



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 512, 2023

МАТЕМАТИКА

О существовании решения вырожденного нелинейного уравнения Бюргера с малым параметром и теория p -регулярности

Б. Медак, А. А. Третьяков 5

Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия

М. В. Шамолин 10

Оптимизация колебаний механических систем с трением

Ю. Ф. Голубев 18

Стохастическое моделирование коэффициентов переноса жидкостей

В. Я. Рудяк, Е. В. Лежнев 27

Усредненная круговая пространственная ограниченная задача трех тел: внутренний вариант, новые результаты

П. С. Красильников, А. В. Доброславский 33

Об асимптотике аттракторов системы Навье—Стокса в анизотропной среде с мелкими периодическими препятствиями

К. А. Бекмаганбетов, А. М. Толеубай, Г. А. Чечкин 42

О повышенной суммируемости градиента решений задачи Зарембы для уравнения p -Лапласа

Ю. А. Алхутев, Ч. Д. Апице, М. А. Кисатов, А. Г. Чечкина 47

О структуре множества полноцветных раскрасок случайного гиперграфа

Д. Н. Тяпкин, Д. А. Шабанов 52

О поиске начального приближения в задаче волновой инверсии с помощью сверточных нейронных сетей

И. Б. Петров, А. С. Станкевич, А. В. Васюков 58

О подпространствах пространства Орлича, порожденных независимыми одинаково распределенными функциями

С. В. Асташкин 65

Скрытая граница глобальной устойчивости в контрпримере к гипотезе Капранова о полосе захвата

Н. В. Кузнецов, М. Ю. Лобачев, Т. Н. Мокаев 69

Метод локализации фиктивных экстремумов в задаче глобальной оптимизации

Ю. Г. Евтушенко, А. А. Третьяков 78

Одномерные конечнозонные операторы Шрёдингера как предел коммутирующих разностных операторов	81
<i>Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов</i>	
Возвращаемость интегралов условно периодических функций	85
<i>Н. В. Денисова</i>	
Трёхслойная схема для решения уравнения диффузии излучения	89
<i>Б. Н. Четверушкин, О. Г. Ольховская, В. А. Гасилов</i>	
Оценка области однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками	96
<i>В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов</i>	

ПОПРАВКИ

Поправка к статье “Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката в языках с малым числом переменных”, 2022, том 507, с. 61–65	102
<i>М. Н. Рыбаков</i>	

CONTENTS

Volume 512, 2023

MATHEMATICS

On the Application of the Solution of the Degenerate Nonlinear Burgers Equation with a Small Parameter and the Theory of p -Regularity

B. Medak and A. A. Tret'yakov 5

Invariant Volume Forms of Geodesic, Potential, and Dissipative Systems on a Tangent Bundle of a Finite Manifold

M. V. Shamolin 10

Optimization of Oscillations of Mechanical Systems with Friction

Yu. F. Golubev 18

Stochastic Modeling the Transport Coefficients of Liquids

V. Ya. Rudyak and E. V. Lezhnev 27

Averaged Circular Spatial Restricted Three-Body Problem: Internal Case, New Results

P. S. Krasilnikov and A. V. Dobroslavskiy 33

On Asymptotics of Attractors to Navier–Stokes System in Anisotropic Medium with Small Periodic Obstacles

K. A. Bekmaganbetov, A. M. Toleubay, and G. A. Chechkin 42

On Higher Integrability of the Gradient of Solutions to the Zaremba Problem for p -Laplace Equation

Yu. A. Alkhutov, C. D'Apice, M. A. Kisatov, and A. G. Chechkina 47

On the Structure of the Set of Panchromatic Colorings of a Random Hypergraph

D. N. Tyapkin and D. A. Shabanov 52

On Obtaining Initial Approximation for Full Wave Inversion Problem Using Convolutional Neural Network

I. B. Petrov, A. S. Stankevich, and A. V. Vasyukov 58

On subspaces of an Orlicz Space Spanned by Independent Identically Distributed Functions

S. V. Astashkin 65

Hidden Boundary of Global Stability in the Kapranov Conjecture on the Pull-in Range

N. V. Kuznetsov, M. Y. Lobachev, and T. N. Mokaev 69

The Method of Fictitious Extrema Localization in the Problem of Global Optimization

Yu. G. Evtushenko and A. A. Tret'yakov 78

One-Dimensional Finite-Gap Schrödinger Operators As a Limit of Commuting Difference Operators

G. S. Mauleshova and A. E. Mironov 81

The Returnability of Integrals of Conditionally Periodic Functions

N. V. Denisova 85

Three-Layer Scheme for Solving the Radiation Diffusion Equation	
<i>B. N. Chetverushkin, O. G. Olkhovskaya, and V. A. Gasilov</i>	89

Estimate for Domain of Univalence on the Class of Holomorphic Self-Maps of a Disc with Two Boundary Fixed Points	
<i>V. V. Goryainov, O. S. Kudryavtsev, and A. P. Solodov</i>	96

ERRATA

Erratum to: Computational Complexity of Theories of a Binary Predicate with a Small Number of Variables, 2022, vol. 507, pp. 61–65	
<i>M. N. Rybakov</i>	102

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ТЕОРИЯ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

© 2023 г. Б. Медак^{1,*}, А. А. Третьяков^{1,2,3,4,**}

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко

Поступило 02.02.2022 г.

После доработки 27.10.2022 г.

Принято к публикации 05.05.2023 г.

В статье рассматриваются различные модификации нелинейного уравнения Бюргерса с малым параметром и вырожденного в решении вида

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $F : \Omega \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, $\Omega = C^2([0, \pi] \times [0, T])\mathbb{R}$ и $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $f(x, t) \in C([0, \pi] \times [0, T])$, $\varphi(x) \in C[0, \pi]$. Нас будет интересовать наиболее важный в приложениях случай малого параметра ε с осциллирующими начальными условиями вида $\varphi(x) = k \sin x$, где k — некоторая, вообще говоря, зависящая от ε , константа, и изучать вопрос существования решения в окрестности тривиального $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, которому соответствует $k = k^* = 0$ и при каких начальных условиях на значения k возможно построение аналитического приближения этого решения при малых ε .

Мы будем искать решение в традиционном русле разделения переменных на подпространстве функций вида $u(x, t) = v(t)u(x)$, где $v(t) = ce^{-t}$, $u(x) \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$. В этом случае рассматриваемая задача является вырожденной в точке $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, так как $\text{Im}F'_u(u^*, \varepsilon^*) \neq Z = \mathcal{C}([0, \pi] \times [0, T])$. Это следует из теории Штурма—Лиувилля. Для осуществления наших целей мы применяем аппарат теории p -регулярности [6, 7, 15, 16] и показываем, что отображение $F(u, \varepsilon)$ является 3-регулярным в точке $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, т.е. $p = 3$.

DOI: 10.31857/S2686954323700236, EDN: SULTYI

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

Будем рассматривать следующее уравнение

$$F(v, y) = 0, \quad (2)$$

где отображение $F : W \times Y \rightarrow Z$, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$ и W , Y , Z — банаховы пространства.

¹ Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Faculty of Exact and Natural Sciences, Siedlce, Poland

² Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

³ System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

⁴ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: bmedak@uph.edu.pl

**E-mail: tret@uph.edu.pl

Предположим, что в точке решения $(v^*, y^*) \in W \times Y$, $\text{Im}F'(v^*, y^*) \neq Z$ и пусть

$$Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p, \quad (3)$$

где $Z_1 = \text{cl}(\text{Im}F'(v^*, y^*))$ и $V_1 = Z$. Через V_2 обозначим дополнение Z_1 до Z (предполагается, что такое существует) и $P_{V_2} : Z \rightarrow V_2$ — оператор проектирования на V_2 параллельно Z_1 . Полагаем Z_2 равно замыканию линейной оболочки квадратичной формы $P_{V_2}F''(v^*, y^*)[\cdot]^2$. И далее индуктивно

$$Z_i = \text{cl}(\text{span } \text{Im}P_{V_i}F^{(i)}(v^*, y^*)[\cdot]^i) \subseteq V_i, \\ i = 2, \dots, p-1,$$

где V_i — выбранное замкнутое дополнение (предполагается, что такое существует) $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$ до Z , и $P_{V_i} : Z \rightarrow V_i$ — оператор проектирования на V_i параллельно $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$.

Окончательно, $Z_p = V_p$. При этом порядок p полагаем как минимальное число (если такое существует), для которого выполнено представление (3).

Обозначим $\varphi^{(0)} = \varphi$, для произвольного отображения φ .

Определим следующие отображения

$$F_i : W \times Y \rightarrow Z_i, \quad F_i(v, y) = P_{Z_i} F(v, y), \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, p,$$

где $P_{Z_i} : Z \rightarrow Z_i$ — оператор проектирования на Z_i параллельно $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \dots \oplus Z_p$.

Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(v, y) = F_1(v, y) + \dots + F_p(v, y)$$

или

$$F(v, y) = (F_1(v, y), \dots, F_p(v, y)).$$

Обозначим $h = [h_v, h_y]$, $h_v \in W$, $h_y \in Y$, $[h_v, h_y] \in W \times Y$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) : W \times Y \rightarrow Z$,

$$\Psi_p(h) = F_1''(v^*, y^*) + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1} \quad (5)$$

такой, что для $\xi = (v, y)$

$$\Psi_p(h)[\xi] = F_1'(v^*, y^*)[\xi] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1}[\xi],$$

называется *p-фактор оператором определенным элементом h* или просто *p-фактор оператором*, если это ясно из контекста.

Определение 2. Говорим, что отображение F абсолютно вырождено в точке (v^*, y^*) до p -го порядка, если $F^{(i)}(v^*, y^*) = 0$, $i = 1, \dots, p-1$.

В случае абсолютного вырождения p -фактор оператор сводится к $F^{(p)}(v^*, y^*)[h]^{p-1}$.

Для отображений F_i будет

$$F_i^{(k)}(v^*, y^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, i-1, \quad \forall i = 1, \dots, p,$$

т.е. F_i абсолютно вырождено в точке (v^*, y^*) до i -го порядка.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$ так, что

$$\Psi_p[\xi]^p = F_1'(v^*, y^*)[\xi] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[\xi]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[h]^p = \Psi_p(h)[h]$.

Определение 3. p -ядро оператора Ψ_p есть множество нулей оператора Ψ_p :

$$H_p(v^*, y^*) = \text{Ker}^p \Psi_p = \{h \in W \times Y : F_1'(v^*, y^*)[h] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[h]^p = 0\},$$

по аналогии с ядром первой производной $\text{Ker} F'(v^*, y^*) = \{h \in W \times Y : F'(v^*, y^*)[h] = 0\}$.

Заметим, что

$$\text{Ker}^p \Psi_p = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k F_k^{(k)}(v^*, y^*).$$

Определение 4. Отображение F называется *p-регулярным в точке (v^*, y^*) на h* , если $\text{Im} \Psi_p(h) = Z$.

Определение 5. Отображение F называется *p-регулярным в точке (v^*, y^*)* , если оно *p-регулярно* на каждом $h \in H_p(v^*, y^*) \setminus \{0\}$ или $H_p(v^*, y^*) = \{0\}$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Люстерника о касательном подпространстве на вырожденный случай и является одним из главных результатов теории p -регулярности.

Теорема 1. Пусть $F \in C^{p+1}(U \times M)$, $F : U \times M \rightarrow Z$, где U , M и Z — банаховы пространства.

Предположим что $F(v^*, y^*) = 0$ и $\forall \bar{y} \in M$, $\|\bar{y}\| = 1$, такого, что

$$(0, \bar{y}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k F_k^{(k)}(v^*, y^*)$$

выполнено

$$\| \{ F_1'(v^*, y^*) + F_2''(v^*, y^*)[0, \bar{y}] + \dots + F_p^{(p)}(v^*, y^*)[0, \bar{y}]^{p-1} \}^{-1} \| \leq C. \quad (6)$$

(Здесь $\{\cdot\}^{-1}$ означает правый обратный оператор).

Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ существует непрерывное отображение $v = v(y)$, $y \in V_\delta(y^*)$, где $V_\delta(y^*)$ окрестность точки y^* , $v(y) \in C(V_\delta(y^*))$, такое, что $F(v(y), y) = 0$ и

$$v(y) = v^* + o(y), \quad \|o(y)\| = o(\|y - y^*\|), \quad (7)$$

$$\|v(y) - v^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|F_k(v^*, y^*)\|_{Z_k}^{\frac{1}{k}}, \quad \forall y \in V_\delta(y^*), \quad (8)$$

где $C > 0$ — независимая константа.

Эта теорема позволяет описать множество решений уравнения $F(v, y) = 0$ в окрестности вырожденной точки (u^*, ε^*) и в частности обосновать существование решения уравнения Бюргера (1) с малым параметром, а также дать аналитический вид этого решения.

2. ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ p -ГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теперь мы можем сформулировать так называемые p -фактор теоремы о неявной функции, которые являются модификациями теоремы 1 и аналогичных теорем в [6] и на основании которых будут получены основные результаты этой работы.

Теорема 2. Пусть W , Y и Z банаховы пространства, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$, $F : W \times Y \rightarrow Z$, $F(v^*, y^*) = 0$, отображения $F_k(v, y)$, $k = 1, \dots, p$ и p -фактор оператор $\Psi_p(h)$ определены согласно (4) и (5).

Предположим, что существует $\bar{h} \in \bigcap_{r=1}^p \text{Ker}^r F_{r_v}^{(r)}(v^*, y^*)$, $\|\bar{h}\| = 1$ такое, что $\text{Im} \Psi_p(\bar{h}) = Z$, т.е. F p -регулярно в точке (v^*, y^*) на элементе $\bar{h}$.

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$, $v > 0$ и $\delta = \alpha v^p$ существует непрерывное отображение $\varphi(y) : U_\delta(y^*) \rightarrow U_v(v^*)$ и константа $K > 0$ такие, что выполнены соотношения

- a) $\varphi(y^*) = v^*$;
- b) $F(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall y \in U_\delta(y^*)$;
- c) $\varphi(y) = v^* + h(y) + v(y)$, где $h(y) = \gamma(y)\bar{h}$, $\gamma(\cdot) : U_\delta(y^*) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\gamma(\cdot)$ непрерывная функция, для которой

$$\frac{\|y - y^*\|^{\frac{1}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \leq \gamma(y) \leq v, \quad y \in U_\delta(y^*).$$

Более того для $v(y)$ будут справедливы оценки

$$\|v(y)\|_W \leq K \sum_{r=1}^p \frac{\|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}}{\gamma(y)^{r-1}}, \quad (9)$$

$y \in U_\delta(y^*)$, $\gamma(y) \neq 0$, что означает

$$\|v(y)\|_W = O(\gamma^2(y)).$$

Следствие 1. Оценку (9) можно переписать следующим образом

$$\|v(y)\|_W \leq K \sum_{r=1}^p \|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}^{\frac{1}{r}}, \quad y \in U_\delta(y^*), \quad y \neq y^*.$$

Теорема 3. Пусть W , Y и Z банаховы пространства, $F \in C^{p+1}(W \times Y)$, $F : W \times Y \rightarrow Z$, $F(v^*, y^*) = 0$, отображения $F_i(v, y)$, $i = 1, \dots, p$ и p -фактор оператор $\Psi_p(h)$ определены согласно (4) и (5).

Предположим, что существует элемент $\bar{h} \in \bigcap_{r=1}^p \text{Ker}^r F_{r_{(v,y)}}^{(r)}(v^*, y^*)$, $\|\bar{h}\| = 1$, $\bar{h} \in W \times Y$, $\bar{h} = [\bar{h}_v, \bar{h}_y]$, $\bar{h}_y = 0$ такой, что $\text{Im} \Psi_p(\bar{h}) \cdot (0 \times Y) = Z$, т.е. F p -регулярно в точке (v^*, y^*) на элементе $\bar{h}$ относительно пространства Y .

Тогда для достаточно малых $\alpha > 0$, $v > 0$ и $\delta = \alpha v^p$ существуют непрерывное отображение $\varphi(y) : U_\delta(y^*) \rightarrow U_v(v^*)$ и константа $K > 0$ такие, что выполнены следующие соотношения

- a) $\varphi(y^*) = v^*$;
- b) $F(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall y \in U_\delta(y^*)$;
- c) $\varphi(y) = v^* + h(y) + v(y)$, где $h(y) = \gamma(y)\bar{h}_y$, $\gamma(\cdot) : U_\delta(y^*) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\gamma(\cdot)$ любая фиксированная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\|y - y^*\|^{\frac{1}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \leq \gamma(y) \leq v.$$

Более того $v(y)$ удовлетворяет

$$\|v(y)\|_W \leq K \sum_{r=1}^p \frac{\|F_r(v^* + h(y), y)\|_{Z_r}}{\gamma(y)^{r-1}},$$

$y \in U_\delta(y^*)$, $\gamma(y) \neq 0$, что означает

$$\|v(y)\|_W = O(\gamma^2(y)).$$

З а м е ч а н и е 1. Элемент $\bar{h}$ в теореме 2 определяется производными отображения F по переменной y , а в теореме 3 — смешанными производными отображения F по переменным (v, y) .

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Рассмотрим нелинейное уравнение Бюргерса с малым параметром ε вида

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 = 0, \quad (10)$$

$F : \Omega \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, где F достаточно гладкое отображение (по крайней мере до порядка $p+1$) и $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = k \sin x$, при этом $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$ тривиальное решение этого уравнения, соответствующее $k = k^* = 0$.

При этом отображение $F(u, \varepsilon)$ является 3-регулярным на элементе $\bar{h} = [\bar{h}_u, 0_\varepsilon]$, где $\bar{h}_u = e^{-t} \sin x$.

Применяя к отображению $F(u, \varepsilon)$ теорему 3, полагая

$$F(v, y) = F(u, \varepsilon), \quad v := u, \quad y := \varepsilon,$$

получаем следующий результат о существовании решения (10).

Теорема 4. Для достаточно малых $\alpha > 0, \nu > 0$ где

и $k(\varepsilon) \in C(R)$, $\varepsilon \in R$, при $|\varepsilon| \leq \alpha \nu^3$, $\frac{\varepsilon^3}{\alpha^3} \leq k(\varepsilon) \leq \nu$ существует непрерывное решение (10) вида

$$u(x, t, \varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \bar{h}_u + y(x, t, \varepsilon),$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sin x,$$

где $\gamma(\varepsilon)$ некоторая непрерывная функция такая, что $\gamma(\varepsilon) = O(k(\varepsilon))$, а $\|y(x, t, \varepsilon)\| = o(\varepsilon^3)$.

Доказательство данного результата подобно доказательству аналогичных теорем в [8–10], поэтому здесь не приводится.

Для неоднородного нелинейного уравнения Бюргерса вида $F(u, \varepsilon) = u - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 = f(x, t)$, введя отображение $F(u, \varepsilon, f) = F(u, \varepsilon) - f$, получим однородное относительно u, ε, f уравнение

$$F(u, \varepsilon, f) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x, t) = 0, \quad (11)$$

где $F: \Omega \times C([0, \pi] \times [0, T]) \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ и, не ограничивая общности, рассмотрим случай нулевых начальных условий $u(x, 0) = 0$.

Заметим, что $F'(0, 0, 0) = \left[\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{(dx)^2}, 0_\varepsilon, 1_f \right]$ и

$\text{Ker} F'(0, 0, 0)$ определяется решением уравнения

$$F'(0, 0, 0)[u, \varepsilon, f] = u_t - u_{xx} - f(x, t) = 0,$$

которое обозначим через $\bar{h} = (\bar{u}(x, t, f), 0_\varepsilon, f(x, t))$. Тогда

$$\bar{h} = (\bar{u}(x, t, f), 0_\varepsilon, f(x, t)) \in \text{Ker} F'(0, 0, 0) \cap$$

$$\cap \text{Ker}^3 P F'''(0, 0, 0) = \text{Ker}^3 \Psi_3(h)$$

и

$$\bar{u}(x, t, f) = \int_0^t \int_0^\pi G(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $G(x, \xi, t, \tau)$ — функция Грина (см., например, [13, 14]), а отображение $F(u, \varepsilon, f)$ является 3-регулярным на элементы $\bar{h}$.

Применяя теорему 3 и полагая $F(v, y) = F(u, \varepsilon, f)$, $v := (u, f)$, $y := \varepsilon$ и $(u^*, \varepsilon^*, f^*) = (0, 0, 0)$.

Теорема 5. Для $\alpha > 0, \nu > 0$ достаточно ма-

лых при $\varepsilon \in (-\alpha \nu^3, \alpha \nu^3)$ и $\|f(x, t)\| \in \left(\frac{\varepsilon^3}{\alpha}, \nu \right)$ суще-

ствует непрерывное решение уравнения (11) вида

$$u(x, t, \varepsilon, f) = \bar{u}(x, t, f) + y(x, t, \varepsilon, f), \quad (12)$$

$$\|y(x, t, \varepsilon, f)\| = o(\varepsilon^{\frac{1}{3}}). \quad (13)$$

Аналогично могут быть исследованы уравнения

$$u_t - \varepsilon u_{xx} + uu_x + g(u) - f(x, t) = 0, \quad (14)$$

$$u_t - u_{xx} + \varepsilon uu_x + g(u) - f(x, t) = 0, \quad (15)$$

где $g^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, \dots, p$, а также при неоднородных начальных условиях вида $u(x, 0) = \phi(x)$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30005, стр. 1–9), научной бюджетной теме ФИЦ ИУ РАН и научной теме № 144/23/В Министерства Образования и Науки Польши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baxley J.V. Nonlinear second-order boundary value problems: Continuous dependence and periodic boundary conditions // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1982. V. 31. № 2. P. 305–320.
2. Brezhneva O.A., Tretyakov A.A. Marsden: Higher-order implicit function theorems and degenerate nonlinear boundary-value problems // Communications on Pure and Applied Analysis. 2008. V. 7. № 2. P. 293–315.
3. Gaines R. Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems // Pacific J. Math. 1969. V. 28. P. 327–336.
4. Grzegorzczak W., Medak B., Tretyakov A.A. Application of p -regularity theory to nonlinear boundary value problems // Boundary Value Problems. 2013. V. 2013. P. 251, <http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2013/1/251>
5. Ingram S.K. Continuous dependence on parameters and boundary data for nonlinear two-point boundary value problems // Pacific J. Math. 1972. V. 41. P. 395–408.
6. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
7. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. 2-регулярные решения нелинейных проблем. Теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
8. Medak B. Development of p -regularity apparatus and its application to describing the structure of solution sets of degenerated differential equations, Doctoral thesis, UMCS, Lublin, 2013 (in Polish).
9. Medak B., Tretyakov A.A. Existence of periodic solutions to nonlinear p -regular boundary value problem // Boundary Value Problems. 2015. V. 2015. P. 91. <https://doi.org/10.1186/s13661-015-0360-2>
10. Medak B., Tretyakov A.A. Application of p -regularity theory to the Duffing equation // Boundary Value Problems. 2017. V. 2017. P. 85. <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0815-8>
11. Medak B., Tretyakov A.A. Continuous dependence of the singular nonlinear Van der Pol equation solutions

- with respect to the boundary conditions: Elements of p -regularity theory // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2021. V. 33. P. 1087–1107.
<https://doi.org/10.1007/s10884-020-09849-0>
12. Michael E.A. Continuous selector // *Ann. Math.* 1956. V. 64. P. 562–580.
 13. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: МГУ, Наука, 2004.
 14. Тихонов А.Н., Василева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, Москва, Физматлит, 1998.
 15. Tret'yakov A.A. The implicit function theorem in degenerate problems // *Russ. Math. Surv.* 1987. V. 42. P. 179–180.
 16. Tret'yakov A.A., Marsden J.E. Factor analysis of nonlinear mappings: p -regularity theory // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2003. V. 2. № 4. P. 425–445.

