$. Но из ограниченности $\theta(t)$ при $t \to +\infty$ следует, что траектория K не может наматываться на C.

Более важное значение теоремы 2.2 состоит в том, что она позволяет установить прямую связь между определением 1.2 и понятием устойчивости по Пуассону.

Напомним, что точка p называется *положительно устойчивой по Пуассону*, если $p \in \Omega$ (см., например, [2, с. 363]). Аналогичным образом, точка p называется *отрицательно устойчивой по Пуассону*, если $p \in \mathrm{A}$. Если же $p \in \Omega$ и $p \in \mathrm{A}$, то точка p называется (просто) *устойчивой по Пуассону*.

Если точка p устойчива по Пуассону (соответственно положительно или отрицательно), то каждая точка q траектории K движения $f(t,p)$ также устойчива по Пуассону (соответственно положительно или отрицательно). Поэтому говорят, что движение $f(t,p)$ *устойчиво по Пуассону* (соответственно положительно или отрицательно).

Как известно, каждое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону (см., например, [2, с. 402]). Теорема 2.2 позволяет существенно уточнить это утверждение, поскольку из нее сразу вытекает

Следствие 2.1. *В компактном метрическом пространстве Σ каждая положительно (отрицательно) устойчивая по Пуассону точка $p \in \Sigma$ лежит на траектории рекуррентного движения, т. е. каждое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение $f(t,p)$ является рекуррентным.*

Следствие 2.1 закрывает проблему существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений в компактном метрическом пространстве Σ. В частности, оно позволяет существенно уточнить теорему Пуанкаре–Каратеодори о возвращении точек (см., например, [2, с. 471]), так как из него вытекает

Следствие 2.2. *В компактном метрическом пространстве Σ с конечной положительной инвариантной мерой μ (относительно системы g^t) почти все точки $p \in \Sigma$ (в смысле меры μ) лежат на траекториях рекуррентных движений, т. е. почти все точки $p \in \Sigma$ являются точками минимальных множеств.*

3. Устойчивые по Пуассону движения на торе

В дополнение к следствию 2.1 обсудим проблему построения устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений на торе. Нам удалось найти лишь одну концептуальную попытку построения таких движений. Эта попытка содержится в монографии [2, с. 365] и является неудачной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий

П р и м е р 3.2. Зафиксируем тор $\mathbb{T}^2$ с циклическими координатами (ξ_1, ξ_2) с периодом, равным единице. Следуя [2, с. 365], на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2), \tag{3.1}$$

где λ — некоторое положительное иррациональное число. В [2, с. 365] считается, что движения системы (3.1) осуществляются по кривым уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda. \tag{3.2}$$

Кривые уравнения (3.2) порождают на торе $\mathbb{T}^2$ эргодический поток (см., например, [8, с. 450]). Отсюда делается вывод, что на $\mathbb{T}^2$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (3.1) порождает три типа движений:

(α) положение равновесия $(0, 0)$;

(β) положительно асимптотические и отрицательно устойчивые по Пуассону;

(γ) отрицательно асимптотические и положительно устойчивые по Пуассону.

В случае эргодического потока тор $\mathbb{T}^2$ является минимальным множеством, т. е. эргодический поток порождает на $\mathbb{T}^2$ движения рекуррентного типа. В случае системы (3.1) минимальным множеством является положение равновесия O, что позволяет предположить существование на торе $\mathbb{T}^2$ устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений. Последнее, однако, неверно. Именно доказательство существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, порожденных на торе $\mathbb{T}^2$ системой (3.1), принципиально невозможно, поскольку конструкция примера в [2, с. 365] неверна и противоречит теореме Биркгофа о специальных центральных движениях (см. [3, с. 206]). Это означает, что не существует устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, порожденных на торе $\mathbb{T}^2$ системой (3.1); последнее, очевидно, можно объяснять только тем, что движения системы (3.1) не осуществляются по кривым уравнения (3.2).

З а м е ч а н и е 3.1. Для полноты картины наряду с системой (3.1) рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2 + \delta, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2 + \delta), \tag{3.3}$$

где δ — некоторое положительное число. Тогда мы можем говорить об устойчивости по Пуассону движений рекуррентного типа в системе (3.3) (см. [8, с. 455]). Отсюда сразу следует, что система (3.1) является системой первой степени негрубости, т. е. в ней отсутствуют устойчивые по Пуассону нерекуррентные движения (см. [9]).

References

[1] A. A. Markov, “Sur une proprieté générale des ensembles minimaux de Birkhoff”, *C.R. Acad. Sci.*, **193** (1931), 823–825.

[2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[3] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14 (In Russian)].

[5] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Метод построения минимальных множеств динамических систем”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:7 (2015), 835–841; англ. пер.:A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “Method for constructing minimal sets of dynamical systems”, *Differential Equations*, **51**:7 (2015), 831–837.

[6] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, *Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах*, ЛКИ, М., 2007. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, *Poisson Stability in Dynamical and Continuous Periodic Systems*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

[7] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

[8] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ЛКИ, М., 2007. [E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

[9] С. Х. Арансон, “Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий двоякоасимототических к двойному предельному циклу у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **76(118)**:2 (1968), 214–230; англ. пер.:S. Kh. Aranson, “The absence of nonclosed Poisson-stable semitrajectories and trajectories doubly asymptotic to a double limit cycle for dynamical systems of the first degree of structural instability on orientable two-dimensional manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **5**:2 (1968), 205–219.

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Дзюба Сергей Михайлович
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2021 г.
Поступила после рецензирования 25.02.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas'ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergei M. Dzyuba
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 17.12.2021
Reviewed 25.02.2022
Accepted for press 10.03.2022