ON THE APPLICATION OF THE SOLUTION OF THE DEGENERATE NONLINEAR BURGERS EQUATION WITH A SMALL PARAMETER AND THE THEORY OF p -REGULARITY

B. Medak^{a,*} and A. A. Tret'yakov^{a,b,c,d,**}

^a *Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Faculty of Exact and Natural Sciences, Siedlce, Poland*

^b *Federal Research Center Informatics and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^c *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*

^d *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russian Federation*

The article discusses various modifications of the nonlinear Burgers equation with small parameter and degenerate in solution of the form

$$F(u, \varepsilon) = u_t - u_{xx} + uu_x + \varepsilon u^2 - f(x, t) = 0, \quad (1)$$

where $F : \Omega \rightarrow C([0, \pi] \times [0, T])$, $T > 0$, $\Omega = C^2([0, \pi] \times [0, T])\mathbb{R}$ and $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $f(x, t) \in C([0, \pi] \times [0, T])$, $\varphi(x) \in C[0, \pi]$. We will be interested in the most important in applications case of a small parameter ε with oscillating initial conditions of the form $\varphi(x) = k \sin x$, where k —some, generally speaking, constant depending on ε , and study the question of the existence of a solution in neighborhood of the trivial $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, which corresponds to $k = k^* = 0$ and at what initial Under certain conditions on the values of k , it is possible to construct an analytical approximation of this solution for small ε .

We will look for a solution in the traditional way of separation of variables on a subspace of functions of the form $u(x, t) = v(t)u(x)$, where $v(t) = ce^{-t}$, $u(x) \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$. In this case, the problem under consideration is degenerate at the point $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, since $\text{Im} F'_u(u^*, \varepsilon^*) \neq Z = \mathcal{C}([0, \pi] \times [0, T])$. This follows from the Sturm-Liouville theory. To achieve our goals, we apply the apparatus of p -regularity theory [6, 7, 15, 16] and show that the mapping $F(u, \varepsilon)$ is 3-regular at the point $(u^*, \varepsilon^*) = (0, 0)$, i.e. $p = 3$.

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2023 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 12.04.2023 г.

После доработки 27.04.2023 г.

Принято к публикации 05.05.2023 г.

Как известно [1–3], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]). В работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, тензорный инвариант

DOI: 10.31857/S2686954323600209, **EDN:** PTAQSU

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем, прежде всего, скалярные инварианты — это первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее $(n + 1)$ -мерное пространство”, приводит к динамической системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают значительной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n -мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.

Важные случаи интегрируемых систем с n степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@rambler.ru

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

1. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Рассмотрим гладкое n -мерное риманово многообразие $M^n\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^n(\alpha^*, \beta_1^*, \dots, \beta_{n-1}^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ (ср. с [5, 7, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= z_n f_n(\alpha), & \beta_1^* &= z_{n-1} f_1(\alpha), & \beta_2^* &= z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta_3^* &= z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \dots, \\ \beta_{n-1}^* &= z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}),\end{aligned}\quad (1)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$; $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$; $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3$; $\dots$; $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие $(n(n-1)/2 + 1)$ штука функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \dots, z_n$ в касательном пространстве уместно вводить тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (ср. с [7, 9, 10]) с $n(n-1) + 1$ ненулевым коэффициентом связности:

$$\begin{aligned}& \alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{11}^1(\alpha, \beta) \beta_1^{\bullet 2} + \\& + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\& \beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_1^* + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{\bullet 2} + \\& + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\& \beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_2^* + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \beta_1^* \beta_2^* + \\& + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \beta_3^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \dots, \\& \beta_{n-2}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_{n-2}^* + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_1^* \beta_{n-2}^* + \dots \\& \dots + 2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_{n-3}^* \beta_{n-2}^* + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\& \beta_{n-1}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_{n-1}^* + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \beta_1^* \beta_{n-1}^* + \\& + \dots + 2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \beta_{n-2}^* \beta_{n-1}^* = 0,\end{aligned}\quad (2)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, примут вид

$$\begin{aligned}z_1^* &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)]z_1 z_n - \\& - f_1(\alpha)[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]z_1 z_{n-1} - \\& - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)[2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]z_1 z_{n-2} - \dots \\& \dots - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \times \\& \times [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})]z_1 z_2, \\z_2^* &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)]z_2 z_n - \\& - f_1(\alpha)[2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]z_2 z_{n-1} - \dots \\& \dots - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) \times \\& \times [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3})]z_2 z_3 - \\& - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} \times \\& \times i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) z_1^2, \dots, \\z_{n-1}^* &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]z_{n-1} z_n - \\& - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots \\& \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\z_n^* &= -f_n(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)]z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-1}^2 - \\& - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots \\& \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2,\end{aligned}\quad (3)$$

$Dj(\gamma) = \frac{d \ln |j(\gamma)|}{d\gamma}$, и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

Отметим, что количество “произвольных” функций (функций в кинематических соотношениях (1) и ненулевых коэффициентов связности в (2)) в системе равно $A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ штуки. Таким образом, мы имеем $A(n)$ функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(а) Системы на касательном расслоении к n -мерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$ -мерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для динамики динамически симметричного $(n+1)$ -мерного твердого тела.

(б) Системы на касательных расслоениях более общих n -мерных поверхностях вращения.

(в) Системы на касательном расслоении n -мерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать $n+1$ независимый тензорный инвариант: или $n+1$ первый интеграл, или $n+1$ независимая дифференциальная форма, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством $n+1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. То, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, тензорных инвариантов, будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0$, $i = 1, \dots, n$, является гладкая функция $\sum_{j,k=1}^n g_{jk}(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet}$, но мы представим его в более простой форме. Кроме того, в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются алгебраические и дифференциальные соотношения на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$; $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$; $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3$; ...; $i_1(\beta_{n-2})$ из (1) и на $n(n-1)+1$ ненулевых коэффициентов связности.

Теорема 1. Если выполнены $(n-1)(n-2)/2$ условий

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &\equiv \dots \equiv f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha); \\ g_1(\beta_1) &\equiv \dots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1); \\ h_1(\beta_2) &\equiv \dots \equiv h_{n-3}(\beta_2) = h(\beta_2); \dots; \\ r_1(\beta_{n-3}) &\equiv r_2(\beta_{n-3}) = r(\beta_{n-3}); \end{aligned} \quad (4)$$

$n(n-1)/2$ условий

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \dots \equiv \Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^1(\alpha, \beta) &\equiv \dots \equiv \Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \dots, \\ \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}); \end{aligned} \quad (5)$$

а также $n(n-1)/2 + 1$ условий

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv \Gamma_2^\alpha(\alpha, \beta_1) g^2(\beta_1) \equiv \dots \\ &\equiv \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2}) = \Gamma_n(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) h^2(\beta_2) \equiv \dots \\ &\equiv \Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-3}) h^2(\beta_2) \dots r^2(\beta_{n-3}), \dots, \\ \Gamma_{n-2, n-2}^{n-3}(\beta_{n-3}) &\equiv \Gamma_{n-1, n-1}^{n-3}(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}) i^2(\beta_{n-2}); \quad (6) \\ f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha) \Gamma_n(\alpha) &\equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv 0, \dots, \\ 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) + i^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2}) &\equiv 0; \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + Df_n(\alpha) &\equiv 0, \end{aligned}$$

то система (1), (3) обладает полным набором, состоящим из $n+1$ первого интеграла вида

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_n^2 = C_1 = \text{const}; \quad (7)$$

$$\Phi_2(z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}; \quad (8)$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\};$$

$$\Phi_3(z_{n-2}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (9)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta} \Gamma_2(b) db \right\}; \dots;$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) &= \\ = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) &= C_n = \text{const}, \end{aligned} \quad (9-1)$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \Gamma_{n-1}(b) db \right\};$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) &= \\ = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n h(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db &= C_{n+1} = \text{const}. \end{aligned} \quad (10)$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $d/dt = f_n(\alpha) d/d\tau$ и фа-

зовых $w_n = z_n$, $w_{n-1}^* = \ln|w_{n-1}|$, $w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, \dots, n-2$, $w_{n-2} = z_2/z_1, \dots$, $w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}$) фазовый поток системы (1), (3) сохраняет объем на касательном расслоении TM^n , т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема

$$dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1}.$$

Общее количество условий (4)–(6), фигурирующих в теореме 1, равно $B(n) = n(n-1)/2 + 1 + (n+1)^2$, и оно не превышает $A(n)$, поскольку $A(n) - B(n) = n$, т.е. увеличение количества “произвольных” функций по сравнению с количеством условий, накладываемых на них, при наших предположениях равно размерности риманова многообразия.

Система же дифференциальных равенств из (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (12)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). При этом поиск как интеграла (7), так и (8)–(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

Примеры 1, 2. В случае обобщенных сферических координат, когда метрика на n -мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$ -мерного пространства ($k(\alpha) \equiv 1$), или когда метрика на n -мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий ($k(\alpha) \equiv \cos \alpha$) (задачи класса (а)), однопараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= -z_n, \quad z_n^\bullet = -(z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}, \\ z_{n-1}^\bullet &= z_{n-1} z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2) \times \\ &\quad \times \frac{k(\alpha) \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ z_{n-2}^\bullet &= z_{n-2} z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} - \\ &\quad - z_{n-2} z_{n-1} \frac{k(\alpha) \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}} - \\ &\quad - (z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2) \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_2}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1^\bullet &= z_1 z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} + z_1 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^{s+1} z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\beta_1^\bullet = z_{n-1} \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}},$$

$$\beta_2^\bullet = -z_{n-2} \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \dots,$$

$$\beta_{n-1}^\bullet = (-1)^n z_1 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \dots \frac{1}{\sin \beta_{n-2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}},$$

$\mu_1 \in R.$

Пример 3. В случае n -мерного пространства Лобачевского в модели Клейна (задачи класса (в)) n -параметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических $\alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2} - \beta_1^{\bullet 2} - \dots - \beta_{n-1}^{\bullet 2}) = 0$, $\beta_r^{\bullet\bullet} - \frac{2}{\alpha} \alpha^\bullet \beta_r^\bullet = 0$, $r = 1, \dots, n-1$, и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_n \mu_1 \alpha, \quad z_n^\bullet = -z_{n-1}^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2} - \dots - z_1^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_n}, \\ z_{n-1}^\bullet &= z_{n-1} z_n \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2}, \dots, \\ z_1^\bullet &= z_1 z_n \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_n}, \quad \beta_1^\bullet = z_{n-1} \frac{\mu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \mu_2}}, \dots, \\ \beta_{n-1}^\bullet &= z_1 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2}, \quad \mu_1, \dots, \mu_n \in R. \end{aligned}$$

2. ИНВАРИАНТЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое (внешнее) силовое поле с потенциалом (12), см. далее. В проекциях на оси $z_k^\bullet$, $k = 1, \dots, n$, оно будет иметь следующие компоненты, соответственно: $F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1) \dots i_1(\beta_{n-2})$, $F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1) \dots r_1(\beta_{n-3})$, ..., $F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_n(\alpha)f_n(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
\alpha^\bullet &= z_n f_n(\alpha), \\
z_n^\bullet &= F_n(\alpha) f_n(\alpha) - f_n(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] z_n^2 - \\
&- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots \\
&\dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\
z_{n-1}^\bullet &= F_{n-1}(\beta_1) f_1(\alpha) - f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_{n-1} z_n - \\
&- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots \\
&\dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \dots, \\
z_2^\bullet &= F_2(\beta_{n-2}) f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) \dots i_1(\beta_{n-3}) - \\
&- f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)] z_2 z_n i - \\
&- f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] z_2 z_{n-1} - \dots \\
&\dots - f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) \times \\
&\times [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3})] z_2 z_3 - \\
&- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots r_2^2(\beta_{n-3})}{g_{n-2}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \times \\
&\times \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) z_1^2, \\
z_1^\bullet &= F_1(\beta_{n-1}) f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) \dots i_1(\beta_{n-2}) - \\
&- f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] z_1 z_n - \\
&- f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] z_1 z_{n-1} - \\
&- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] z_1 z_{n-2} - \\
&\dots - f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \times \\
&\times [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] z_1 z_2,
\end{aligned}$$

$$\beta_1^\bullet = z_{n-1} f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \dots,$$

$$\beta_{n-1}^\bullet = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
\alpha^{\bullet\bullet} - F_n(\alpha) f_n^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \\
+ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_1^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^{\bullet\bullet} - F_{n-1}(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_1^\bullet + \\
+ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,
\end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_{n-2}) f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) \dots i_1^2(\beta_{n-3}) + \\
+ 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_{n-2}^\bullet + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_{n-2}^\bullet + \dots \\
\dots + 2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_{n-3}^\bullet \beta_{n-2}^\bullet + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_{n-1}) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) + \\
+ 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_{n-1}^\bullet + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_{n-1}^\bullet + \dots \\
\dots + 2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \beta_{n-2}^\bullet \beta_{n-1}^\bullet = 0,
\end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \dots, \beta_{n-1}^\bullet; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

Теорема 2. Если выполнены условия (4)–(6), то система (11) обладает первым интегралом

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta) = \\
= z_1^2 + \dots + z_n^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const},
\end{aligned} \quad (12)$$

$$V(\alpha, \beta) = V_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} V_{n-k}(\beta_k)$$

$$= -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a) da - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{n-k}(b) db,$$

а также при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0, k = 1, \dots, n-1$, — первыми интегралами (8)–(10).

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $d/dt = f_n(\alpha) d/d\tau$ и фазовых $w_n = z_n, w_{n-1}^* = \ln|w_{n-1}|, w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, w_s^* = \ln|w_s| + \sqrt{1 + w_s^2}, s = 1, \dots, n-2, w_{n-2} = z_2/z_1, \dots, w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}$) фазовый поток системы (1), (3) сохраняет объем на касательном расслоении TM^n , т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема

$$dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1}.$$

3. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Далее несколько модифицируем систему (11) при условиях (4)–(6), а также, для простоты, при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0, k = 1, \dots, n-1$, вводя в нее гладкое силовое поле со знакопеременной диссипацией. Наличие последней характеризуется не только величиной $b\delta(\alpha), b > 0$, в первом уравнении системы (13) (в отличие от системы (11)), но и следующей зависимостью (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^\bullet, k = 1, \dots, n$, соответственно: $z_1 F^1(\alpha), \dots, z_{n-1} F^{n-1}(\alpha), F_n(\alpha) f_n(\alpha) + z_n F_n^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\alpha^\bullet = z_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha),$$

$$z_n^\bullet = F_n(\alpha) f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) (z_{n-1}^2, \dots, z_1^2) + z_n F_n^1(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{n-1} &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \\
&\quad - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)z_{n-2}^2 - \dots \\
&\quad \dots - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1,n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + \\
&\quad + z_{n-1}F^1(\alpha), \dots, \\
\dot{z}_2 &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - \\
&\quad - f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]z_2z_{n-1} - \dots \\
&\quad \dots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots s(\beta_{n-4})[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + \\
&\quad + Dr(\beta_{n-3})]z_2z_3 - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2}) \times \\
&\quad \times \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + z_2F^1(\alpha), \\
\dot{z}_1 &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - \\
&\quad - f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_2) + Dg(\beta_1)]z_1z_{n-1} - \\
&\quad - f(\alpha)g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]z_1z_{n-2} - \dots \\
&\quad \dots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3}) \times \\
&\quad \times [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha), \\
\dot{\beta}_1 &= z_{n-1}f(\alpha), \dot{\beta}_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \dots, \\
\dot{\beta}_{n-1} &= z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots i(\beta_{n-2}).
\end{aligned}
\tag{13}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе (приведем для краткости лишь ее первое уравнение):

$$\begin{aligned}
\alpha^{\bullet\bullet} - \{b\tilde{\delta}(\alpha) + F_n^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha)\}\alpha^{\bullet} - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + \\
+ b\delta(\alpha)F_n^1(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha)\beta_1^{\bullet 2} + \dots \\
+ \Gamma_{n-1,n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,
\end{aligned}$$

$\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$ на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^{\bullet}, \beta_1^{\bullet}, \dots, \beta_{n-1}^{\bullet}; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (13) порядка $2n$ необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых тензорных инвариантов. Однако после следующей замены переменных $w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}$, ..., $w_{n-3} = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $w_{n-2} = z_2/z_1$, $w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}$, $w_n = z_n$, система (13) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha^{\bullet} &= w_n f_n(\alpha) + b\tilde{\delta}(\alpha), \\
w_n^{\bullet} &= F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha), \tag{14} \\
w_{n-1}^{\bullet} &= \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n + w_{n-1}F^1(\alpha), \\
w_s^{\bullet} &= (\pm)w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)g(\beta_1)\dots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\
\beta_s^{\bullet} &= (\pm)\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\dots s = 1, \dots, n-2, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\beta_{n-1}^{\bullet} = (\pm)\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots i(\beta_{n-2}), \tag{16}$$

где в системе (15) символом “...” показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \dots$, зависящая от соответствующего угла β_s .

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (14), по одному — для систем (15) (меняя в них независимые переменные; таких систем $n - 2$ штуки), и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (16) (т.е. всего $n + 1$).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned}
\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha) &= \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \\
\Delta(\alpha) &= \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)},
\end{aligned}
\tag{17}$$

а для некоторых $\lambda_n^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
F_n(\alpha) &= \lambda_n^2 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \\
F_s^1(\alpha) &= \lambda_s^1 f_n(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad s = 1, \dots, n.
\end{aligned}
\tag{18}$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = \dots = F_{n-1}^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \dots = \lambda_{n-1}^1 = \lambda^1$. Условие (17) назовем “геометрическим”, а условия из группы (18) — “энергетическими”.

Условие (17) названо геометрическим, в том числе потому, что накладывает условие на приведенный коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (18) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (17) и (18) на внешнее силовое поле. Тогда система (14)–(16) обладает $n + 1$ независимым, вообще говоря, трансцендентным (т.е. имеющим существенно особые точки) [12, 13] первым интегралом.

Как и следовало ожидать, в общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned}\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= G_1\left(\frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ &= \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b + \lambda^1)w_n\delta(\alpha)f_n(\alpha) - \lambda_n^0\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)f_n(\alpha)} = \\ &= C_1 = \text{const.}\end{aligned}\quad (19)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (14) имеет следующий структурный вид:

$$\begin{aligned}\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= \\ &= G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const.}\end{aligned}\quad (20)$$

Первые интегралы для систем (15) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) &= \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \\ s &= 1, \dots, n-2,\end{aligned}\quad (21)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, см. (9), (9-1). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16), находится по аналогии с (10):

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) &= \\ &= \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n h(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const},\end{aligned}\quad (22)$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_{n-1} , C_n можно подставить левые части первых интегралов (9), (9-1) соответственно.

Выражение функций (19), (20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ дополнительный первый интеграл системы (14) найдется из дифференциального соотношения

$$\begin{aligned}d \ln |\Delta(\alpha)| &= -\frac{(b + u_n)du_n}{U_2(C_1, u_n)}, \quad u_n = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \\ u_{n-1} &= \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}, \quad U_1(u_n) = u_n^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0, \\ U_2(C_1, u_n) &= 2U_1(u_n) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_n)}\}/2, \\ C_1 &\neq 0.\end{aligned}$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. Если для систем вида (14)–(16) выполняются геометрическое и энергетические свойства (17), (18), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие $n+1$ инвариантных дифференциальных форм с

трансцендентными (в смысле комплексного анализа) коэффициентами:

$$\begin{aligned}\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha)dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha, \\ \rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\} \times \\ &\times \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0}{u_{n-1}}, \\ \rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha)dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha, \\ \rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= \Delta(\alpha) \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\int \frac{(b + u_n)du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\}, \\ \rho_{2+s}(w_s; \beta_s) &= \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}}dw_s \wedge d\beta_s, \quad s = 1, \dots, n-2; \\ \rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1})dw_n \wedge \\ &\wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha \wedge d\beta_{n-2} \wedge d\beta_{n-2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-1}, \beta_{n-2}) &= \\ &= \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)}\right\} \cdot \Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}),\end{aligned}$$

но зависящие с первыми интегралами (19)–(22).

Для полной интегрируемости системы (14)–(16) можно использовать или $n+1$ первых интегралов, или $n+1$ независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством $n+1$.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 7, 14]. Заметим, что для таких систем трансцендентность функций (понимаемой не в смысле теории элементарных функций, а в смысле комплексного анализа — наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [4, 13].

В заключение можно сослаться на приложения [14–16], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к n -мерной сфере, а также более общих систем на расслоении n -мерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [17, 18]). При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [19, 20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912. 340 pp.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Шамолин М.В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
16. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
17. *Трофимов В.В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
18. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.
19. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
20. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.

INVARIANT FORMS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON TANGENT BUNDLE OF FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLD

M. V. Shamolin^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

As is well-known [1–3], finding a sufficient number of tensor invariants (not only the first integrals) allows you to accurately integrate a system of differential equations. For example, the presence of an invariant differential form of the phase volume makes it possible to reduce the number of required first integrals. For conservative systems, this fact is natural, but for systems with attractive or repulsive limit sets, not only some first integrals, but also the coefficients of the available invariant differential forms should, generally speaking, include functions with essentially special points (see also [4–6]). In this paper, complete sets of invariant differential forms for homogeneous systems on tangent bundles to smooth finite-dimensional manifolds are presented for the class of dynamical systems under consideration.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, tensor invariant

УДК 531.38

ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

© 2023 г. Ю. Ф. Голубев^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 02.02.2023 г.

После доработки 20.04.2023 г.

Принято к публикации 05.05.2023 г.

Предложен обобщенный метод поиска оптимального управления амплитудой одномерных колебаний в окрестности положения равновесия для склерономной многомерной механической системы с трением. Колебательная степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На ее движение влияют другие, непосредственно управляемые степени свободы. В число непосредственно управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не использует сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность исходной системы дифференциальных уравнений движения. На примере конкретной колебательной механической модели с сухим и вязким трением продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

Ключевые слова: механическая система, колебания, амплитуда, управление, оптимизация, трение

DOI: 10.31857/S2686954323600052, **EDN:** PKNCIY

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В связи с развитием мобильных робототехнических устройств значительное внимание исследователей уделяется разработке теории механических систем с дефицитом управления [1–4]. Для синтеза управления такими системами, как правило, применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина [5, 6], разработанный для весьма общего класса динамических систем. Вместе с тем системы с одной, не снабженной приводом, степенью свободы встречаются повсеместно и чаще всего, когда имеется необходимость опираться при движении на окружающие предметы. Здесь привлекательным представляется оптимальное использование маятниковых элементов движений, возникающих из-за воздействия естественных сил, таких как, например, сила тяжести. Для подобных систем возможно применение более простых по сравнению принципом максимума методов, основанных на вычислении первой вариации функционала [7–9]. В работах [10, 11] даны уточненные формулировки и упрощенные доказательства результатов, полученных в [8, 9] для консервативных систем. Ниже изучаются неконсервативные системы с одной дефицитной степенью

свободы, и доказываем, что представленные в [10, 11] методы работают и в этом случае.

Рассматривается склерономная голономная механическая система с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где n — число степеней свободы системы, q_i — обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ — обобщенные скорости, а положительно определенная симметричная матрица (a_{ij}) зависит от обобщенных координат. Уравнения движения системы запишем в форме уравнений Лагранжа 2 рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

в которых t — время, Q_i — обобщенные силы. В отличие от работ [8–11] здесь обобщенные силы могут содержать компоненты, связанные с наличием трения в системе и зависящие от обобщенных скоростей. Пусть первая обобщенная координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщенные силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой x : $q_1 = x$. Представим обобщенную силу Q_1 в виде суммы

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: golubev@keldysh.ru

$$Q_1 = Q_x = F(x, q_2, \dots, q_n) + R(\dot{x}, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, x, q_2, \dots, q_n), \quad (1.2)$$

где позиционная сила F , зависит только от x и других обобщенных координат. Сила трения R препятствует изменению координаты x и зависит как от обобщенных скоростей, так и от обобщенных координат.

Пусть первыми в наборе $(q_2, \dots, q_n)$ идут $s-1$ координат, от которых обобщенная сила F зависит явно. Остальные $(n-s)$ координат не входят явно в выражение для F . Все координаты переобозначим: $u_j = q_{j+1}$, $j = \overline{1, s-1}$ и $w_k = q_{s+k}$, $k = \overline{1, n-s}$, причем $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$ — вектор координат, непосредственно влияющих на значение F , $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$ — вектор координат, от которых F явно не зависит, так что, $\partial F / \partial w_k = 0$, $k = \overline{1, n-s}$. В число w -координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{x}^2 + 2\dot{x} \left(\sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где

$$T^*(x, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,s+k} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{s+k,s+r} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

Следуя работам [8–11], в системе (1.1) выделим уравнение для координаты x :

$$\frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}) + R(\dot{x}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, x, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.3)$$

Примем координату x в качестве независимой переменной на участке ее монотонного возрастания: $\dot{x} > 0$ и обозначим $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$, $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$, вектор управляющих координат и их производных по координате x . Тогда $t = t(x)$, а уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] - p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

где

$$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k,$$

$$p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y})}{\partial x} - (t')^2 R(\dot{x}, x, \mathbf{y}),$$

причем $t'(x) = dt/dx = \dot{x}^{-1}$. Будем считать, что векторы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$ каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\begin{aligned} |u_j^m| \leq u_j(x) \leq u_j^M, & \quad |w_k^m| \leq w_k(x) \leq w_k^M, \\ |\dot{u}_j^m| \leq \dot{u}_j(x) \leq \dot{u}_j^M, & \quad |\dot{w}_k^m| \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M, \\ j = \overline{1, s-1}, & \quad k = \overline{1, n-s}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщенные силы $Q_2, \dots, Q_n$ вычисляются в соответствии с уравнениями (1.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ реализовались. Предположим, что это сделано, так что ограничения (1.5) удовлетворяются, и можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y}) \dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] \right\} dx = 0, \quad (1.6)$$

где x_0 — начальное значение независимой переменной x , $\lambda(x, \mathbf{y})$ — любая функция. Уравнение (1.6) эквивалентно уравнению (1.4). Заметим, что если $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$, то уравнение (1.4) допускает интегрирующий множитель. Выберем его в качестве λ :

$$\lambda = f(x, \mathbf{y}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \dot{x}, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right), \quad f(x, \mathbf{y}) \neq 0. \quad (1.7)$$

Тогда равенство (1.6) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} [\dot{x}^2 f(x, \mathbf{y}) \lambda(x, \mathbf{y})] \Big|_{x_0}^x = 0$$

или

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \\ = \frac{1}{2} [f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})] \Big|_{x_0}^x, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned}
& f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}) = \\
& = a_{11}\dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1}\dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}\dot{w}_k, \\
& \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \\
& = f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{2p(t', x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right).
\end{aligned} \quad (1.9)$$

В том случае, когда $\dot{x} = \dot{x}(x)$ обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.8) становится несобственным из-за того, что при $\dot{x} = 0$ значения $t' = 1/\dot{x}$, $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}}/\dot{x}$ и $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}}/\dot{x}$ могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.8) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные f^* и λ^* не содержат отмеченной особенности.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (1.10)$$

имеет изолированный максимум по координате x при $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$ и этот максимум остается изолированным, когда $\mathbf{u}(\tau)$ меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$ выполнено, когда $x = x_0$. Назовем амплитудой колебаний величину $J = x_1 - x_0$, где $x_1 > x_0$ — следующее значение координаты x , когда $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$ обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$ будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$. На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0. \quad (1.11)$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$, при которых достигается максимум (минимум) функционала J .

В работах [8, 9] с помощью замены $\xi = -x$ показано, что участок, где $\dot{x} < 0$ (монотонное убывание координаты x) вполне аналогичен участку монотонного возрастания этой координаты с той лишь разницей, что вместо максимума (минимума) функционала J надо искать его минимум (максимум).

2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСКАЧИВАНИЕ (УСПОКОЕНИЕ) КОЛЕБАНИЙ

Справедливы следующие теоремы (их формулировки, по существу, совпадают с формулировками работы [11]). Для удобства применения их в

рассмотренном ниже примере приведем здесь эти формулировки.

Теорема 1. (Принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.3) и существуют две точки x_0 и x_1 , причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), обеспечивают максимум величины x_1 , служат уравнения

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_M(x_1) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают минимум величины x_0 , служат уравнения

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_m(x_0) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

Теорема 2. (Принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.3) и имеются две точки x_0 и x_1 , такие, что $x_0 < x_1$ $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Тогда

I. Необходимое условие оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$, $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_0 обеспечивают минимум величины x_1 , выражается равенствами

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_m) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_m(x_1) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$.

II. Необходимые условия оптимальности управлений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$, $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$, которые, будучи стесненными ограничениями (1.5), при фиксированном значении x_1 обеспечивают максимум величины x_0 , выражаются уравнениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{y}_M) F(x, \mathbf{u})], \\
\dot{\mathbf{w}}_M(x_0) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right],
\end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$.

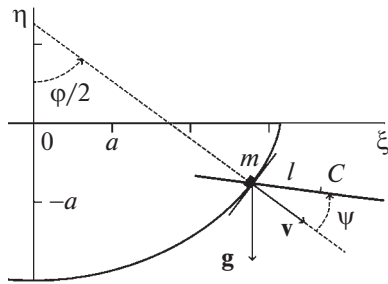


Рис. 1. Колебательная система.

Доказательства приведенных теорем дословно совпадают с соответствующими доказательствами, приведенными в работе [11], поскольку функция f от трения явно не зависит, а влияние трения сказывается лишь на функции p , которая в формуле (1.7) входит в выражение для экспоненты и поэтому на процесс оптимизации не влияет.

Следствие. Правило (синтез) выбора оптимального управления раскачиванием не зависит от наличия трения в системе. От трения зависит лишь результат применения этого правила в каждом конкретном случае.

Доказательство. Поиск оптимального управления осуществляется в соответствии с формулами (2.1)–(2.4), в которые информация о трении явным образом не входит.

Замечание 1. Трение влияет на зависимость функций управления от времени.

Замечание 2. Приведенные теоремы справедливы в предположении, что функция $f \neq 0$. По существу, она представляет собой коэффициент при старшей производной в уравнении (1.4). Обращение ее в нуль свидетельствует о том, что при выбранном законе управления для заданных параметров системы происходит вырождение. Часто вырождение происходит потому, что динамические параметры управляющих частей системы превосходят динамические характеристики управляемой ее части. Тогда соответствующей настройкой параметров системы будет возможно устранить указанную неприятность. При невозможности настройки параметров вырождение также можно исключить переходом к классу кусочно-постоянных функций, разбивая процесс интегрирования на отрезки с сохранением непрерывности фазовых координат. На каждом таком отрезке производные от управляющих функций будут равны нулю, и будет выполнено $f = a_{11} > 0$. Таким образом, можно будет построить последовательность кусочно постоянных функций, дающую приближенное представление об оптимальном решении.

3. ПРИМЕР. МАЯТНИК С ТОЧКОЙ ПОДВЕСА НА ПЕРЕВЕРНУТОЙ ЦИКЛОИДЕ

Твердое тело, имеющее массу m и центральный момент инерции I_b , движется плоскопараллельно с сухим и вязким трением в вертикальной плоскости так, что его центр масс скользит по перевернутой циклоиде (брахистохроне). Тело вращается, отслеживая касательную к траектории центра масс. К этому телу в его центре масс подвешен стержень, имеющий массу M и центральный момент инерции I_r . Относительно тела стержень способен совершать колебания в той же плоскости. Требуется, управляя движением стержня, заставить тело m двигаться по циклоиде с возрастающей амплитудой колебаний в окрестности нижней точки циклоиды. Обозначим l расстояние от центра масс C стержня до точки подвеса. Пусть $\mathbf{v}$ — внешняя нормаль к циклоиде в точке подвеса стержня, а ψ — угол между вектором $\mathbf{v}$ и стержнем. Угол ψ примем в качестве управления с целью раскачивания системы (рис. 1).

Для описания движения введем абсолютную право-ориентированную декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$. Ось $O\eta$ направим вертикально вверх. Ось $O\xi$ расположим в плоскости движения. Тогда ось $O\zeta$ будет перпендикулярна указанной плоскости. Уравнение перевернутой циклоиды представим в виде

$$\xi = a(\varphi + \sin \varphi), \quad \eta = -a(1 + \cos \varphi), \\ \zeta = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

где $a > 0$ — постоянная, а φ — обобщенная координата, задающая положение точки m на циклоиде. Циклоида выпукла вниз. Ее внешняя нормаль $\mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta, 0)$ имеет координаты

$$v_\xi = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad v_\eta = -\cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ образует с отрицательным направлением оси $O\eta$ угол $\varphi/2$.

Система уравнений Лагранжа записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(A_\psi \dot{\varphi} + B_\psi \dot{\psi}) + C_\psi = -Mgl \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + Q_\psi, \\ \frac{d}{dt}(A_\varphi \dot{\varphi} + B_\varphi \dot{\psi}) + C_\varphi = \\ = -(m + M)ga \sin \varphi - \frac{Mgl}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) + R, \quad (3.1)$$

где

$$A_\psi = 2Mla \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2},$$

$$\begin{aligned}
B_\psi &= Ml^2 + I_r, \\
C_\psi &= 2Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi. \\
\left\{ \begin{aligned} A_\varphi &= 4(m+M)a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \\ &+ 2Mla\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + \frac{Ml^2 + I_r}{2} + \frac{I_b}{4}, \\ B_\varphi &= 2Mla\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + Ml^2 + I_r, \\ C_\varphi &= \left[(m+M)a^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \right. \\ &\left. + Mla\dot{\varphi}\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\cos\psi\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right], \end{aligned} \right. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Q_ψ – обобщенная сила, управляющая углом ψ , R – обобщенная сила, учитывающая воздействие сухого и вязкого трения.

Следует отметить, что коэффициенты (3.2) при $I_b = 0$ отличаются от соответствующих неправильных коэффициентов, полученных в статье [11], а также в связанной с ней переводной версией журнала «Computer and Systems science international» из-за неточности, допущенной при выводе уравнений движения. В настоящей работе эта погрешность исправлена. Ошибка ни на что не повлияла, так как цель примера в упомянутых работах состояла в лишь том, чтобы продемонстрировать технику применения теорем в общем случае сколько-нибудь сложной системы дифференциальных уравнений.

Из уравнений (3.1) видно, что при $Q_\psi = 0$ и отсутствии трения система имеет положения равновесия, когда

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) = 0, \quad \sin\varphi = 0. \quad (3.3)$$

В допустимых пределах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ условиям (3.3) соответствуют значения $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. Очевидно, что при $\varphi = 0$ достигается нижнее устойчивое положение равновесия (нулевое положение равновесия), а при $\varphi = \pm\pi$ достигаются два верхних неустойчивых положения равновесия по краям циклоиды. Первое условие (3.3) означает, что в положениях равновесия стержень должен быть направлен вертикально вниз.

Перейдем к анализу оптимальных законов раскачивания маятника. В уравнениях (3.1) в качестве управляющей координаты выбирается угол ψ . Для простоты анализа не будем накладывать никаких ограничений на величину и скорость изменения угла ψ . В соответствии с уравнением (1.4) получим $f = A_\varphi + B_\varphi\psi'$, где ψ' – производная по φ . Знак множителя λ , вычисляемого по формуле (1.7), совпадает со знаком функции f .

Правая часть второго уравнения (3.1) зависит от угла ψ . Оптимизируемая по величине ψ функция в формулировке теорем 1 и 2 принимает вид

$$\begin{aligned}
\chi(x, y)F(x, u) &= \Phi = \\
&= -\chi\left[(m+M)ga\sin\varphi + \frac{Mgl}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right)\right]. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Экстремальные значения функции Φ достигаются при

$$\psi = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \rightarrow \psi' = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для указанных экстремалей будем иметь

$$\begin{aligned}
f &= A_\varphi - \frac{B_\varphi}{2} = \\
&= Mal\left[2b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \pm \sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{I_b}{4}, \quad (3.5) \\
b &= \frac{2(M+m)a}{Ml}.
\end{aligned}$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\left[2b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \pm \sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} = \\
&= \min\left(b + b\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = b - \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Если принять

$$\frac{I_b}{Mal} > 2(\sqrt{4b^2 + 1} - 2b), \quad (3.6)$$

то коэффициент $\chi > 0$. Воспользовавшись рекомендацией замечания 2, будем в дальнейшем считать условие (3.6) выполненным.

Применим утверждение I теоремы 1. Пусть $\varphi_0 < 0$ есть левая граница отклонения по углу φ , а $\varphi_1 > 0$ – соответственно правая граница, и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Из формулы (2.1) видно, что наилучший способ достичь максимума положительного полуколебания состоит в применении правила

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.7)$$

Геометрический смысл полученного закона управления состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярен к вертикальной оси и составлять с горизонтальной осью развернутый угол, обеспечивая максимальное значение силового момента.

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда, напротив, требуется минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (2.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума

отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.8)$$

Геометрический смысл закона управления (3.8) состоит в том, что стержень должен быть перпендикулярным к вертикальной оси и сонаправленным с горизонтальной осью, обеспечивая минимальное значение силового момента.

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.8); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулу (3.7), и так далее. Таким образом, при достижении экстремальных отклонений маятника стержень должен мгновенно поворачиваться на развернутый угол. Естественно, что в реальности такой скачок по координате невозможен, и его следует рассматривать как предел, когда время переходного процесса стремится к нулю.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний маятника, а именно: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулу (3.7); после достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулу (3.8), и так далее.

После того, как зависимость $\psi(\varphi)$ установлена, второе уравнение системы (3.1) становится замкнутым, и его можно решать различными известными методами [12]. После определения функции $\varphi(t)$ становится возможным из первого уравнения (3.1) найти обобщенную силу Q_ψ , обеспечивающую требуемое изменение угла ψ .

Если $\dot{\varphi} \neq 0$, то для законов управления (3.7), (3.8) сила трения может быть представлена формулой

$$R = -2a(M + m) \times \\ \times [(a\dot{\varphi}^2 + g)f_r \operatorname{sgn} \dot{\varphi} + 2ak_r\dot{\varphi}] \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (3.9)$$

в которой f_r и k_r – коэффициенты сухого трения скольжения и вязкого трения соответственно. Тем самым принимается во внимание трение лишь между телом m и циклоидой, а в шарнире стержня трение должно быть компенсировано управляющей силой Q_ψ . Заметим, что сухое трение скольжения квадратично зависит от $\dot{\varphi}$ из-за влияния центробежной силы. Если $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, то на систему будет действовать сухое трение покоя.

Наличие сухого трения осложняет картину положений равновесия. Если управления нет, то в окрестности точки $\varphi = 0$ возникает множество положений равновесия (зона застоя) из-за дей-

ствия силы трения покоя. Тогда условия равновесия в окрестности $\varphi = 0$ принимают вид

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \psi\right) = 0, \quad -f_r \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \leq f_r. \quad (3.10)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Уравнения (3.1) с учетом формулы (3.9) и раскачивающих законов управления (3.7) и (3.8) можно представить в виде:

$$\ddot{\varphi}A - \dot{\varphi}^2B = \\ = \begin{cases} \frac{g}{2a}(1 - b \sin \varphi) - \\ - \frac{b}{2}(1 + \cos \varphi) \left[f_r \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a} \right) + 2k_r\dot{\varphi} \right], & \dot{\varphi} > 0, \\ - \frac{g}{2a}(1 + b \sin \varphi) + \\ + \frac{b}{2}(1 + \cos \varphi) \left[f_r \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a} \right) - 2k_r\dot{\varphi} \right], & \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где

$$A = \begin{cases} b(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\varphi} > 0, \\ b(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{I_b}{4Mal}, & \dot{\varphi} < 0, \end{cases} \\ B = \begin{cases} \frac{1}{2}(b \sin \varphi + \cos \varphi), & \dot{\varphi} > 0, \\ \frac{1}{2}(b \sin \varphi - \cos \varphi), & \dot{\varphi} < 0. \end{cases}$$

Когда оказывается, что $\dot{\varphi} = 0$, то это означает, что достигнуто максимальное значение отклонения тела m от нулевого положения равновесия, и в этот момент в формулах (4.1) происходит альтернативное переключение знаков. В начальный момент t_0 времени задается $\dot{\varphi} = \varphi = 0$, а управление выбирается так, как если бы $\dot{\varphi}(t_0 - 0) < 0$.

Учет трения покоя выполняется по формуле

$$\dot{\varphi} = 0 \quad \text{при} \\ \begin{cases} \dot{\varphi} = 0, & \dot{\varphi} > 0, & |1 + b \sin \varphi| < bf_r(1 + \cos \varphi), \\ \dot{\varphi} = 0, & \dot{\varphi} \leq 0, & |1 - b \sin \varphi| < bf_r(1 + \cos \varphi), \end{cases} \quad (4.2)$$

из которой, в частности, следует, что если $2bf_r > 1$, то тело m вообще не сможет начать движение.

Представим центральный момент инерции тела в виде $I_b = mr^2$, где ρ – радиус инерции тела. Дополнительно введем безразмерные параметры системы:

$$M = \mu m, \quad l = \sigma a, \quad \rho = \varepsilon a, \\ b = \frac{2(\mu + 1)}{\mu \sigma}, \quad \frac{I_b}{Mal} = \frac{\varepsilon^2}{\mu \sigma}. \quad (4.3)$$

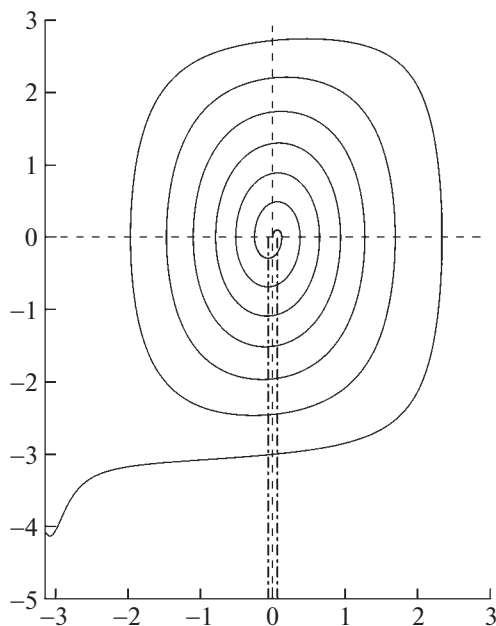


Рис. 2. Фазовый портрет при $f_r = k_r = 0$.

На рис. 2 показан фазовый портрет системы для следующего набора независимых параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0,25$, $\varepsilon = \sqrt{0,5}$, $f_r = 0$, $k_r = 0$. На всех фазовых портретах, представленных ниже, по горизонтальной оси откладываются значения параметра φ , а по вертикальной оси значения скорости $\dot{\varphi}$. Пунктиром выделены оси, проходящие через начало координат, а также положения равновесия при отклоненном стержне от вертикали, соответствующие значениям $\varphi_1 = -\varphi_3 = \arcsin(1/b) \approx 0.0625$. Видно, что описанный в п. 3 алгоритм раскачивания системы успешно справляется с задачей увеличения амплитуды колебаний вплоть до достижения предельно возможных значений угла φ .

На рис. 3 представлен фазовый портрет системы, для которого по сравнению с параметрами, принятыми для рис. 2, изменен только коэффициент вязкого трения: $k_r = 0,1$. Видим, что даже сравнительно небольшое вязкое трение препятствует неограниченному увеличению амплитуды, уменьшая приращения амплитуды на каждом следующем цикле управления.

При выполнении расчетов, связанных с оценкой влияния сухого трения, необходимо учитывать трение покоя. В соответствии с формулами (4.2) движение тела m из нулевого положения равновесия может начаться вследствие качания стержня лишь тогда, когда выполнено соотношение $2bf_r < 1$. Если взять параметры, принятые выше для оценки влияния вязкого трения: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $\mu = 1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = \sqrt{0,5}$, то получим огра-

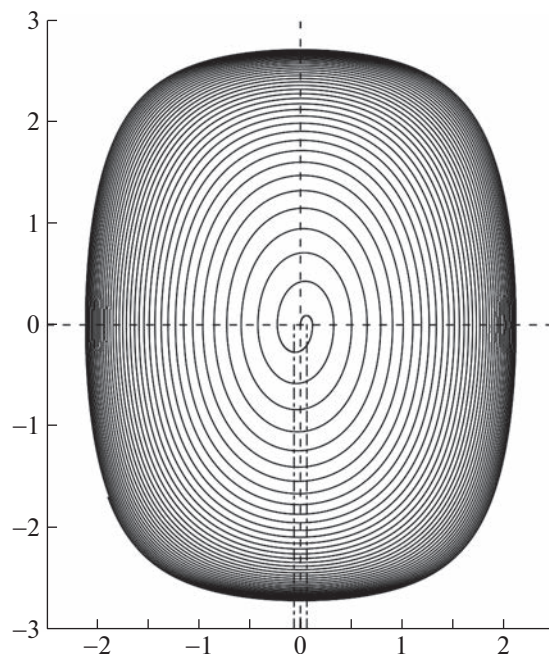


Рис. 3. Вязкое трение ($f_r = 0$, $k_r = 0.1$).

ничение $\sigma > 8f_r$. Таким образом, при $\sigma = 0.25$ должно быть $f_r < 0.03125$. На рис. 4 показан фазовый портрет системы для значений $f_r = 0.025$, $k_r = 0$. Остальные параметры соответствуют ранее рассмотренным вариантам. При сравнении с рис. 2, 3 видно, что наличие сухого трения приводит к тому, что амплитуда колебаний увеличивается медленнее, и приращения амплитуды не уменьшаются от цикла к циклу управления, указывая на отсутствие предельно большой конечной амплитуды. Следовательно, в кинематически допустимых пределах маятник с таким трением можно раскачать до любой заданной амплитуды. Однако процесс раскачивания будет замедленным. Ускорить процесс раскачивания под действием влияния сухого трения можно, увеличивая длину стержня.

Если трение отсутствует, то в силу консервативности системы прекращение управления влечет сохранение амплитуды колебаний. В присутствии трения такой способ сохранения амплитуды невозможен. Вместе с тем трение можно использовать для полупассивного поддержания амплитуды колебаний в некотором диапазоне значений. На рис. 5 изображена диаграмма Пуанкаре системы, соответствующая параметрам $\sigma = 0.25$, $f_r = 0.025$, $k_r = 0$. На ней по горизонтальной и по вертикальной осям откладываются соответственно предыдущие и последующие значения амплитуды. Логика поддержания заданной амплитуды, равной 0.5, состояла в том, что при превышении значения 0.5 модуля амплитуды в

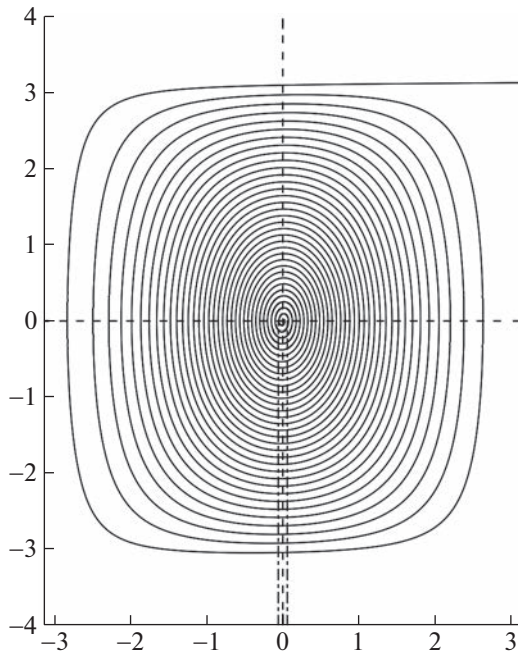


Рис. 4. Сухое трение ($f_r = 0.025$, $k_r = 0$).

моменты достижения значений скорости $\dot{\varphi} = 0$ оптимальное увеличение амплитуды прекращалось, стержень приводился в вертикальное положение вдоль отрицательного направления оси $O\eta$ ($\psi + \varphi/2 = 0$), и в таком положении оставался до того момента, когда амплитуда становилась меньше значения 0.5. После этого снова возобновлялся оптимальный разгон маятника. На рисунке видно, что сначала происходит монотонное увеличение амплитуды, а затем включается описанная выше логика поддержания амплитуды в районе значения 0.5. Участки диаграммы, расположенные ниже биссектрисы координатного угла, соответствуют торможению, а участки диаграммы, расположенные выше — разгону. Диапазон получающихся амплитуд приблизительно составляет 0.1. Регулировка ширины реализуемого диапазона значений амплитуды может быть обеспечена посредством изменения длины стержня.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены лаконичные необходимые условия оптимального управления колебаниями для голономных механических систем с сухим и вязким трением и с дефицитом управления по одной степени свободы. Применение алгоритмов управления, получаемых из необходимых условий оптимальности (2.1)–(2.4), предполагает учет информации о достижении экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полукоса колебания. Условия оптимальности (2.1)–(2.4) не

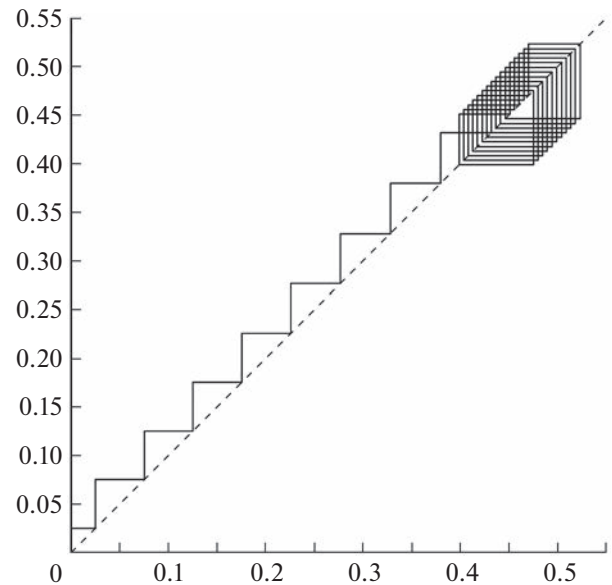


Рис. 5. Управление по амплитуде.

содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [5]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Показано, что наличие трения не влияет на правило выбора оптимального управления. Трение влияет лишь на результат применения этого правила в каждом конкретном случае. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. Эти условия упрощают решение соответствующих задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний. Рассмотренный в работе пример иллюстрирует особенности применения предложенного метода в системах с трением и демонстрирует технику учета трения покоя в колебательных системах. Отмечено, что линейное по скорости вязкое трение ограничивает достижимые значения амплитуды, а сухое Кулоновское трение такой особенностью не обладает, но замедляет развитие процесса, а при значительном коэффициенте трения препятствует возникновению требуемых колебаний. Предложен метод, использующий трение для поддержания амплитуды колебаний в окрестности ее заданного значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. Перевод с франц. Ижевск: К-Динамика, 2012. 312 с. ISBN 978-5-906268-01-3.
2. *Tad McGeer.* Passive Dynamic Walking. *International Journal of Robotics Research.* April, 1990. V. 9. № 2. P. 62–82, April, 1990.
3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 232 с. ISBN 978-5-9221-1460-8.
4. *Климина Л.А., Формальский А.М.* Об оптимальном раскачивании качелей стоящим на них человеком // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 6. С. 85–94. ISSN: 0002-3388. <https://doi.org/10.31857/S0002338822060117>
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.
6. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 384 с.
7. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. М.: Гос. Изд-во технико-теор. лит-ры. (Успехи физических наук. Т. 63. Вып. 1а). 1957. С. 5–32.
8. *Голубев Ю.Ф.* Метод оптимального управления колебаниями механических систем // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2021. № 33. 37 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-33>, <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-33>
9. *Golubev Yu.F.* Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems. // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42. № 11. P. 2596–2607. ISSN: 1995-0802. <https://doi.org/10.1134/S199508022111010X>
10. *Голубев Ю.Ф.* Оптимизация колебаний механических систем // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления.* 2022. Т. 502. С. 52–57. ISSN (PRINT): 2686-9543. <https://doi.org/10.31857/S2686954322010040>
11. *Голубев Ю.Ф.* Управление амплитудой колебаний механических систем // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 4. С. 22–30. ISSN: 0002-3388. <https://doi.org/10.31857/S0002338822040084>
12. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. 11, испр., обновл. М.: URSS. 2016. 512 с. ISBN 978-5-382-01622-1

OPTIMIZATION OF OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH FRICTION

Yu. F. Golubev^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A generalized method for finding optimal control of the amplitude of one-dimensional oscillations in the vicinity of the equilibrium position for a scleronomous multidimensional mechanical system with friction is proposed. The oscillatory degree of freedom of the system does not lend itself to direct control. Its movement is influenced by other, directly controlled degrees of freedom. They are being chosen as the control functions. The number of directly controlled coordinates can include both positional and cyclic coordinates. The method does not use conjugate variables in the sense of the Pontryagin's maximum principle and does not increase the dimension of the original system of differential equations of motion. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the example of a specific oscillatory mechanical model with dry and viscous friction.

Keywords: mechanical system, oscillations, amplitude, control, optimization, friction

УДК 51-74; 538.93

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА ЖИДКОСТЕЙ

© 2023 г. В. Я. Рудяк^{1,2,*}, Е. В. Лежнев^{1,2,**}

Представлено академиком РАН В.М. Фоминым

Поступило 10.03.2023 г.

После доработки 24.03.2023 г.

Принято к публикации 27.07.2023 г.

Развит метод стохастического молекулярного моделирования (СММ) коэффициентов переноса жидкостей. Они вычисляются с помощью флуктуационно-диссипационных теорем, но в отличие от метода молекулярной динамики (МД) фазовые траектории системы имитируются стохастически. Действующая на молекулу сила определяется стохастически с помощью созданной базы данных межмолекулярных сил. Эффективность метода продемонстрирована на примере расчета коэффициентов переноса нескольких жидкостей. Показано, что метод СММ требует для расчета значительно меньше вычислительных ресурсов, чем метод МД.

Ключевые слова: жидкость, коэффициенты переноса, молекулярное моделирование, стохастическое моделирование

DOI: 10.31857/S2686954322600495, **EDN:** RJPALO

Обычно течения газов и жидкостей описываются уравнениями переноса, применение которых требует знания коэффициентов переноса. Последовательная молекулярная теория, позволяющая рассчитать эти коэффициенты, разработана лишь для разреженных газов [1]. Неравновесная статистическая механика дала явные формулы для коэффициентов переноса [2–4] жидкостей, но их расчет требует решения задачи многих тел. До сих пор поэтому на практике для определения соответствующих коэффициентов переноса используют экспериментальную информацию или различные корреляции (см., например, [5]), если такой информации нет.

Альтернативой является численное моделирование коэффициентов переноса, реализованное с помощью метода МД [6–11]. Этот метод с успехом используется в физике, химии, биологии и механике, но имеет и известные недостатки. Он требует значительных вычислительных ресурсов и, строго говоря, не воспроизводит истинных ньютоновских фазовых траекторий моделируемой системы. Последнее связано с локальной неустойчивостью рассчитываемых фазовых траек-

торий относительно малых возмущений и перемешиванием [3, 10, 11]. Это то, что в литературе принято называть динамическим хаосом (см., например, [12, 13]). Но поскольку в методе МД имеют место многочисленные ошибки (ошибки округления, ошибки, связанные с использованием тех или иных схем численного интегрирования уравнений Ньютона, ошибки, обусловленные конечным размером расчетной ячейки и использованием периодических граничных условий и т.п.), наличие локальной неустойчивости приводит к тому, что метод МД не дает истинных ньютоновских фазовых траекторий моделируемой системы. В связи с этим в работах [14–21] был предложен метод СММ коэффициентов переноса разреженного газа. В этом методе фазовые траектории моделировались стохастически. Это удалось сделать, поскольку в разреженном газе имеют место лишь парные соударения молекул, и кинетическая теория позволяет определить их вероятность. С помощью этого метода были рассчитаны с достаточно высокой точностью (не ниже точности получения соответствующих экспериментальных данных) различные коэффициенты переноса (самодиффузии, диффузии, вязкости, теплопроводности). Рассматривались как одноатомные, так и многоатомные газы.

Для моделирования процессов переноса в плотных газах метод СММ можно использовать только для систем твердых сфер, где также имеют место лишь парные соударения молекул (это так

¹ Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Россия

² Институт теплофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: valery.rudiyak@mail.ru

**E-mail: lionlev@yandex.ru

называемый газ Энскога) [1]. Это было сделано [15]. В жидкостях механизмы процессов переноса гораздо сложнее. Строго говоря, в жидкостях процессы переноса не сводятся к простому молекулярному переносу как в газах разреженных или к суперпозиции молекулярного переноса на длинах свободного пробега и характерного размера молекул, как в газе Энскога. Простые оценки показывают, что в жидкости нейтральных молекул с короткодействующими потенциалами в сфере взаимодействия молекулы находится с десятков молекул. Взаимодействие молекул в жидкости всегда многочастичное. Цель данной работы состоит в развитии идей работ [14–21] на случай жидкости.

1. Методами неравновесной статистической механики установлено, что коэффициенты переноса μ_i определяются флуктуационно-диссипационными теоремами (в литературе их принято называть формулами Грина–Кубо [2, 3, 9])

$$\mu_i = \int_0^{\tau} dt_1 \chi_i(t, t_1), \quad (1)$$

которые связывают коэффициенты переноса μ_i с эволюцией соответствующих двухвременных корреляционных функций χ_i . Здесь τ – платовое значение, по достижении которого и получается измеримое значение коэффициента переноса.

Для расчета корреляционных функций необходима информация о динамических переменных моделируемой системы в последовательные моменты времени, которые получаются в результате решения уравнений Ньютона. Это требует последовательного определения сил, действующих на каждую молекулу. Ситуация существенно упростится, если появится инструмент не определения на каждом шаге этих сил, а их задания. Исходным пунктом построения такого инструментария является гипотеза о некоторой универсальности в среднем сил, действующих на каждую молекулу в жидкости. Для того чтобы задать силы тем или иным способом, необходимо иметь соответствующую базу данных. В данной работе база данных межмолекулярных сил строилась с использованием метода МД. Выбиралась некоторая молекулярная система с плотностью жидкости. Межмолекулярное взаимодействие задавалось потенциалом Леннарда–Джонса

$$U(r) = 4\epsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6], \quad (2)$$

параметры которого варьировались в широких пределах.

При моделировании в файле базы данных сохраняются значения сил, действующих на каждую молекулу в последовательные моменты времени. База данных построена с использованием стандартного пакета LAMPS. В ячейке моделиро-

вания было 64000 молекул при атмосферном давлении и заданной температуре. Расчет начинался после некоторого начального релаксационного процесса для достижения равновесия в системе, которое проверялось различными способами, в частности, распределение молекул по скоростям должно было быть максвелловским. Уравнения Ньютона решались с использованием схемы Верле. Использовался NVT ансамбль, хотя для определения объема ячейки применялся NPT ансамбль. При заданных параметрах потенциала (2) и температуре она содержит около 200 млн значений сил, действующих на молекулу.

Эту базу данных можно использовать непосредственно, но для оптимизации расчетов была построена соответствующая функция распределения. Пример такой функции распределения сил P для жидкого аргона при атмосферном давлении и температуре $T = 87$ К приведен на рис. 1а (сплошная линия). Здесь сила, действующая на молекулу i , задана в единицах Ккал/моль-Å, или в ньютонах: $F_{iy} = F_{iy} \times 1.984 \times 10^{-13}$ Н ($y = x, y, z$). Функция распределения построена с шагом 0.00344 в диапазоне от -10 до 10 . Таким образом, хвосты функции распределения соответствуют высокоэнергетическим взаимодействиям. Функция распределения позволяет в любой момент времени разыграть силы, действующие на молекулу и тем самым последовательно имитировать динамику системы. Во всех случаях с достаточно высокой точностью (около 3%) полученные распределения моделируются функцией гиперболического тангенса

$$P = (thaF_{iy} + 1)/2, \quad (3)$$

где a – некоторый параметр. На рис. 1а эта функция при $a = 1$ представлена штриховой линией.

Моделирование базы данных межмолекулярных сил функцией гиперболического тангенса хороший рецепт, позволяющий ее использовать в методе СММ. Однако эта функция однопараметрическая. В частности, варьирование параметров межмолекулярного потенциала (1) будет приводить к изменению функции распределения сил. На рис. 1б приведено сравнение функций распределения межмолекулярных сил для аргона и криптона при одинаковой температуре. Здесь использовались следующие параметры для потенциала (1): для аргона $\sigma = 0.3405$ нм, $\epsilon/k = 119.8$ К и для криптона $\sigma = 0.351$ нм, $\epsilon/k = 190$ К [22] (k – постоянная Больцмана).

Описанный алгоритм аппроксимации функции распределения межмолекулярных сил оригинален. Вместе с тем очевидна и появляющаяся проблема. База данных была создана на основе двух простых жидкостей – аргона и криптона. Ясно, однако, что полученные силы будут зависеть от типа жидкости, т.е. от параметров межмолеку-

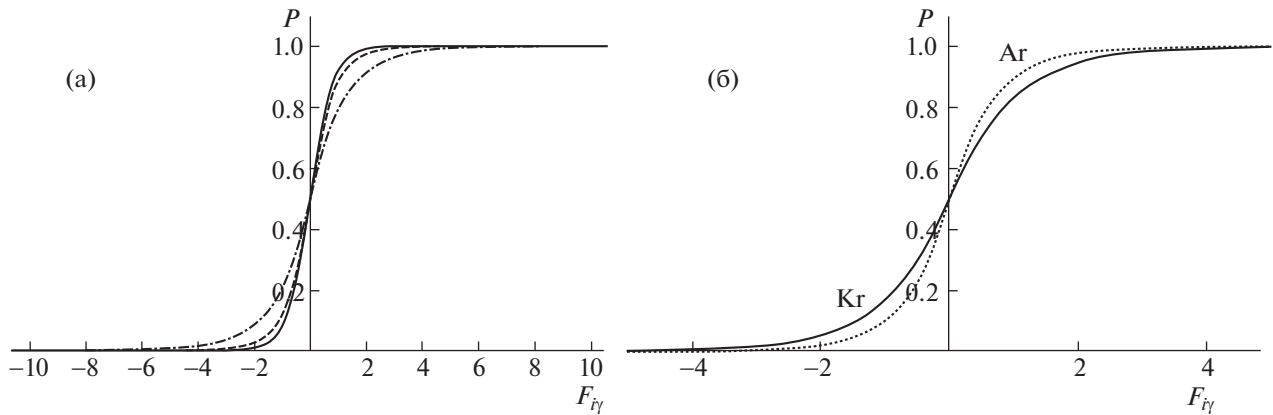


Рис. 1. (а) Функция распределения межмолекулярных сил аргона при двух температурах; (б) Сопоставление функций распределения межмолекулярных сил криптона и аргона.

лярных потенциалов, и от температуры. Для использования базы данных межмолекулярных сил в практических целях необходима ее определенная универсальность. Это требует найти зависимость параметра a в (3) и от температуры, и от параметров потенциала (1). Чтобы определить характер зависимости параметра a от температуры и параметров потенциала (1), были выполнены систематические МД расчеты, в которых варьировались параметры потенциала (1) и температура. Параметр σ изменялся от 0.170 до 0.681 нм, параметр ϵ/k — от 60 до 480 К, а температура — от 43.5 до 400 К. В результате получилось чуть больше 100 расчетов со значениями сил 200 миллионов в каждом. По каждому из этих расчетов были построены функции распределения сил. Таким образом, в базе данных содержится около 20 миллионов значений сил.

При варьировании параметров потенциала (1) и температуры было установлено, что a в (3) непрерывно меняется от указанных величин. Чтобы найти соответствующую функциональную зависимость, были выполнены серии расчетов изменения параметра a от ϵ и T при фиксированных σ . Множество полученных так точек были методом наименьших квадратов аппроксимированы поверхностями $\ln a = b - c - dT$, где b , c и d — некоторые константы. Пример полученной так зависимости для $\sigma = 0.681$ приведен на рис. 2. Далее, изучая зависимость a от σ , было установлено, что $a(\sigma) \sim \sigma^e$. В результате для параметра a получена следующая зависимость от ϵ , σ и T

$$a(\epsilon, T, \sigma) = \sigma^{2.062} \exp(1.665 - 0.003637\epsilon - 0.0014T). \quad (4)$$

Формула (4) задает значения параметра a и тем самым распределения (3) от температуры и параметров потенциала Леннарда-Джонса. Таким об-

разом, можно констатировать, что полученная база данных достаточно универсальная и применима для любых леннард-джонсоновских жидкостей.

2. В данной работе развивается метод моделирования коэффициентов переноса. Эти коэффициенты определяются лишь тепловыми равновесными флуктуациями молекул системы [2–4]. Поэтому следует моделировать эволюцию равновесной системы. В начальный момент времени молекулы распределяются по ячейке моделирования в соответствии с заданной плотностью. Их скорости разыгрываются согласно распределению Максвелла при заданной температуре. Используются обычные, как и в методе МД, периодические граничные условия. В результате в начальный момент времени t координаты и скорости молекул системы равны: $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N$. Затем

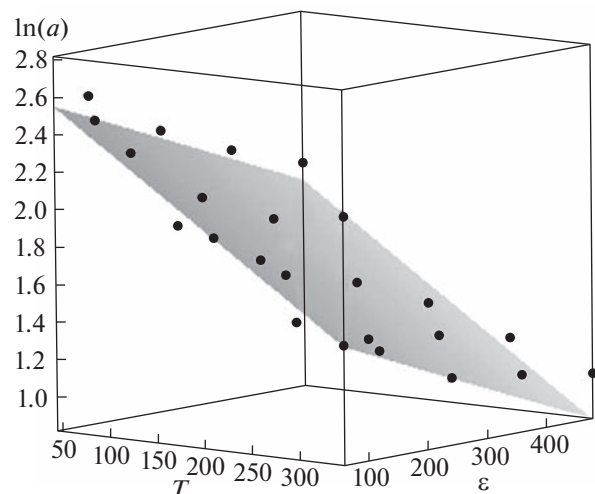


Рис. 2. Зависимость параметра $\ln a$ от температуры и параметра ϵ потенциала (2) при $\sigma = 0.681$ нм.

Таблица 1. Сопоставление данных моделирования коэффициента вязкости методами МД и СММ

	МД, η , мПа · с	СММ, мПа · с	Δ , %
Аг	0.2473	0.2409	2.4
Кг	0.3256	0.3136	3.7
Хе	0.4237	0.4101	3.2
Бензол	0.711	0.687	2.4

выбирается некоторый интервал времени $\tau_1 = \sigma/v_{\max}$, где $v_{\max}$ — максимальная скорость молекул в момент времени t . При формировании списка для момента $(t + \tau_1)$ следует учесть, что должны измениться и скорости, и координаты молекул. Для этого используется расщепление динамики молекул по процессам. Сначала изменяется координата молекулы i : $\mathbf{r}_i(t + \tau_1) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\tau_1$, а затем ее скорость. Для определения скорости $\mathbf{v}_i(t + \tau_1)$ с помощью распределения сил случайно определяется действующая на молекулу i сила, а затем она изменяется: $\mathbf{v}_i(t + \tau_1) = \mathbf{v}_i(t) + [\mathbf{F}_i(t)/m]\tau_1$ (m — масса молекулы), где сила $\mathbf{F}_i$ определяется случайно с помощью функции распределения межмолекулярных сил. Описанная процедура реализуется для каждой молекулы из списка, после чего вся процедура повторяется на каждом временном шаге до полного окончания времени расчета t_s , которое равно: $t_s = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N$. В результате получается полная информация о динамических переменных системы в последовательные моменты времени. Используя эту информацию, можно рассчитать любые наблюдаемые системы, в частности, коэффициенты переноса (1).

3. В качестве первого примера использования представленного метода СММ ниже рассматривается моделирование коэффициента вязкости жидкости. Коэффициент вязкости вычисляется с помощью ФДТ (1), которая в данном случае имеет вид

$$\eta = \frac{V}{3kT} \int_0^\tau \chi_\eta(0, t) dt = \int_0^\tau \langle \mathbf{J}_2(0) : \mathbf{J}_2(t) \rangle dt, \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{V} \sum_i^N \left(m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \mathbf{r}_{ij} \right).$$

Здесь $\mathbf{J}_2$ — микроскопический тензор напряжений, а χ_η — двухвременная автокорреляционная функция вязкости. Кроме того, поскольку ниже рассматривается лишь коэффициент динамической вязкости, то в формуле (5) следует сохранить лишь недиагональные члены.

Поскольку основная цель работы состоит в создании алгоритма молекулярного моделирования

процессов переноса альтернативному методу МД, то точность моделирования проверялась преимущественно сопоставлением данных СММ расчета с данными МД. Чтобы убедиться в универсальности построенной базы данных и в этом смысле универсальности развиваемого подхода, был выполнен расчет тех же коэффициентов переноса не только для аргона и криптона, но и ксенона, и для бензола, который является достаточно сложной многоатомной жидкостью. Соответствующие данные приведены в табл. 1, все расчеты выполнены при атмосферном давлении, но для различных температур: Аг — 87 К, Кг — 119 К, Хе — 166 К, бензол — 288 К. Здесь использовались следующие параметры потенциала (1): Аг — $\sigma = 0.408$ нм, $\epsilon/k = 90$ К, Кг — $\sigma = 0.3617$ нм, $\epsilon/k = 190$ К, Хе — $\sigma = 0.4055$ нм, $\epsilon/k = 229$ К, бензола — $\sigma = 0.6093$ нм, $\epsilon/k = 324$ К. Сопоставление данных СММ расчетов проведено с МД данными. МД расчеты выполнены с помощью пакета LAMMPS. В том и в другом случаях усреднение данных выполнялось по тысяче независимых фазовых траекторий, время расчета одной фазовой траектории равнялось 20 нс. В расчетах и методом МД, и методом СММ использовалось 64000 молекул жидкости, что позволило получить методом МД достаточно высокую точность. Во всех случаях относительная точность расчетов методом СММ оказывается достаточно высокой.

Наиболее сложной жидкостью, вязкость которых представлена в табл. 1, является бензол. На рис. 3 приведена эволюция коэффициента вязкости бензола при температуре 288 К и атмосферном давлении. Здесь данные, полученные методом СММ (непрерывная кривая), сопоставлены с данными МД расчета (пунктирная линия). Экспериментальное значение коэффициента вязкости бензола при этой температуре равно 0.694 мПа · с [23], а полученное методом МД — 0.711 мПа · с, относительная ошибка составляет 2.4%, что в пределах ошибки измерения. Метод СММ позволяет достичь платового значения значительно (почти вдвое) раньше, чем метод МД (см. рис. 3). Его, как видно из сопоставления данных, приведенных на рис. 3, можно было бы уменьшить еще по крайней мере на порядок (с учетом рассчитываемых независимых фазовых траекторий). Вместе с тем следует отметить, что методом СММ получено значение коэффициента вязкости, равное 0.687 мПа · с, которое отличается от экспериментально измеренного значения всего на 1%. Таким образом, точность расчета методом СММ при одинаковых условиях (числе частиц и траекторий, используемых для усреднения) оказывается даже выше, чем в методе МД.

Помимо вязкости, точность метода СММ проверялась и при вычислении других коэффициентов переноса. В частности, в табл. 2 и 3 приведены данные расчета коэффициентов самодиффузии и

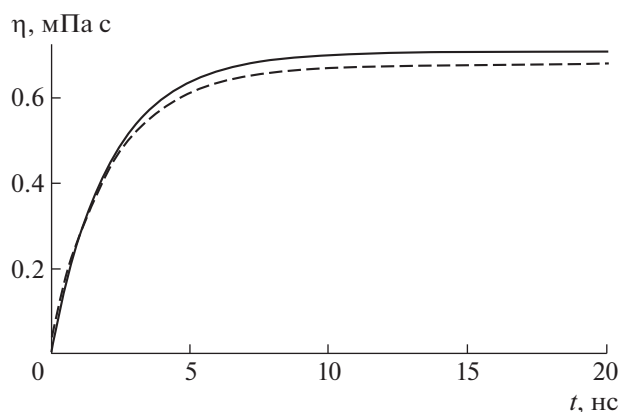


Рис. 3. Эволюция коэффициента вязкости бензола.

теплопроводности аргона и криптона. Здесь снова полученные результаты сравнивались с данными МД расчетов. В том и в другом случаях использовалось одинаковое число молекул (64 000), а усреднение проводилось по тысяче независимых фазовых траекторий. Точность расчета методом СММ во всех случаях оказывается достаточно высокой.

Предложенный в данной работе алгоритм метода СММ процессов переноса в жидкостях достаточно прост. Выполненные тестовые расчеты показывают, что точность моделирования методами СММ и МД сопоставима и вполне достаточ-

Таблица 2. Сопоставление данных моделирования коэффициента самодиффузии методами МД и СММ

	МД, 10^6 $\text{см}^2/\text{с}$	СММ, $10^6 \text{ см}^2/\text{с}$	Δ , %
Аг	1.665	1.634	1.71
Кг	4.874	4.773	2.11

Таблица 3. Сопоставление данных моделирования коэффициента теплопроводности методами МД и СММ

	МД, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	СММ, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	Δ , %
Аг	0.1267	0.1249	1.68
Кг	0.0863	0.0854	1.04

Таблица 4. Сопоставление времени расчета одной фазовой траектории для жидкого аргона методами СММ и МД для разного числа молекул

N	100	1000	2000	5000	10000
t_S , ps	0.498	1.084	1.761	2.941	4.823
t_M , ps	1.87	15.43	32.904	68.032	141.756

на для моделирования известных экспериментальных данных и вычисления коэффициентов переноса в случае, когда таких данных нет. Однако метод СММ требует существенно меньших вычислительных ресурсов. Чтобы убедиться в этом, был проведен ряд специальных тестов, один из которых описывается ниже. Рассматривается моделирование одной фазовой траектории жидкого аргона при температуре 87 К и атмосферном давлении. Число частиц в моделируемой системе изменялось от 100 до 10 000 тысяч. Полученные данные приведены в табл. 4. Использовались одни те же параметры межмолекулярного потенциала. Во всех случаях время расчета методом СММ t_S существенно меньше, чем соответствующее время методом МД t_M . Начиная с $N = 2000$, отношение времен t_M/t_S растет практически линейно. При использовании 10 000 молекул для расчета одной фазовой траектории в методе МД уже необходимо в 30 раз больше времени, чем в методе СММ. При решении современных задач, например, при моделировании коэффициентов переноса наножидкостей необходимо использовать порядка миллиона или нескольких миллионов молекул. Здесь необходимое время для расчета одной фазовой траектории методом МД будет на три порядка больше, чем при использовании метода СММ.

Конечно, для реализации метода СММ необходима предварительная информация о межмолекулярных силах. Создание соответствующей базы данных в общем случае не требует затраты значительных вычислительных ресурсов. Так, например, на создание функции распределения для жидкого аргона, представленного на рис. 1а, было затрачено около 100 ч на обычном персональном компьютере. Важно также, что использование формулы (4) делает такую базу универсальной. База данных, представленная в статье, построена с использованием 64 000 молекул. Насколько объем базы данных влияет на точность задания функции распределения межмолекулярных сил? Ответ достаточно прост. Объем базы данных в общем случае не очень важен. Было установлено, что расхождение баз данных, построенных с помощью 64 000 и 5000 молекул, составляет менее 2%. Используя большое количество молекул для построения базы данных, мы будем лучше моделировать хвосты функции распределения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке мегагранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2021-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 457 p.
2. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
3. *Рудяк В.Я.* Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 2. Гидромеханика. Новосибирск: НГАСУ, 2005. 468 с.
4. *Evans D.J., Morriss G.P.* Statistical mechanics of non-equilibrium liquids. Elsevier, 2013. 316 p.
5. *Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K.* The properties of gases and liquids. New York: McGraw-Hill, 2004. 803 p.
6. *Alder B.J., Wainwright T.E.* // J. Chem. Phys. 1959. V. 31. № 2. P. 459–466.
7. *Gibson J.B., Golland A.N., Milgram M., Vineyard G.N.* // Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 1229–1253.
8. *Rapaport D.C.* The Art of molecular dynamics simulation. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 549 p.
9. *Allen M.P., Tildesley D.J.* Computer simulation of liquids. Oxford: Oxford University Press, 2017. 385 p.
10. *Norman G.E., Stegailov V.V.* // Comp. Physics Comm. 2002. V. 147. № 4. P. 678–683.
11. *Норман Г.Э., Стегайлов В.В.* // Мат. моделирование. 2012. Т. 24. № 6. С. 3–44.
12. *Dorfman J.R.* An introduction to chaos in nonequilibrium statistical mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 287 p.
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит. 2001. 295 с.
14. *Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V.* // J. Phys.: Conf. Series. 2016. V. 738. P. 012086.
15. *Рудяк В.Я., Лежнев Е.В.* // Доклады АН ВШ РФ. 2016. № 4. С. 22–32.
16. *Рудяк В.Я., Лежнев Е.В.* // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 3. С. 113–122.
17. *Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V.* // J. Computational Phys. 2018. V. 355. P. 95–103.
18. *Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V.* // J. Phys.: Conf. Series. 2018. V. 1105. P. 012122.
19. *Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н.* // Вестник ТГУ. Математика и Механика. 2019. № 3. С. 105–117.
20. *Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V.* // Nanosystems: Phys., Chem., Math. 2020. V. 11. № 3. P. 285–293.
21. *Рудяк В.Я., Лежнев Е.В., Любимов Д.Н.* // Доклады АН ВШ РФ. 2021. № 1 (50). С. 19–29.
22. *Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B.* Molecular theory of gases and liquids. New York, London John Wiley and Sons, Inc., Chapman and Hall, Lim., 1954.
23. *Knapstad B., Skjalsvik A., Harald A.* // J. Chem. Eng. Data. 1989. V. 34. P. 37–43.

STOCHASTIC MODELING THE TRANSPORT COEFFICIENTS OF LIQUIDS

V. Ya. Rudyak^{a,b} and E. V. Lezhnev^{a,b}^a Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation^b Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.M. Fomin

A method of stochastic molecular modeling (SMM) of liquid transport coefficients has been developed. They are calculated using fluctuation-dissipation theorems, but unlike the molecular dynamics (MD) method, the phase trajectories of the system are simulated stochastically. The force acting on the molecule is determined stochastically using the created database of intermolecular forces. The effectiveness of the method is demonstrated by the example of calculating transport coefficients. It is shown that the SMM method requires much less computational resources than the MD method.

Keywords: liquid, transport coefficients, molecular modeling, stochastic modeling

УДК 521.135

УСРЕДНЕННАЯ КРУГОВАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ: ВНУТРЕННИЙ ВАРИАНТ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

© 2023 г. П. С. Красильников^{1,*}, А. В. Доброславский^{1,**}

Представлено академиком Д.В. Трещёвым

Поступило 20.11.2022 г.

После доработки 23.05.2023 г.

Принято к публикации 30.05.2023 г.

Рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются усредненные уравнения движений в пространстве оскулирующих элементов. В качестве невозмущенной орбиты берется кеплеровский эллипс с фокусом в основном теле (Солнце), когда большая полуось эллипса меньше радиуса орбиты внешней планеты (внутренняя задача). Показано, что дважды усредненная возмущенная силовая функция задачи допускает, на основе применения формулы Парсеваля, явное аналитическое представление с помощью рядов с коэффициентами, выраженными через гипергеометрические функции Гаусса, Клаузена. Исследование поведения этой функции на кривых неаналитичности показало, что ряды являются асимптотическими. Для редуцированной системы с одной степенью свободы построены фазовые портреты колебаний в плоскости кеплеровских элементов e, ω во втором и четвертом приближениях. Показано, что в четвертом приближении существенно усложняется топология фазового портрета по сравнению с первым и вторым приближениями, при условии, что константа c_1 интеграла Лидова–Козаи принадлежит интервалу $(0, 0.382)$.

Ключевые слова: ограниченная пространственная задача трех тел, метод усреднения

DOI: 10.31857/S2686954323600489, **EDN:** PPGFND

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круговую пространственную ограниченную задачу трех тел. Предположим, что пассивно гравитирующее тело (астероид) P находится в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся друг относительно друга по круговой орбите радиуса r_j ; центральное тело S (Солнце) имеет массу m_S и воздействует на астероид с силой F_S , второе тело J (Юпитер) массы m_J оказывает возмущающее действие с силой F_J . Считаем, что невозмущенная траектория спутника есть кеплеровский эллипс с фокусом в S , плоскость которого Π образует с плоскостью движения Π_0 притягивающих тел угол i (рис. 1).

Известно, что в такой классической постановке задача исследована достаточно подробно. Так, в статьях [1, 2] получено первое (хилловское) приближение для дважды усредненной силовой функции задачи, подробно проведен количе-

ственный и качественный анализ уравнений движения в указанном приближении. В статье [3] получено усеченное значение усредненной силовой функции в четвертом приближении, однако анализ уравнений движения ограничен хилловским

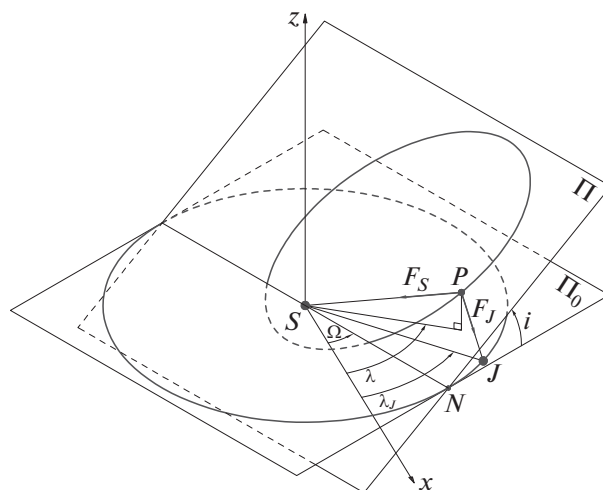


Рис. 1. Невозмущенные траектории небесных тел, угловые переменные.

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: krasil06@rambler.ru

**E-mail: a.dobroslavskiy@gmail.com

случае. В работе [4] исследованы усредненные уравнения второго приближения, делается вывод о топологической эквивалентности фазового портрета хилловскому случаю. В статье [5] приводится подробный численный анализ редуцированных уравнений движения, когда усредненная силовая функция рассматривается в виде кратного интеграла по двум быстрым переменным.

Основная цель статьи — получить новые результаты в двукратно усредненной задаче Гаусса, используя явное компактное представление усредненной силовой функции R^{**} в виде степенного ряда, либо в виде ряда Фурье. Постановка задачи и результаты исследований отличаются от численных исследований М.А. Вашковьяка [5], когда R^{**} рассматривают в виде квадратуры, непредставимой в конечном виде. Численный метод, несмотря на свою универсальность, ограничен в силу сложности функции R^{**} : невозможно рассчитать все многообразие стационарных точек при произвольных значениях параметров, их бифуркации, трудно построить гетероклинические траектории.

Приближенно-аналитический метод, используемый в статье, заменяет силовую функцию R^{**} усеченной, что позволяет строить бифуркационные диаграммы, точки бифуркации равновесий, сепаратрисы, фазовые портреты колебаний по эксцентриситету e и аргументу перицентра ω в высоких приближениях по малому параметру. При этом решается важный вопрос о поведении силовой функции на кривых неаналитичности, препятствующих численному расчету квадратуры R^{**} : степенные ряды и ряды Фурье, описывающие R^{**} , являются асимптотическими рядами на этих кривых.

Введем неинерциальную гелиоцентрическую систему координат с центром в S . Ось Sx направим в точку весеннего равноденствия, SN — линия узлов орбиты спутника, остальные оси, образующие правую систему координат, на рис. 1 не указаны. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор тела P , $\mathbf{r}_J$ — радиус вектор тела J .

Пусть Ω — долгота восходящего узла невозмущенной орбиты спутника на плоскости Π_0 , e , ω — эксцентриситет и аргумент перицентра этой орбиты, λ_J — долгота тела J , а λ — долгота тела P в плоскости Π_0 .

Рассмотрим “внутренний” вариант задачи трех тел, когда параметры движения тела P удовлетворяют условию

$$a < r_J.$$

Здесь a — большая полуось невозмущенной орбиты спутника.

Запишем выражение для возмущенной силовой функции задачи:

$$R = fm_J \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{(\mathbf{r}_J, \mathbf{r})}{r_J^3} \right), \quad (1)$$

$$\Delta = r_J \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{r_J} \right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r_J} \right)^2},$$

где f — постоянная тяготения, γ — угол между $\mathbf{r}_J$ и $\mathbf{r}$,

$$\cos \gamma = \cos(\lambda_J - \Omega) \cos(\omega + v) + \sin(\lambda_J - \Omega) \sin(\omega + v) \cos i, \quad (2)$$

v — истинная аномалия в движении спутника вдоль невозмущенной орбиты.

Функция (1) может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра с точностью до членов, не зависящих от координат тела P :

$$R = \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma). \quad (3)$$

2. УСРЕДНЕНИЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Считаем, что частота ω_J ($\lambda_J = \omega_J t + \lambda_{j0}$) не резонирует с частотой n невозмущенного движения спутника. Проводя усреднение (3) по долготе λ_J тела J , получим, с учетом (2), теоремы сложения для полиномов Лежандра и равенства $P_{2n+1}(0) = 0$, однократно усредненную силовую функцию R^* задачи:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J = \\ &= \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}[\sin i \sin(v + \omega)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение (4) совпадает с силовой функцией кольца Гаусса [6] при $r < r_J$, что было впервые установлено в работе Аксенова [7].

Усредним теперь выражение (4) по средней долготе λ тела P , учитывая, что $d\lambda = r^2 dv / (a^2 \sqrt{1 - e^2})$:

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* d\lambda = \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} r^2 R^* dv. \quad (5)$$

Для вычисления этого интеграла представим выражение для r через истинную аномалию v , используя формулы невозмущенного движения. Вычисления показывают, что функция R^{**} примет вид

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J a^2 \sqrt{1-e^2}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a(1-e^2))^{2n+2}}{r_J^{2n}} P_{2n}(0) I_{2n}(i, e, \omega), \quad (6)$$

где

$$I_{2n}(i, e, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta) dv, \quad (7)$$

$$\theta = v + \omega - \pi/2.$$

Основная техническая проблема исследований — вычисление этого интеграла. Современные программные комплексы, такие как Wolfram Mathematica и Maple, с этой задачей не справляются. Однако, учитывая периодичность по v сомножителей, входящих в подынтегральное выражение интеграла (7), можем применить формулу Парсеваля [8], описывающую главный (секулярный) член произведения двух рядов Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta) dv = \frac{a_0 \alpha_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m). \quad (8)$$

Здесь $\{a_0, a_m, b_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $(1 + e \cos v)^{-2n-2}$, $\{\alpha_0, \alpha_m, \beta_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $P_{2n}(\sin i \cos \theta)$.

Вычисления показывают, что интеграл (7) имеет вид

$$I_{2n}(i, e, \omega) = \frac{1}{(1-e)^{2n+2}} \left[P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) \times \right. \\ \times F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \\ + 2 \sum_{m=1}^{2n} F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \left. \right]. \quad (9)$$

Здесь $F_{2,1}$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а $F_{3,2}^{\text{reg}}$ — обобщенная гипергеометрическая регуляризованная функция Клаузена, $P_{2n}^{(m)}$ — присоединенная функция Лежандра. Отметим, что функция Клаузена $F_{3,2}^{\text{reg}}$ является аналитическим продолжением гипергеометрического ряда, представляет собой решение некоторого линейного дифференциального уравнения третьего порядка, имеет особенность в точках $z = 0, 1, \infty$.

Достоверность формулы (9) была подтверждена численным интегрированием выражения $(1 +$

$+ e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta)$ — результаты вычислений левой и правой частей формулы совпадают по всем значащим цифрам для следующего декартового произведения значений параметров: e от 0 до 1 с шагом 0.1, ω от 0 до 2π с шагом $\pi/6$, i от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом $\pi/6$ и n от 1 до 15 с шагом 1.

Выражение для усредненной силовой функции можно разложить в ряд Фурье по $\cos 2\omega$:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\omega \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$a_n = (-1)^n \left(2 \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k} A_{2n}^{(2k)} \right),$$

$$A_m^{(2n)} = F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \\ \times \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \quad (m \leq 2n),$$

$$B_{2n} = \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2n} (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0).$$

Представим также усредненную силовую функцию в виде степенного ряда по малому параметру $(a/r_J)^{2k}$:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2k}, \quad (11)$$

где

$$D_k = (1+e)^{2k+2} P_{2k}(0) \left(P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) \times \right. \\ \times F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2k+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + 2 \sum_{n=1}^k (-1)^n A_{2n}^{(2k)} \cos 2n\omega \left. \right).$$

Полученные разложения (10), (11) удобны с аналитической и вычислительной точки зрения. Более того, с каждым из этих разложений можно работать как с единой однозначной аналитической функцией (вычислять производные любого порядка по аргументам e, ω, i , проводить усечение рядов до членов любого порядка малости), если использовать Wolfram Mathematica.

Отметим, что аналитическое представление дважды усредненной силовой функции задачи в виде ряда Фурье по ω впервые получено в работе Аксенова [7], в которой усреднение проводилось по истинной аномалии. Такое усреднение отличается от усреднения по Гауссу. Коэффициенты этого ряда автор статьи выразил через неизвестные

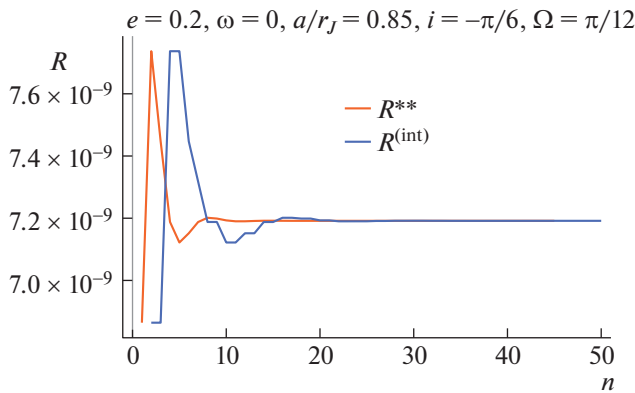


Рис. 2. Сравнение ряда Фурье (10) с (12).

специальные функции, связанные между собой рекуррентными соотношениями. Заметим также, что иное представление степенного ряда (11) через специальные функции Хансена $X_0^{k,-2p}(e)$ и функции наклона $F_{k0p}(i)$ содержится в статье [9] (см. также [13]). К сожалению, эти разложения имеют более громоздкий вид и менее удобны для аналитических исследований. Отметим также, что формула (10) переходит в ряд Фурье статьи [7], если усреднение по λ заменить усреднением по v с переходом к новому времени $d\tau = (\sqrt{fmp}/r^2)dt$.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ ДВУКРАТНО УСРЕДНЕННОЙ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Сравним формулу (10) для вычисления силовой функции задачи с результатами, получаемыми при численном усреднении $R^{(int)}$:

$$R^{(int)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J d\lambda. \quad (12)$$

С этой целью возьмем следующие параметры для численного счета: $e = 0.2$, $i = -\pi/6$, $\omega = 0$, $a/r_J = 0.85$, $\Omega = \pi/12$.

Подсчитаем значения силовой функции R^{**} , удерживая по возрастающей число n членов ряда Фурье (10), и сравним эти значения с результатами численного интегрирования выражения (12) при том же самом числе n членов подынтегрального выражения.

Как можно видеть из рис. 2, функция R^{**} выходит на свое значение в фиксированной точке начиная с частичной суммы, содержащей 12 членов ряда (коричневая кривая), в то время как результат численного интегрирования представлен в виде колебаний вплоть до $n = 20$ (синяя кривая), с последующим выходом кривой на значение функции в точке. Показано, что при $n \geq 20$

результаты расчетов по формуле (10) совпадают с результатами численного интегрирования $R^{(int)}$ на сетке значений $e \in [0, 0.9]$ с шагом 0.1, $(a/r_J) \in [0.5, 0.95]$ с шагом 0.05, $\omega \in [0, \pi]$ с шагом $\pi/6$, $i \in [-\pi/2, \pi/2]$ с шагом $\pi/6$.

Для верификации ряда (11) запишем его хилловское приближение, в котором удерживается только первый член ряда:

$$R_{hill}^{**} = \frac{fm_J a^2}{r_J^3 \sqrt{1-e^2}} (1+e)^4 P_2(0) \times \\ \times \left[P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - A_2^{(2)} \cos 2\omega \right].$$

Здесь

$$A_2^{(2)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{4!} P_2^{(2)}(0) P_2^{(2)}(\cos i),$$

$$P_2(0) = -\frac{1}{2}, \quad P_2^{(2)}(0) = 3,$$

$$P_2(\cos i) = \frac{1}{2} (3\cos^2 i - 1),$$

$$P_2^{(2)}(\cos i) = -3(\cos^2 i - 1),$$

$$F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{(2+3e^2)(1-e)^{1/2}}{2(1+e)^{7/2}},$$

$$F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{5}{2} e^2 \frac{(1-e)^{1/2}}{(1+e)^{7/2}}.$$

Подставляя вышеперечисленное в выражение для R_{hill}^{**} и упрощая, получим:

$$R_{hill}^{**} = \frac{fm_J a^2}{16r_J^3} \frac{(1+e)^4 (1-e)^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2} (1+e)^{7/2}} \times \quad (13) \\ \times [(3\cos^2 i - 1)(2+3e^2) - 15e^2(\cos^2 i - 1)\cos 2\omega] = \\ = \frac{3fm_J a^2}{16r_J^3} \left(\frac{4}{3} + 2e^2 - (2+3e^2)\sin^2 i + 5e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \right).$$

Это выражение тождественно совпадает с хилловским приближением усредненной силовой функции, полученным ранее в работе [1] (см. также [2]).

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УСРЕДНЕННОЙ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ НА КРИВЫХ НЕАНАЛИТИЧНОСТИ

Исследуем поведение рядов (10), (11) на кривых неаналитичности усредненной силовой функции, впервые обнаруженных в статье [10]:

$$f_1(a, e, \omega) = \frac{a}{r_J} (1-e^2) - 1 + e \cos \omega = 0,$$

$$f_2(a, e, \omega) = \frac{a}{r_J} (1 - e^2) - 1 - e \cos \omega = 0.$$

Отметим, что в статьях [5, 10] эти кривые часто называют “сепаратрисами”. Название условное, так как кривые не являются интегральными. На рис. 3 можно видеть зависимость значения силовой функции (10) в фиксированной точке фазового пространства оскулирующих элементов от числа удерживаемых членов ряда. Параметры, использованные для построения рисунка, связаны функциональной зависимостью $f_1 = 0$, их значения $e = 0.134237$, $\omega = \pi/3$, $a/r_J = 0.95$, $i = -\pi/3$. Частичная сумма первых 40 членов ряда (10) хорошо приближает силовую функцию задачи R^{**} , и только удержание большего количества членов ряда приводит к его расходимости. Таким образом, ряд (10) является асимптотическим по Пуанкаре [11], при этом расходимость ряда сопровождается нарастанием амплитуды колебаний.

Аналогичные результаты наблюдаются и для ряда (11). Таким образом, ряды (10), (11) расходятся вдоль кривых неаналитичности, но ряды удовлетворяют условию асимптотичности по Пуанкаре, поэтому мы можем их аппроксимировать аналитической функцией, представляющей собой сумму первых 40 членов ряда.

5. УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КОЛЕБАНИЙ

Как хорошо известно [2, 12], уравнения в оскулирующих элементах имеют два первых интеграла:

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1. \quad (14)$$

Второй из этих интегралов принято называть интегралом Лидова–Козаи. С его помощью исключаем угол i

$$i = \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2}} \right),$$

из усредненной силовой функции R^{**} , получаем редуцированную систему уравнений с одной степенью свободы [5]:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}. \quad (15)$$

Силовая функция $\hat{R} = \hat{R}(e, \omega)$ – результат исключения угла i . Очевидно, что интеграл энергии уравнений (15) имеет вид $\hat{R}(e, \omega) = c_2$.

Из второго интеграла (14) следует ограничение на область изменения оскулирующего эксцентриситета орбиты: $0 \leq e \leq \sqrt{1 - c_1}$. Здесь $e = 0$, $e = \sqrt{1 - c_1}$ – интегральные многообразия.

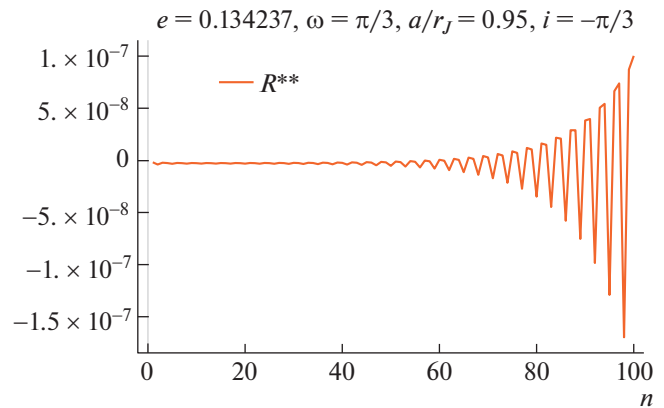


Рис. 3. Расхождение ряда (10) на кривой неаналитичности $f_1 = 0$.

Построим фазовый портрет колебаний в плоскости переменных (ω, e) редуцированной системы (15) при следующих значениях параметров: $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$. Учитывая, что хилловское приближение подробно исследовано (см. [1–3]), рассмотрим второе и четвертое приближение силовой функции (11).

Для начала удержим в $\hat{R}$ члены до четвертого порядка малости по (a/r_J) включительно (второе приближение усредненной силовой функции редуцированной системы):

$$\hat{R}_2 = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 \left[D_1 + D_2 \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{1}{16\sqrt{1 - e^2}} [(2 + 3e^2)(e^2 - 1 + 3c_1) - 15e^2(e^2 - 1 + c_1) \cos 2\omega],$$

$$D_2 = \frac{9}{4096(1 - e^2)^{3/2}} [(8 + 40e^2 + 15e^4) \times \\ \times (3(e^2 - 1)^2 + 5c_1(6e^2 + 7c_1 - 6)) - \\ - 140e^2(2 + e^2)(e^2 - 1 + c_1)(e^2 - 1 + 7c_1) \cos 2\omega + \\ + 735e^4(e^2 - 1 + c_1) \cos 4\omega].$$

На рис. 4 изображен фазовый портрет колебаний в оскулирующих элементах e, ω . Топологически он подобен хилловскому приближению, что соответствует выводу статьи [4] о качественном соответствии первого и второго приближений в усредненной задаче. В частном случае полярной орбиты ($c_1 = 0$), для которой угол наклона i ее плоскости к плоскости эклиптики равен $\pi/2$, вывод о падении астероида на Солнце сохраняет силу. Мы также видим область A , в которой линия

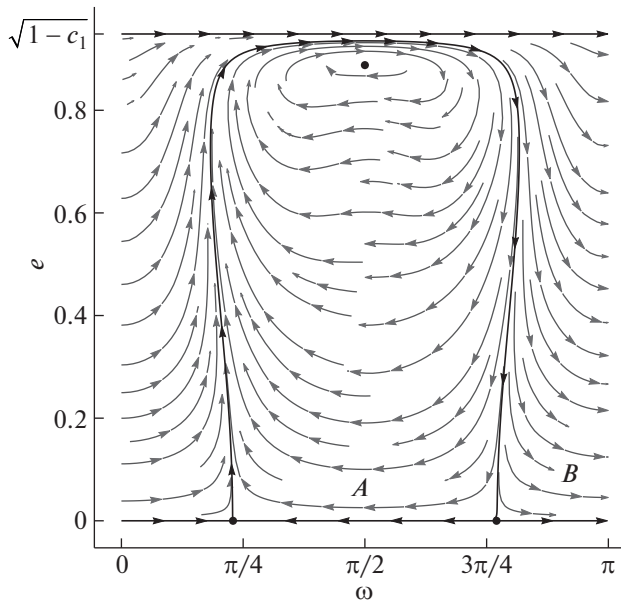


Рис. 4. Фазовый портрет второго приближения при $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

апсид совершает либрационные движения в окрестности единственной стационарной точки, как и в случае Хилла. Отличие этой области от области первого приближения состоит в том, что фазовые кривые в окрестности неподвижной точки имеют больший размах колебаний по эксцентриситету, а сама стационарная точка сдвигается в область больших значений эксцентриситета.

Исследуем теперь четвертое приближение силовой функции (11):

$$\begin{aligned} \hat{R}_4 &= \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 \times \\ &\times \left[D_1 + D_2 \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 + D_3 \left(\frac{a}{r_J} \right)^4 + D_4 \left(\frac{a}{r_J} \right)^6 \right], \quad (17) \\ D_3 &= \frac{5}{131072(1-e^2)^{5/2}} [10(16 + 168e^2 + \\ &+ 210e^4 + 35e^6)(5(1-e^2)^3 - 21c_1(5(1-e^2)^2 - \\ &- 15(1-e^2)c_1 + 11c_1^2)) + 315e^2\alpha(48 + 80e^2 + 15e^4) \times \\ &\times ((1-e^2)^2 - 18(1-e^2)c_1 + 33c_1^2)\cos 2\omega - \\ &- 4158e^4\alpha^2(10 + 3e^2)(\alpha + 10c_1) \times \\ &\times \cos 4\omega + 99099e^6\alpha^3 \cos 6\omega], \\ D_4 &= \frac{175}{268435456(1-e^2)^{7/2}} [7(128 + 2304e^2 + \\ &+ 6048e^4 + 3360e^6 + 315e^8) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times (35(1-e^2)^4 - 3c_1(420(1-e^2)^3 - \\ &- 11c_1(210(1-e^2)^2 - 364(1-e^2)c_1 + 195c_1^2))) + \\ &+ 27720e^2\alpha(32 + 112e^2 + 70e^4 + 7e^6) \times \\ &\times ((1-e^2)^3 + 11c_1(3(1-e^2)^2 - 13\alpha c_1))\cos 2\omega + \\ &+ 396396e^4\alpha^2(8 + 8e^2 + e^4) \times \\ &\times ((1-e^2)^2 + 13c_1(2\alpha + 3c_1))\cos 4\omega - \\ &- 490776e^6\alpha^3(14 + 3e^2)(\alpha + 14c_1) \times \\ &\times \cos 6\omega + 15643485e^8\alpha^4 \cos 8\omega]. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = e^2 - 1 + c_1$. Прежде всего отметим, что для обоснования усечений ряда (11) были проведены вычисления, при которых частичная сумма R_n^{**} ряда (11) сравнивалась со значением интеграла (12), в котором число удерживаемых членов в подынтегральном выражении фиксировано и равно 45. Для параметров $e = 0.2$, $\omega = 0$, $a/r_J = 0.8$, $i = -\pi/6$, $\Omega = \pi/12$ показано, что сумма R_2^{**} дает относительную ошибку приближения 0.06, а R_4^{**} — близкую к нулю, хотя для R_5^{**} , R_6^{**} она несколько портится; R_n^{**} ($n \geq 10$) практически совпадает с интегралом (12). Это дает частичное обоснование удержанию первых четырех членов ряда (11) при $a/r_J = 0.8$.

Кривая равновесий для четвертого приближения представлена на рис. 5. Она отвечает параметру $a/r_J = 0.8$ и значению аргумента перицентра $\omega = \pi/2$, состоит из трех ветвей: ниспадающей, петлеобразной и зарождающейся петли. Ниспадающая ветвь присутствует в первом — четвертом приближениях и пересекает ось c_1 в точке $(0, 0.847)$. Область параметров, лежащая выше ниспадающей кривой, не содержит равновесий и отвечает ротационным движениям. Рассмотрим область ниже этой кривой. Петля начинает формироваться во втором приближении и полностью формируется только в третьем приближении, в четвертом же приближении можно наблюдать появление следующей петли. Для петель характерно наличие точек бифуркации. Для сформировавшейся петли точка имеет координаты $c_1^{(1)} = 0.382$, $e^{(1)} = 0.447$ (на рис. 5 точка бифуркации обозначена цифрой 1). Для формирующейся петли точка имеет координаты $c_1^{(2)} = 0.015$, $e^{(2)} = 0.672$ (на рис. 5 точка обозначена цифрой 2). При прохождении через точку бифуркации появляются дополнительно два устойчивых равновесия и два неустойчивых. Последние являются седлами и они не представлены на рис. 5, так как отвечают случаю $\omega \neq \pi/2$. Эти равновесия можно видеть на рис. 6. Устойчивые равновесия имеют координаты $(\pi/2, 0.74)$, $(\pi/2, 0.8)$ и $(\pi/2, 0.938)$.

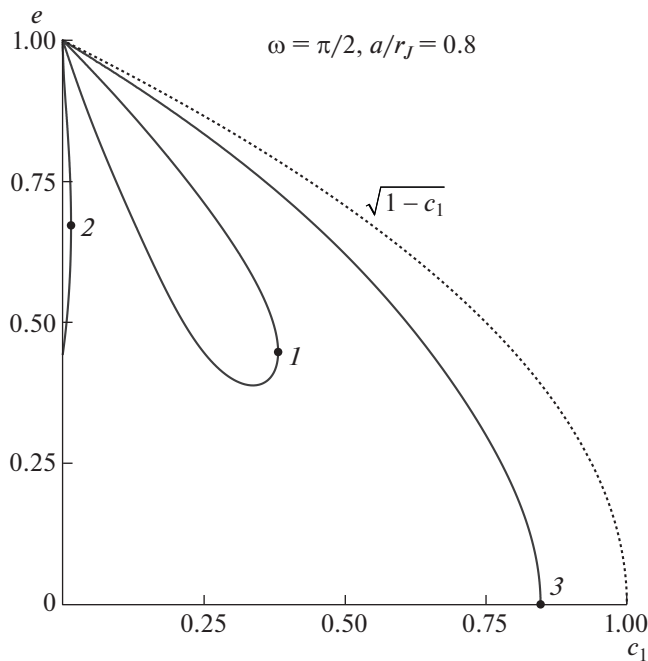


Рис. 5. Кривая равновесий $e(c_1)$ для четвертого приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Фазовый портрет колебаний изображен на рис. 6. Он состоит из четырех либрационных зон A, C, D, E и одной области ротационных движений B . Зоны отделены друг от друга пятью гетероклиническими траекториями. Одна из них соединяет между собой неустойчивые равновесия, принадлежащие интегральному многообразию $e = 0$. Эту кривую мы наблюдаем также в хилловском случае. Остальные гетероклинические траектории соединяют между собой два седла, проявивших себя только в третьем приближении.

Итак, в четвертом приближении по малому параметру a/r_j имеем зависимость фазового портрета колебаний от значений константы c_1 интеграла Лидова–Козаи. Так, при $0.382 < c_1 < 1$ фазовый портрет соответствует хилловскому приближению; в случае $0.015 < c_1 < 0.382$ его топология меняется за счет появления дополнительных равновесий фазовой точки и гетероклинических траекторий (рис. 6), а при $0 < c_1 < 0.015$ топология снова меняется — появляется пара дополнительных равновесий.

Достоверность четвертого приближения вытекает из сравнения фазовых портретов колебаний — при фиксированных значениях константы c_1 — с третьим по пятое приближение включительно. На рис. 7 представлен фазовый портрет пятого приближения.

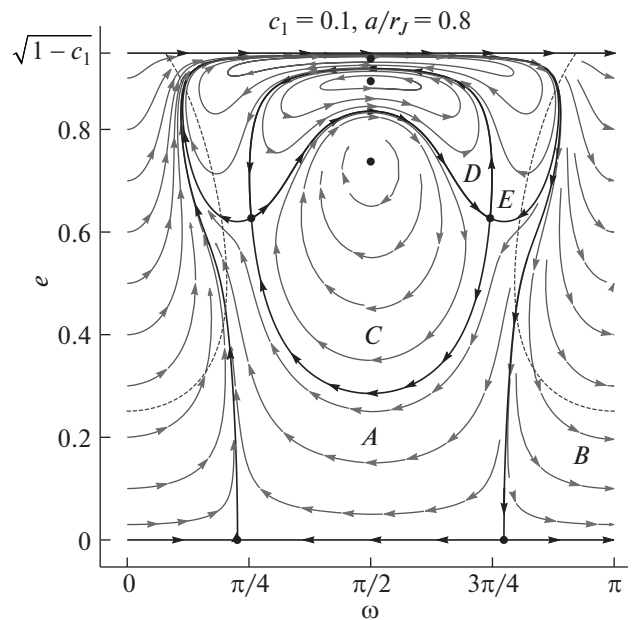


Рис. 6. Фазовый портрет четвертого приближения при $a/r_j = 0.8$, $c_1 = 0.1$, пунктиром обозначены кривые неаналитичности.

Топология сохраняется при $c_1 = 0.1$. Она сохраняется и при других значениях c_1 , меняясь только в точках бифуркации равновесий (точки 1 и 2 на рис. 5).

Численный анализ показывает, что удержание членов ряда более высокого порядка малости ведет

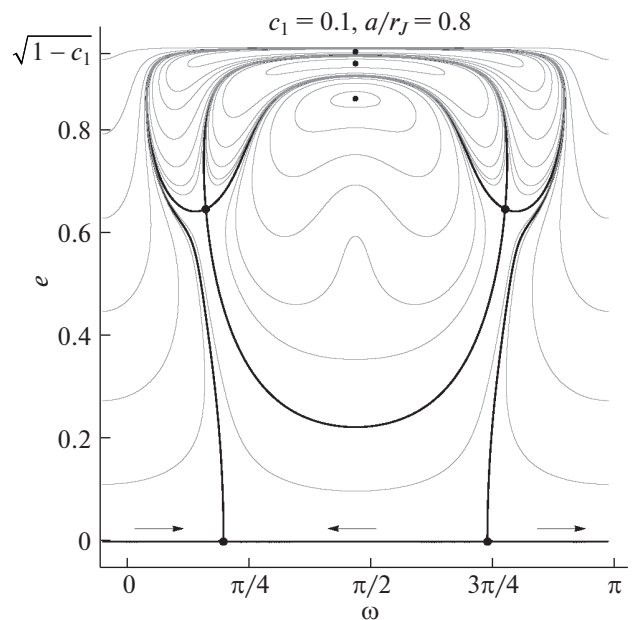


Рис. 7. Фазовый портрет пятого приближения при $a/r_j = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

к появлению дополнительных ветвей кривых равновесия в малой окрестности точки $e = \sqrt{1 - c_1}$, $\omega = 0$ (верхний левый угол фазового портрета) при малых c_1 , как следствие, меняется топология портрета в этой окрестности. Чем выше порядок малости добавляемых членов, тем меньше указанная окрестность по e . Случай $c_1 \approx 0$, $e \approx \sqrt{1 - c_1}$ отвечает полярным сильно вытянутым орбитам. Отметим, что при $e \rightarrow 1$ точность расчетов падает.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы, с использованием схемы Гаусса двукратного усреднения, пространственные оскулирующие эллиптические движения астероида под действием гравитационного притяжения от Солнца и гравитационного возмущения от внешней планеты (Юпитера). Получены явные аналитические выражения для дважды усредненной силовой функции в виде ряда Фурье и степенного ряда. Аналитическое выражение позволяет быстро и эффективно строить любое усечение усредненной силовой функции, исследовать поведение этой функции вдоль кривых неаналитичности. Численно показано, что на этих кривых расходящиеся ряды усредненной силовой функции являются асимптотическими по Пуанкаре. Поэтому они допускают аппроксимацию аналитическими функциями в виде суммы n первых слагаемых вплоть до $n = 40$.

Построены фазовые портреты колебаний во втором и четвертом приближениях. Показано, что второе приближение сохраняет все качественные выводы первого (хилловского) приближения. Показано также, что в четвертом приближении качественные выводы о фазовых колебаниях по эксцентриситету e и аргументу перигея ω хилловского случая сохраняются лишь при значениях константы интеграла Лидова–Козаи c_1 из интервала $(0.382, 1)$. В противном случае, когда $c_1 \in (0.015, 0.382)$, имеем существенное усложнение картины колебаний: в силу бифуркации равновесий появляются дополнительные устойчивые и неустойчивые равновесия и гетероклинные траектории, из которых формируются границы четырех областей либрации и одной области ротационных движений по e и ω . Дальнейшее уменьшение c_1 вплоть до нуля ведет к еще большей сложности фазового портрета: появляются новые положения равновесия в силу бифуркации равновесий, новые гетероклинические траектории.

Показано, что удержание членов ряда (11) более высокого порядка малости ведет к появлению дополнительных ветвей кривых равновесия в малой окрестности точки $e = \sqrt{1 - c_1}$, $\omega = 0$ при малых c_1 . Следовательно, четвертое приближение

усредненной силовой функции дает топологически обоснованную картину колебаний за исключением малой окрестности указанной точки при $c_1 \approx 0$.

Результаты этих исследований могут быть нарушены в очень высоких приближениях вдоль кривых неаналитичности. Поведение фазовых траекторий в окрестности кривых неаналитичности подробно исследовано в статье [5]. Седловые точки, не принадлежащие многообразию $e = 0$, впервые были получены в препринте [14].

АВТОРСКИЙ ВКЛАД

Постановка задачи, идея применения формулы Парсеваля, аналитические преобразования — представление усредненной силовой функции в виде рядов, анализ интегральных многообразий и поведения силовой функции вдоль кривых неаналитичности — принадлежат П.С. Красильникову.

Громоздкие аналитические и численные вычисления, требующие использования программных продуктов, написание кодов численной верификации силовой функции, кодов построения бифуркационных диаграмм и фазовых портретов колебаний, выполнены А.В. Доброславским.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в Московском авиационном институте при финансовой поддержке РФФИ, проект № 22-21-00560.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. // Искусственные спутники Земли. 1961. Т. 8. С. 5–45.
2. Von Zeipel H. Recherches sur le mouvement des petites planètes. Troisième partie. // Ark. Mat. Astron. Fys. 1917. V. 12. P. 1–89.
3. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // Astronomical Journal. 1962. V. 67. P. 591–598.
4. Brown E.W. The stellar Problem of Three Bodies I, II and III // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1936. V. 97. P. 56–61, P. 62–66, P. 116–127.
5. Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование // Космические исследования. 1981. Т. 19. С. 5–18.
6. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Физматгиз, 1961. 288 с.
7. Аксенов Е.П. Осредненная ограниченная круговая задача трех тел // Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. 1967. Т. 21. С. 184–202.

8. Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. Брумберг В.А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. Бюллетень ИТА. 1967. Т. 11. № 2. С. 73–83.
10. Lidov M.L., Ziglin S.L. The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits. // *Celestial Mechanics*. 1974. V. 9. P. 151–173.
11. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
12. Моисеев Н.Д. О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. Об осредненных вариантах пространственной ограниченной круговой проблемы трех точек. // *Труды ГАИШ*. 1945. С. 100–117.
13. Емельянов Н.В. Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений. Фрязино: Век 2, 2019. 575 с.
14. Васьковьяк М.А. Качественное исследование эволюции орбит в ограниченной круговой двукратно-осредненной задаче трех тел // *Препринт ИПМ*. 1979. № 106.

AVERAGED CIRCULAR SPATIAL RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM: INTERNAL CASE, NEW RESULTS

P. S. Krasilnikov^a and A. V. Dobroslavskiy^a

^a *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.V. Treschev

We investigate the spatial restricted circular three-body problem in the nonresonant case. Namely, we apply Gaussian averaging to obtain averaged equations in terms of osculating elements and then investigate them. Keplerian ellipse with a focus in the main body (the Sun) is taken as an unperturbed orbit assuming the semi-major axis of the ellipse to be less than the radius of the orbit of the outer planet (internal problem). Using the Parseval formula we have derived the twice-averaged perturbed force function of the problem in the form of an explicit analytical series with coefficients expressed in terms of the Gauss and Clausen hypergeometric functions. An investigation of averaged force function along its curves of non-analyticity showed that the series are asymptotic by Poincaré. For a reduced system with one degree of freedom, phase portraits of oscillations in the plane of the Keplerian elements e, ω are constructed in the second and fourth approximations. It is shown the topology of the phase portrait is more complicated in fourth approximation than in first and second approximations provided that the constant c_1 of the Lidov–Kozai integral belongs to the interval $(0, 0.382)$.

Keywords: restricted spatial three body problem, averaging method, osculating elements

УДК 517.957

ОБ АСИМПТОТИКЕ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С МЕЛКИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

© 2023 г. К. А. Бекмаганбетов^{1,2,*}, А. М. Толеубай^{3,2,**}, Г. А. Чечкин^{4,5,2,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 07.09.2022 г.

После доработки 20.05.2023 г.

Принято к публикации 25.05.2023 г.

В работе рассматривается двумерная система уравнений Навье–Стокса в среде с анизотропной переменной вязкостью и периодическими мелкими препятствиями. Доказано, что траекторные аттракторы этой системы стремятся в определенной слабой топологии к траекторным аттракторам усредненной системы уравнений Навье–Стокса с дополнительным потенциалом в среде без препятствий.

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, система уравнений Навье–Стокса, нелинейные уравнения, слабая сходимости, перфорированная область, быстро осциллирующие члены, анизотропная среда

DOI: 10.31857/S2686954322600549, **EDN:** PJZJPW

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается поведение аттракторов начально-краевой задачи для двумерной системы уравнений Навье–Стокса в среде с анизотропной вязкостью и локально периодическими мелкими препятствиями, расстояние между которыми и их диаметры зависят от малого параметра (см. рис. 1), при стремлении этого малого параметра к нулю. Предполагается, что поверхность препятствий взаимодействует со средой.

Аттракторы для двумерной системы Навье–Стокса впервые были определены и начали изучаться с середины 1970-х годов. Отметим здесь

работу М.И. Вишика и В.В. Чепыжова [1], в которой обосновывается применение техники траекторных и глобальных аттракторов для усреднения плоских начально-краевых задач гидродинамики ньютоновских жидкостей, а также рассмотрены физические приложения таких моделей (см. также [2]).

Естественным продолжением исследований в этой области является моделирование неньютоновских жидкостей, в частности, сильно анизотропных вязких несжимаемых сред (см., например, недавние работы по неньютоновской жидкости

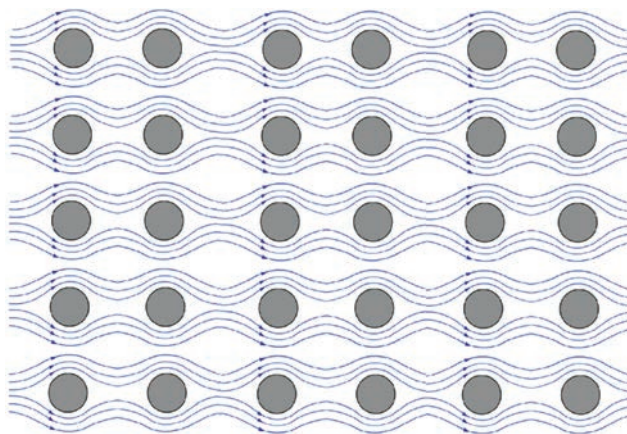


Рис. 1. 2D модель жидкости в среде с мелкими периодическими препятствиями.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан

² Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

³ Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

⁴ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁵ Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

*E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

**E-mail: altyn.15.94@mail.ru

***E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

О.А. Ладыженской [3] и усреднению неньютоновской сильно анизотропной среды [4]).

Отметим некоторые результаты по усреднению аттракторов, которые появились в последнее время. В работах [5] и [6] изучалось усреднение аттракторов эволюционных уравнений и систем с диссипацией в периодически перфорированной области. Результаты по усреднению аттракторов системы уравнений Навье—Стокса в периодической изотропной среде см. в [7]. Методы, которые использовались при исследовании таких задач, были разработаны в [8–11].

В настоящей работе обобщаются результаты, полученные в [7]. Предполагается, что на границе включений выставлены специальные условия третьего рода. Такие краевые условия совместно с системой уравнений Навье—Стокса были предложены в [12] в качестве простейшей модели для паро-водяной конденсации на холодных стенках (подробнее о модели смотри [13, § 4.1]).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сначала мы определим перфорированную область. Пусть Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Введем обозначения

$$\Upsilon_\varepsilon = \{r \in \mathbb{Z}^2 : \text{dist}(\varepsilon r, \partial\Omega) \geq \sqrt{2}\varepsilon\},$$

$$\square \equiv \left\{ \xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}.$$

Задавая 1-периодическую по ξ гладкую функцию $F(x, \xi)$ такую, что $F(x, \xi)|_{\xi \in \partial\square} \geq \text{const} > 0$, $F(x, 0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ при $\xi \in \square \setminus \{0\}$, определяем

$$G_\varepsilon^r = \left\{ x \in \varepsilon(\square + r) : F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad G_\varepsilon = \bigcup_{r \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^r$$

и вводим перфорированную область следующим образом:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus G_\varepsilon.$$

В соответствии с выше приведенной конструкцией граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и границы включений $\partial G_\varepsilon \subset \Omega$. Определим также $Q = \{(x, t) | x \in \Omega, t \in (0, \infty)\}$ и $Q_\varepsilon = \{(x, t) | x \in \Omega_\varepsilon, t \in (0, \infty)\}$.

Обозначим через $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$ замыкание в $[L_2(\Omega)]^2$ и $[H_0^1(\Omega)]^2$ множества $\{v | v \in [C_0^\infty(\Omega)]^2, (\nabla, v) = 0\}$. По аналогии определим $\mathbf{H}_\varepsilon$ — замыкание этого множества по норме $[L_2(\Omega_\varepsilon)]^2$, и $\mathbf{V}_\varepsilon$ — замыкание этого множества по норме $[H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^2$, где $[H^1(\Omega_\varepsilon; \partial\Omega)]^2$ — множество вектор-функций из $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^2$ с нулевым следом на $\partial\Omega$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом:

$$\|v\|^2 := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |v^k(x)|^2 dx, \quad \|v\|_\varepsilon^2 := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} |v^k(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla v^k(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1,\varepsilon}^2 := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v^k(x)|^2 dx.$$

Мы будем изучать асимптотическое поведение траекторных аттракторов следующей начально-краевой задачи для автономной двумерной системы уравнений Навье—Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - 2\nu \text{div} \bar{e}(u_\varepsilon) + (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon + \\ + \nabla p_\varepsilon = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_n^\varepsilon + \alpha_n \varepsilon(u_\varepsilon, n) = 0, & x \in \partial G_\varepsilon, \quad t \in (0, +\infty), \\ \sigma_\tau^\varepsilon + \alpha_\tau \varepsilon(u_\varepsilon, \tau) = 0, & x \in \partial G_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $p_\varepsilon(x, t)$ — давление, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $2\bar{e}(u_\varepsilon) = \nabla u_\varepsilon + (\nabla u_\varepsilon)^T$, $g_\varepsilon(x) = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = (g^1, g^2) \in \mathbf{H}$, $\sigma_n^\varepsilon(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = -p_\varepsilon + \nu((\bar{e}(u_\varepsilon)n), n)$, $\sigma_\tau^\varepsilon(u_\varepsilon) = \nu((\bar{e}(u_\varepsilon)n), \tau)$, $n = (n_1, n_2)$ — вектор единичной внешней нормали к границе, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — единичный тангенциальный вектор к границе включений. Обозначим $G(x) = \{\xi \in \square : F(x, \xi) \leq 0\}$ — локальное включение, $\partial G(x) = \{\xi \in \square : F(x, \xi) = 0\}$ — граница включения $G(x)$ в растянутом пространстве ξ .

Известно (см. ниже), что если $U \in \mathbf{H}$, то существует слабое решение $u(t)$ начально-краевой задачи (1), принадлежащее пространству $\mathbf{L}_{2,w}^{loc}(R_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{loc}(R_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$, такое, что $u(0) = U$. При этом имеем, что $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(R_+; \mathbf{V}_\varepsilon')$. Здесь $\mathbf{V}_\varepsilon'$ — сопряженное пространство к $\mathbf{V}_\varepsilon$.

Замечание 2.1. Для доказательства существования решения исходной задачи требуется техника диссипативных оценок, равномерных по параметру ε (см. замечание 4.3 из [14]), а также существование оператора продолжения с сохранением регулярности функций (см. лемму 7.1 из [14]). Доказательство проводится методом Галёркина с использованием теоремы существования и единственности для стационарной системы Навье—Стокса (см. теорему 4.2 из [14]).

Исходя из выше сказанного, будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), т.е. функции

$$u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(R_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{loc}(R_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(R_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\},$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + 2v \int_{Q_\varepsilon} \bar{e}(u_\varepsilon) \bar{e}(\psi) dx dt + \\ & + \int_{Q_\varepsilon} (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon \cdot \psi dx dt + \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\partial G_\varepsilon} (\alpha_n(u_\varepsilon, n) \psi_n + \\ & + \alpha_\tau(u_\varepsilon, \tau) \psi_\tau) ds dt = \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dx dt \end{aligned} \quad (2)$$

для любых вектор-функций $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(R_+; \mathbf{V}_\varepsilon)$. Здесь $y_1 \cdot y_2$ означает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$, а ds — элемент кривой ∂G_ε .

При описании пространства траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ для задачи (1) будем следовать общей схеме (см., например, [6]) и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc} : \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ \cap \left\{ v : \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc}} := \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}')}. \quad (4)$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = \mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, а если $u(t) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc}$, тогда $A(u(t)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Здесь $A(u) = -2v \operatorname{div} \bar{e}(u) - (u, \nabla)u$. Далее можно рассматривать слабые решения задачи (1) как решение системы уравнений из общей схемы (см. [6]).

Определим пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{loc} &= \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ &\cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}, \\ \mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc} &= \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ &\cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно,

но, пространство траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, т.е., если $u(t) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$, тогда и $u(h+t) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ для любых $h \geq 0$.

Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{H})$, определим метрики $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1, t_2}^{loc}$ следующим образом

$$\begin{aligned} \rho_{0,M}(u, v) &= \left(\int_0^M \|u(t) - v(t)\|_{\mathbf{H}}^2 dt \right)^{1/2}, \\ \forall u(\cdot), v(\cdot) &\in \mathcal{F}_{0,M}^{loc}. \end{aligned}$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{loc}$ (соответственно $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \rightarrow \infty$ в Θ_+^{loc} , если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0,M;\mathbf{H})} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ задачи (1).

Далее, определим ограниченные множества в $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, используя банаховы пространства $\mathcal{F}_+^b$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^b &= \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ &\cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

и $\mathcal{F}_+^b$ — подпространство пространства $\mathcal{F}_+^{loc}$.

Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon$ означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathcal{H}_\varepsilon^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}') \right\}.$$

Имеет место утверждение, доказательство которого практически полностью совпадает с доказательством, приведенным [9] для более частного случая, учитывая при этом [14] и [15].

Лемма 2.1. *Задача (1) имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc} . Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc} . Более того,*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{H}_\varepsilon,$$

ядро $\mathcal{H}_\varepsilon$ — непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathcal{F}_+^b$. Напомним, что пространства $\mathcal{F}_+^b$ и

Θ_+^{loc} зависят от ε . Здесь Π_+ обозначает оператор сужения на полюсь $\mathbb{R}_+$.

3. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

В этом разделе изучаются предельное поведение аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ для системы уравнений Навье–Стокса (1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения.

Стационарная задача на ячейке периодичности имеет вид (см. [14, § 2.1])

$$\begin{cases} -2\nu \operatorname{div} \bar{\xi}^{kl} + \nabla \eta^{kl} = 0, & x \in \square \setminus G(x), \\ \operatorname{div} \bar{\xi}^{kl} = -\delta_{kl}, & x \in \square \setminus G(x), \\ -\sigma_n^e(\chi^{kl}, \eta^{kl}) = 2\nu n_k n_l, & x \in \partial G(x), \\ \sigma_\tau^e(\chi^{kl}) = \nu(n_k \tau_l + \tau_k n_l), & x \in \partial G(x), \\ \{\chi^{kl}, \eta^{kl}\} - 1 - \text{периодические}, \\ \frac{1}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\square \setminus G(x)} \chi^{kl} d\xi = 0 \quad (k, l = 1, 2), \end{cases} \quad (6)$$

здесь δ_{kl} — символ Кронекера.

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0^i}{\partial t} - \sum_{j,k,l=1}^2 a_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{e}_{kl}(u_0) + \sum_{j=1}^2 d_{ij}^{(n)} u_0^j + \sum_{j=1}^2 d_{ij}^{(\tau)} u_0^j + \\ + \sum_{j=1}^2 u_0^j \frac{\partial u_0^i}{\partial x_j} + \sum_{j,k,l=1}^2 b_{ijkl} u_0^j e_{kl}(u_0) = \mathcal{G}(x), \\ x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (i = 1, 2) \\ u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_0 = U(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= 2\nu \left(\delta_{ijkl} + \frac{1}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\square \setminus G(x)} \left(e_{ij}(\chi^{kl}) - \delta_{ij} \frac{\eta^{kl}}{2\nu} \right) d\xi \right), \\ \delta_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ b_{ijkl} &= \frac{1}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\partial G(x)} \frac{\partial \chi_{ki}}{\partial \xi_j} d\xi, \quad \mathcal{G}(x) = \int_{\square \setminus G(x)} g(x, \xi) d\xi, \\ d_{ij}^{(n)} &= \frac{\alpha_n}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\partial G(x)} n_i n_j ds, \quad d_{ij}^{(\tau)} = \frac{\alpha_\tau}{|\square \setminus G(x)|} \int_{\partial G(x)} \tau_i \tau_j ds. \end{aligned}$$

Рассматриваются слабые решения начально-краевой задачи (7), т.е. функции

$$\begin{aligned} u_0(x, s) &\in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_{\infty,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ &\cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют интегральному тождеству начально-краевой задачи (7) для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$.

Теоремы существования и единственности для такой задачи см. в [14]. Их доказательство опирается на методы, которые использовала О.А. Ладыженская в своих пионерских работах по двумерной системе Навье–Стокса.

Задача (7) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\overline{\mathcal{H}}^+$, соответствующем задаче (7), причем

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{H}},$$

где $\overline{\mathcal{H}}$ — ядро задачи (7) в $\mathcal{F}^b$.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов системы уравнений Навье–Стокса.

Теорема 3.1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (8)$$

Кроме того

$$\mathcal{H}_\varepsilon \rightarrow \overline{\mathcal{H}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \quad (9)$$

Доказательство теоремы опирается на доказательство сходимости продолженных решений (см. теоремы 2.4 и 2.5 из работы [14]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность В.В. Чепыжову за полезные обсуждения работы и советы по улучшению презентации результатов.

Также авторы благодарят анонимных рецензентов за внимательное прочтение статьи и замечания, которые позволили существенно улучшить текст.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа в параграфе 2 поддержана КН МНИВО РК (грант AP14869553), работа третьего автора в параграфе 3 поддержана МОН РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2022-284).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor // J. Dyn. Diff. Eqns. 2007. V. 19. P. 655–684.

2. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // *J. Math. Pures Appl.* 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
3. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // *Труды семинара им. И.Г. Петровского*. Вып. 28. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 329–361.
4. *Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S.* Nematodynamics and Random Homogenization // *Applicable Analysis*. 2016. V. 95. № 10. P. 2243–2253.
5. *Бекмаганбетов К.А., Чечкин Г.А., Чепыжов В.В.* Сильная сходимость аттракторов системы реакции–диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде // *Известия РАН*. 2022. Т. 86. № 6. С. 3–34.
6. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. V. 140. Art. No 110208.
7. *Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А.* Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде // *Проблемы математического анализа*. 2022. Т. 115. С. 15–28.
8. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
9. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002.
10. *Temam R.* Navier–Stokes equations: Theory and numerical analysis. Amsterdam–New York–Oxford: North Holland, 1979.
11. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag, 1988.
12. *Conca C.* Mathematical modeling of the steam-water condensation in a condenser. Large-scale computations in fluid mechanics, Part 1 (La Jolla, Calif., 1983), 87–98, *Lectures in Appl. Math.*, 22-1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
13. *Conca C.* Numerical results on the homogenization of Stokes and Navier–Stokes equations modeling a class of problems from fluid mechanics // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1985. V. 53. № 3. P. 223–258.
14. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. // *J. Math. Pures Appl.* 1985. V. 64 (9). № 1. P. 31–75.
15. *Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // *Математический сборник*. 2001. Т. 192. № 7. С. 3–20.

ON ASYMPTOTICS OF ATTRACTORS TO NAVIER-STOKES SYSTEM IN ANISOTROPIC MEDIUM WITH SMALL PERIODIC OBSTACLES

K. A. Bekmaganbetov^{a,b}, A. M. Toleubay^{c,b}, and G. A. Chechkin^{d,e,b}

^a *Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan*

^b *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^c *Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan*

^d *Moscow State University. M.V. Lomonosov, Moscow, Russian Federation*

^e *Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The paper considers a two-dimensional system of Navier–Stokes equations in medium with anisotropic variable viscosity and periodic small obstacles. It is proved that the trajectory attractors of this system tend in a certain weak topology to the trajectory attractors of the averaged system of Navier–Stokes equations with an additional potential in a medium without obstacles.

Keywords: attractors, averaging, system of equations Navier–Stokes, nonlinear equations, weak convergence, perforated region, rapidly oscillating terms, anisotropic medium

О ПОВЫШЕННОЙ СУММИРУЕМОСТИ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ p -ЛАПЛАСА

© 2023 г. Ю. А. Алхутов^{1,*}, Ч. Д. Апице^{2,**}, М. А. Кисатов^{3,***}, А. Г. Чечкина^{3,4,****}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 13.07.2022 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принято к публикации 30.05.2023 г.

Доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы в ограниченной липшицевой области на плоскости для неоднородного уравнения p -Лапласа.

Ключевые слова: задача Зарембы, оценки Мейерса, p -емкость, теоремы вложения, повышенная суммируемость

DOI: 10.31857/S268695432260046X, **EDN:** SXBAMG

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе обсуждаются интегральные свойства обобщенных решений неоднородного уравнения p -Лапласа, где $p > 1$, решений задачи Зарембы в плоской модельной области $D \subset \mathbb{R}^2$ такой, что $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций $W_p^1(D, F)$. Здесь $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, $W_p^1(D, F)$ — пополнение бесконечного дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме

$$\|u\|_{W_p^1(D, F)} = \left(\int_D |v|^p dx + \int_D |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}.$$

Априори для функций $v \in W_p^1(D, F)$ предполагается выполненным неравенство Фридрихса

$$\int_D |v|^p dx \leq C \int_D |\nabla v|^p dx, \quad (1.1)$$

о котором будет сказано ниже. Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\begin{aligned} \Delta_p u &:= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = l \quad \text{в } D, \\ u &= 0 \quad \text{на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } G, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает внешнюю нормальную производную функции u , а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_p^1(D, F)$.

Под решением задачи (1.2) понимается функция $u \in W_p^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -l(\varphi) \quad (1.3)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D, F)$.

В силу неравенства Фридрихса (1.1) пространство $W_p^1(D, F)$ можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. Используя теорему Хана-Банаха, нетрудно показать, что функционал l можно записать в виде

$$l(\varphi) = - \sum_{i=1}^2 \int_D f_i \varphi_{x_i} dx, \quad (1.4)$$

где $f_i \in L_{p'}(D)$, $p' = p/(p-1)$. Поэтому в силу (1.3) для каждого конкретного функционала решение задачи (1.2) можно понимать в смысле интегрального соотношения

¹ Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

² Университет Салерно, Фишиано, Италия

³ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

⁴ Институт математики с компьютерным центром — подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

*E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

**E-mail: cdapice@unisa.it

***E-mail: kisatov@mail.ru

****E-mail: chechkina@gmail.com

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi dx \quad (1.5)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_p^1(D, F)$, в котором компоненты вектор-функции $f = (f_1, f_2)$ являются функциями из $L_p(D)$.

С помощью методов теории монотонных операторов устанавливается, что задача (1.2) однозначно разрешима в соболевском пространстве функций $W_p^1(D, F)$ (см., например, теорему 2.1 из второго раздела главы 2 монографии [1]).

Нас интересует вопрос о повышенной суммируемости градиента решений задачи (1.2) в предположении, что $f \in L_{p+\delta}(D)$, где $\delta > 0$.

Повышенная суммируемость градиента решений линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами на плоскости восходит к работе [2]. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида аналогичный результат для решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей установлен в [3]. Оценки повышенной суммируемости градиента решений задачи Зарембы в ограниченной липшицевой области для линейных эллиптических уравнений второго порядка можно найти в работах [4, 5] и [6]. В работе [7] рассматривается также задача Зарембы и обсуждается вопрос повышенной суммируемости градиента решения уравнения $p(x)$ -Лапласа для одного частного случая.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже предполагается, что открытое на ∂D множество G , на котором задано однородное условие Неймана (см. (1.2)), принадлежит части границы $\Gamma = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ области D . Таким образом, замкнутое множество F , являющееся носителем однородного условия Дирихле, можно представить в виде объединения двух замкнутых множеств. А именно,

$$F = F_1 \cup F_2, \quad (2.1)$$

где $F_1 = \Gamma \setminus G$, $F_2 = \overline{\partial D \setminus \Gamma}$.

Нас не интересует тривиальный случай, когда множество F_1 пусто. В задачах теории усреднения интересна ситуация быстрой смены краевых условий Дирихле и Неймана на части границы Γ , о чем будет сказано ниже. Поэтому нам понадобится условие на структуру множества F_1 . Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ емкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < 2$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \phi|^q dx : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \phi \geq 1 \text{ на } K \right\}. \quad (2.2)$$

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый круг радиуса r с центром в точке x_0 . Сформулируем ограничение на множество F_1 .

А. Если $1 < p \leq 2$, то при $q = (p+1)/2$ предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F_1$ при $r \leq 1$ справедливо неравенство

$$C_q(F_1 \cap \overline{B_r^{x_0}}) \geq c_0 r^{2-q}, \quad (2.3)$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r .

В. Если $p > 2$, то предполагается, что множество F_1 не пусто: $F_1 \neq \emptyset$.

В частности, условие (2.3) при $q = 3/2$ выполнено для классического канторовского множества F_1 на отрезке $[0, 1]$, а при $1 < q < 3/2$ для канторового множества F_1 на $[0, 1]$, также имеющего нулевую линейную меру $mes_1(F_1)$. Построение таких канторовых множеств основано на результатах работы [8].

Отметим, что из условия $mes_1(F_1 \cap \overline{B_r^{x_0}}) \geq c_0 r$, аналогичного (2.3), вытекает и само условие (2.3). Это следует из оценки предложения 4 [9, § 9.1]. Кроме того, поскольку $mes_1(F) > 0$, то неравенство Фридрихса (1.1) хорошо известно, что влечет однозначную разрешимость задачи (1.2).

Приведем пример быстрой смены однородных краевых условий Дирихле и Неймана на части границы Γ . Отрезок на оси абсцисс $[0, 1]$ разделим на равные чередующиеся отрезки длины ε , где $\varepsilon = \frac{1}{N}$, и объединение отрезков с четными (или нечетными) номерами обозначим через F_1 . В этом случае условие (2.3) при $1 < p \leq 2$ выполнено с постоянной c_0 , не зависящей от ε .

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если $f \in L_{p+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, то существует положительная постоянная $\delta < \delta_0$, зависящая только от δ_0 и p , такая, что для решения задачи (1.2) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{p'(1+\delta/p)} dx, \quad (3.1)$$

в которой константа C зависит только от p , δ_0 и величины c_0 из (2.8) при $1 < p \leq 2$. При $p > 2$ постоянная C зависит только от p и δ_0 .

Доказательство. Ниже $Q_r^{x_0}$ означает открытый квадрат с центром в точке x_0 со сторонами длиной $2r$, параллельными координатным осям, а $|Q_r^{x_0}|$ — мера данного квадрата и полагается

$$\oint_{Q_r^{x_0}} f dx = \frac{1}{|Q_r^{x_0}|} \int_{Q_r^{x_0}} f dx.$$

Продолжим решение u задачи (1.2) чётно относительно оси абсцисс, оставив за продолжением предыдущее обозначение, и положим

$$\tilde{D} = \{(x, y) : 0 < x < 1, -1 < y < 1\} \setminus F_1.$$

Продолженная функция u является решением задачи Дирихле

$$\Delta_p u = l_{\tilde{f}} \quad \text{в } \tilde{D}, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial \tilde{D}. \quad (3.2)$$

Компоненты вектор-функции $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$, участвующей в представлении функционала $l_{\tilde{f}}$ (см. (1.4)), определяются равенствами: $\tilde{f} = f$ в D и $\tilde{f}(x, y) = (f_1(x, -y), -f_2(x, -y))$ в $\tilde{D} \setminus (D \cup F_1)$. Далее полагаем $u = 0$ и $\tilde{f} = 0$ вне области $\tilde{D}$. Ясно, что продолженная нулем функция u принадлежит соболевскому пространству $W_p^1(\mathbb{R}^2)$.

Следующий шаг — доказательство обратного неравенства Гёльдера для градиента u решения задачи (3.10), которое удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\tilde{D}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\tilde{D}} \tilde{f} \cdot \nabla \varphi dx \quad (3.3)$$

на всех пробных функциях $\varphi \in W_p^1(\tilde{D})$ с нулевым следом на $\partial \tilde{D}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \subset \tilde{D}$ и выберем в интегральном тождестве (3.3) пробную функцию $\varphi = (u - \lambda)\eta^p$, где

$$\lambda = \oint_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} u dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0})$ такова, что $0 < \eta < 1$, $\eta = 1$ в $Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^p \eta^p dx &= -p \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^{p-1} (u - \lambda) |\nabla u|^{p-1} \nabla u \cdot \nabla \eta dx + \\ &+ \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^p \tilde{f} \cdot \nabla u dx + p \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^{p-1} (u - \lambda) \tilde{f} \cdot \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Из выбора срезающей функции η и неравенства Юнга, примененного к подынтегральным выражениям в правой части данного равенства, получим

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^p dx \leq C(p) \left(R^{-p} \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |u - \lambda|^p dx + \int_{Q_R^{x_0}} |\tilde{f}|^{p'} dx \right). \quad (3.4)$$

Пользуясь здесь неравенством Пуанкаре—Соболева

$$\left(\oint_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |u - \lambda|^p dx \right)^{1/p} \leq C(p) R \left(\oint_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q},$$

где $q = (p+1)/2$ при $1 < p \leq 2$ и $q = (p+2)/2$ при $p > 2$, найдем

$$\begin{aligned} \left(\oint_{Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} &\leq \\ &\leq C \left(\left(\oint_{Q_R^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left(\oint_{Q_R^{x_0}} |\tilde{f}|^{p'} dx \right)^{1/p} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $C = C(p)$. Пусть теперь x_0 принадлежит замыканию $\tilde{D}$ и $Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \partial \tilde{D} \neq \emptyset$. Выберем в интегральном тождестве (3.3) пробную функцию $\varphi = u\eta^p$ с такой же срезающей функцией η , что и ранее.

В результате получаем оценку (3.4) с $\lambda = 0$, в силу которой

$$\int_{Q_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^p dx \leq C(p) \left(R^{-p} \int_{Q_R^{x_0}} |u|^p dx + \int_{Q_R^{x_0}} |\tilde{f}|^{p'} dx \right). \quad (3.6)$$

Перейдем к оценке первого интеграла в правой части (3.6). Сначала рассмотрим случай, ко-

гда $Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap F_1 \neq \emptyset$. Тогда найдется точка $z_0 \in Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap F_1$ такая, что $\overline{B_r^{z_0}} \in Q_R^{x_0}$. Пусть сначала $1 < p \leq 2$, выполнено условие (2.8) и $q = (p+1)/2$. Поскольку функция u продолжена нулем вне области $\tilde{D}$, то при выполнении условия (2.8) справедливо неравенство В.Г. Мазьи теоремы [9, § 10.1]

$$\left(\int_{Q_R^{x_0}} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq CR \left(\int_{Q_R^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} \quad (3.7)$$

с постоянной C , зависящей только от p и c_0 . Если $p > 2$, множество F_1 не пусто и $q = (p+2)/2$, то нужно воспользоваться определением внутреннего (кубического) диаметра открытого множества (см. [9, конец § 10.2]) и воспользоваться теоремой 1 из § 10.2.3 монографии [9]. В результате вновь придем к оценке (3.7) с постоянной C , зависящей только от p .

Осталось предположить, что $Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap (\partial \tilde{D} \setminus F_1) \neq \emptyset$.

Тогда для двумерной меры Лебега L_R множества $Q_R^{x_0} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{D})$ справедлива оценка $L_R \geq CR^2$. Поскольку $u = 0$ вне $\tilde{D}$, то хорошо известно, что неравенство (3.7) с постоянной $C = C(p)$ выполнено и в этом случае.

Таким образом, в силу (3.6) и (3.7) вновь приходим к (3.5). Ясно, что оценка (3.6) выполнена и для квадратов с центрами, лежащими вне $\tilde{D}$. Итак, соотношение (3.5) имеет место для любых квадратов. Поскольку $|f| \in L_{p+\delta_0}(D)$ и мы пользовались продолжением, сохраняющим норму, то по модифицированной лемме Геринга (см. [10], [11, гл. VII]) в каждом из рассматриваемых случаев относительно показателя p существует положительная постоянная $\delta(\delta_0, p) < \delta$ такая, что

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D)} \leq C(\|\nabla u\|_{L_p(D)} + \|f\|_{L_{p+\delta}(D)}^{p'/p}),$$

где C зависит только от p , δ_0 и величины c_0 из (2.3) при $1 < p \leq 2$, а при $p > 2$ — только от p и δ_0 .

Теперь, исходя из энергетического неравенства для градиента решения задачи (1.2), которое вытекает из интегрального тождества (1.5) с пробной функцией $\varphi = u$, приходим к искомой оценке (3.1). Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что в настоящей работе использовался существенно модифицированный метод из [12].

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если замкнутое множество F носителя данных Дирихле задачи Зарембы (1.2) принадлежит только части границы $\Gamma = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ области D , то, как нетрудно видеть (см. (2.6)), что $F = F_1$ и $F_2 = \emptyset$. Теорема 1 справедлива и в этом случае. В отличие от приведенного доказательства здесь нужно пользоваться не только четным продолжением решения относительно оси абсцисс, но и четными продолжениями решения относительно трех остальных сторон квадрата, каковым является область D . Результат остается в силе и для произвольной ограниченной строго липшицевой области D . Главным отличием от приведенного доказательства будет использование техники локального распрямления границы области D . Задачу (1.2) можно рассмотреть и в n -мерном круговом ограниченном цилиндре, предполагая, что данные Неймана заданы только на одном из оснований цилиндра, а замкнутое множество F_1 , принадлежащее этому основанию, имеет тот же смысл, что и выше. В этом случае емкость компакта из (2.7) определяется в $\mathbb{R}^n$ при $1 < q < n$. При $p > n$ множество F_1 предполагается не пустым, а при $1 < p \leq n$ требуется выполнение условия вида (2.8): $C_q(F_1 \cap \overline{B_r^{x_0}}) \geq c_0 r^{n-q}$, где $B_r^{x_0}$ означает открытый n -мерный шар радиуса r с центром в x_0 . Предполагается $q = (p+1)/2$, если $p \in (1, n/(n-1)]$, а если $p \in (n/(n-1), n]$, где $n > 2$, то $q = np/(n+p)$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый, третий и четвертый авторы (ЮАА, МАК и АГЧ) поддержаны грантом РНФ (проект 22-21-00292). Второй автор (ЧД) поддержан по программе “Modeling, Simulation and Optimization of Complex Systems”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных задач. Москва: Издательство Мир, 1972.
2. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43 (85). С. 451–503.
3. Meyers N.G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. 1963. Т. 17. Р. 189–206.
4. Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона // Доклады РАН. 2021. Т. 497. С. 3–6.
5. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form // C R Mécanique. 2021. V. 349. P. 299–304.

6. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A., Maz'ya V.G. On the Boggio–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem // ARMA. 2022. <https://doi.org/10.1007/s00205-022-01805-0>
7. Жиков В.В., Пастухова С.Е. О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 12. С. 19–52.
8. Мазья В.Г., Хавин В.П. Нелинейная теория потенциала // УМН. 1972. Т. 27. С. 67–138.
9. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1985.
10. Gehring F.W. The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
11. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
12. Giaquinta M., Modica G. Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems // J. Reine Angew. Math. 1979. V. 311–312. P. 145–169.

ON HIGHER INTEGRABILITY OF THE GRADIENT OF SOLUTIONS TO THE ZAREMBA PROBLEM FOR p -LAPLACE EQUATION

Yu. A. Alkhutov^a, C. D'Apice^b, M. A. Kisatov^c, and A. G. Chechkina^{c,d}

^a A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation

^b Università degli Studi di Salerno, Fisciano (SA), Italia

^c M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^d Institute of Mathematics with Computing Center — Subdivision of the Ufa Federal Research Center
of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A higher integrability of the gradient of a solution to the Zaremba problem in a bounded Lipschitz plane domain is proved for the inhomogeneous p -Laplace equation.

Keywords: Zaremba problem, Meyers estimates, p -capacity, imbedding theorems, higher integrability

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ПОЛНОЦВЕТНЫХ РАСКРАСОК СЛУЧАЙНОГО ГИПЕРГРАФА

© 2023 г. Д. Н. Тяпкин¹, Д. А. Шабанов²

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым

Поступило 30.03.2023 г.

После доработки 05.05.2023 г.

Принято к публикации 20.05.2023 г.

В работе исследуется структура множества полноцветных раскрасок в три цвета у случайного гиперграфа в равномерной модели $H(n, k, m)$. Хорошо известно, что свойство наличия полноцветной раскраски в заданное число цветов r имеет точную пороговую функцию, такое пороговое значение $\hat{m}_r = \hat{m}_r(n)$, что для любого $\varepsilon > 0$ при $m \leq (1 - \varepsilon)\hat{m}_r$ случайный гиперграф $H(n, k, m)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, обладает подобной раскраской, а при $m \geq (1 + \varepsilon)\hat{m}_r$ – наоборот, не обладает подобной раскраской с вероятностью, стремящейся к 1. Мы исследуем алгоритмическую границу для свойства полноцветной раскраски в три цвета и доказываем, что если параметр m принимает значения несколько меньше, чем $\hat{m}_3$, то множество трехцветных полноцветных раскрасок $H(n, k, m)$ хоть и не пусто с вероятностью, стремящейся к 1, но при этом подчиняется эффекту шаттеринга, впервые описанного в работе Д. Аклиоптаса и А. Койя-Оглана 2008 г.

Ключевые слова: случайный гиперграф, раскраски гиперграфов, полноцветные раскраски, шаттеринг

DOI: 10.31857/S2686954323600179, **EDN:** PURWMK

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованиям по теории случайных графов и гиперграфов. Приведем сначала основные определения и обозначения.

1.1. Основные определения

Гиперграфом H в дискретной математике называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – это множество вершин, а $E = E(H) \subseteq 2^V$ – это семейство подмножеств вершин, называемых ребрами. Гиперграф называется k -однородным, если всякое ребро является k -подмножеством вершин. В частно-

сти, 2-однородные гиперграфы – это в точности обычные графы без петель и кратных ребер.

В настоящей работе мы изучаем классическую модель случайного гиперграфа $H(n, k, m)$, являющуюся случайным элементом с равномерным распределением на всех k -однородных гиперграфах с n вершинами и m ребрами. Также $H(n, k, m)$ называется *равномерной моделью* случайного гиперграфа. В рамках статьи мы предполагаем, что $k \geq 3$ фиксировано, $n \rightarrow +\infty$, а $m = m(n)$ некоторым образом зависит от n .

Раскраской гиперграфа H в r цветов называется отображение $\sigma : H \rightarrow [r] = \{1, \dots, r\}$. Раскраска называется *правильной*, если в ней всякое ребро гиперграфа не является одноцветным. Раскраска называется *полноцветной*, если в ней всякое ребро содержит вершины всех r цветов.

Для двух гиперграфов A, B обозначим через $\text{Hom}(A, B)$ множество гомоморфизмов из гиперграфа A в гиперграф B . Для двух раскрасок τ и σ гиперграфа H обозначим через $\text{dist}(\sigma, \tau)$ расстояние Хэмминга между ними: $\text{dist}(\sigma, \tau) = |\{v \in V(H) \mid \sigma(v) \neq \tau(v)\}|$.

Наконец, будем говорить, что последовательность событий $\mathcal{E}_n$ на вероятностном простран-

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, факультет компьютерных наук; Московский физико-технический институт, лаборатория комбинаторных и геометрических структур, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт, лаборатория комбинаторных и геометрических структур; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, факультет компьютерных наук, Москва, Россия

*E-mail: dtyapkin@hse.ru

**E-mail: shabanov.da@mipt.ru

стве выполняется *асимптотически почти наверное* (а.п.н.), если $\lim_{n \rightarrow +\infty} P[\mathcal{C}_n] = 1$.

1.2. История и постановка задачи

Раскраски графов и гиперграфов имеют широкое применение не только в теоретической информатике как пример вычислительно-сложной задачи, но и в статистической физике [1]. Известно, что задача нахождения хроматического числа графа является NP-трудной [2, 3]. Более того, в случае графов искать сложно даже приближенное решение [4].

Ситуация становится заметно более интересной, когда мы рассматриваем “случайный” граф или гиперграф и допускаем некоторую вероятность ошибки. В самых естественных моделях случайных графов и гиперграфов – равномерной и биномиальной, возникает эффект пороговых функций и вероятностей, когда асимптотика вероятности наличия раскраски быстро меняется от 1 до 0 при увеличении среднего числа ребер. Тем самым мы можем сразу говорить о наличии (с большой вероятностью) искомой раскраски, если среднее число ребер находится ниже порогового значения. Обсудим данный феномен более детально на примере проблемы правильной 2-раскрашиваемости случайного k -однородного гиперграфа $H(n, k, m)$.

Задаче о нахождении точной пороговой функции для свойства 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n, k, m)$ была поставлена Алоном и Спенсером в [5]. Они показали, что пороговому значению отвечает так называемый разреженный случай, когда число ребер $m = cn$ является линейной функцией от числа вершин, т.е. $c > 0$ не зависит от n . Сформулируем результаты [5] в виде теоремы.

Теорема 1 (Н. Алон, Дж. Спенсер, [5]). 1) Если

$$c > 2^{k-1} \ln 2 - \frac{\ln 2}{2} + o_k(1), \quad (1)$$

то а.п.н. случайный гиперграф $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ не допускает правильной раскраски в два цвета.

2) Существует такая абсолютная константа $\delta > 0$, что если

$$c < \delta \cdot \frac{2^k}{k^2}, \quad (2)$$

то а.п.н. для $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ существует правильная раскраска в два цвета.

В дальнейшем оценки (1), (2) неоднократно улучшались (см. [6–8]). Наилучший из известных результат был получен А. Койя-Огланом и К. Панайоту [9].

Теорема 2 (А. Койя-Оглан, К. Панайоту, [9]).

Существует такая функция $\varepsilon(k) = 2^{-k(1+o_k(1))}$, что если

$$c > 2^{k-1} \ln 2 - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2} + \varepsilon(k), \quad (3)$$

то а.п.н. случайный гиперграф $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ не допускает правильной раскраски в два цвета. А если

$$c < 2^{k-1} \ln 2 - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2} - \varepsilon(k), \quad (4)$$

то а.п.н. для $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ существует правильная раскраска в два цвета.

Оценки (3), (4) показывают, что пороговое значение параметра c весьма хорошо локализовано. Однако даже эти результаты не позволяют решить проблему алгоритмического нахождения раскраски в ситуации, когда число ребер меньше порога правильной 2-раскрашиваемости и мы знаем, что такая раскраска для случайного гиперграфа существует с вероятностью, близкой к 1. На рубеже веков в ряде работ были предложены *полиномиальные* алгоритмы для поиска правильной раскраски у случайных графов и гиперграфов. Но эти результаты показывали, что предложенный алгоритм работает, только если число ребер заметно меньше порогового значения. Например, в работе Д. Аклиоптаса, Дж. Кима, М. Кривелевича, П. Тетали [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 3 (Д. Аклиоптас, Дж. Ким, М. Кривелевич, П. Тетали, [6]). Если

$$c < \frac{1}{25} \frac{2^k}{k}, \quad (5)$$

то существует полиномиальный алгоритм, который а.п.н. находит правильную 2-раскраску случайного гиперграфа $H(n, k, \lceil cn \rceil)$.

Отметим, что оценка (5) по порядку в k раз меньше, чем пороговое значение (см. (3), (4)). Аналогична ситуация и для свойств раскраски случайных графов в заданное r цветов (см. [10–12]): между значениями числа ребер графа, при котором существует раскраска, и при котором ее способен найти алгоритм, существует зазор примерно в 2 раза. Данное наблюдение привело исследователей к простому выводу: около порогового значения сама структура множества правильных раскрасок графа или гиперграфа препятствует построению быстрого алгоритма для поиска хотя бы одного из ее элементов. В математическое утверждение подобное наблюдение было оформлено в прорывной работе Д. Аклиоптаса и А. Койя-Оглана [13]. Авторы [13] доказали, что при значении c , достаточно близком к (4), происходит некоторый фазовый переход пространства правильных 2-раскрасок $H(n, k, \lceil cn \rceil)$: оно дробится на экспоненциально большое число маленьких об-

ластей, и чтобы пройти между ними, нужно перекрасить очень много вершин, при этом во время перекраски по одной вершине мы гарантированно попадем в ситуацию, когда будет неправильно покрашено большое число ребер. Этот эффект был назван *шаттерингом*, так как в этом случае пространство решений буквально рассыпается на маленькие осколки. Более точное описание шаттеринга мы дадим в следующем параграфе, а пока лишь отметим, что авторы [13] доказали его возникновение при

$$c = \frac{2^{k-1} \ln k}{k} (1 + o_k(1)). \quad (6)$$

Тем самым нижняя граница (6) практически совпадает с алгоритмической (5), а верхняя очень близка с пороговой (3)–(4).

Целью настоящей работы было исследование феномена шаттеринга для другого вида раскрасок гиперграфов, который является естественным обобщением правильных 2-раскрасок, а именно — для полноцветных раскрасок в 3 цвета. Полноцветные раскраски гиперграфов были впервые предложены для изучения в классической работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [14] и с тех пор активно изучаются. Известно (см. [15]), что задача о поиске полноцветной раскраски NP-трудна, поэтому задача нахождения барьеров в случайных гиперграфах для вычисления этих раскрасок на случайных данных также крайне интересна.

Пороговая функция для свойства полноцветной 3-раскрашиваемости случайного гиперграфа хорошо изучена. Имеет место следующая теорема, доказанная Д. Кравцовым, Н. Крохмалем и Д. Шабановым [16].

Теорема 4 (Д. Кравцов, Н. Крохмаль, Д. Шабанов, [16]). *Существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $k > k_0$ выполнено следующее. Если*

$$c < \frac{\ln 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k}{3} - \frac{\ln 3}{2} + \mathbb{O}_k \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k \right), \quad (7)$$

то а.п.н. для случайного гиперграфа $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ существует полноцветная раскраска в 3 цвета. А если

$$c > \frac{\ln 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k}{3} - \frac{\ln 3}{2} + \mathbb{O}_k \left(\left(\frac{3}{4} \right)^k \right), \quad (8)$$

то а.п.н. случайный гиперграф $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ не допускает полноцветных раскрасок в 3 цвета.

В заключение обзора литературы отметим, что обобщение теоремы 4 на случай полноцветных r -раскрасок, $r \geq 4$, было найдено в работе [17], а некоторые результаты о структуре множества правильных раскрасок в r цветов около порогового значения были получены в [18].

2. НОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата работы введем еще несколько обозначений. Множество раскрасок в r цветов гиперграфа H на n вершинах обозначим через $\mathcal{C}_r(n)$. Расстояние Хэмминга порождает на множестве $\mathcal{C}_r(n)$ структуру графа, в которой мы считаем раскраски вершинами и соединяем ребром те пары, которые находятся на единичном расстоянии, т.е. отличаются цветом лишь одной вершины гиперграфа. Для гиперграфа H определим *функцию высоты* $\rho_H : \mathcal{C}_r(n) \rightarrow \mathbb{N}$, которая сопоставляет каждой раскраске количество ребер с нарушенными ограничениями: в случае полноцветных 3-раскрасок — это количество ребер, в которых отсутствуют вершины хотя бы одного из трех цветов. Через $\mathcal{S}(H)$ обозначим множество раскрасок с нулевым значением функции высоты: $\mathcal{S}(H) = \{\sigma \in \mathcal{C}_r(n) \mid \rho_H(\sigma) = 0\}$, т.е. это и есть искомое множество полноцветных раскрасок в 3 цвета.

В соответствии с метрикой введем понятие *высоты пути* $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in \mathcal{C}_r(n)$ как максимальную высоту вершин на этом пути: $\rho_H(\sigma_1, \dots, \sigma_t) = \max_{i=1, \dots, t} \rho_H(\sigma_i)$, *кластера* как множество связанных компонент $\mathcal{S}(H)$ и *региона* как непустое объединение кластеров.

Нас будут интересовать типичная структура $\mathcal{S}(H(n, k, m))$, как соответствующего случайного подмножества $\mathcal{C}_r(n)$.

О п р е д е л е н и е 1. *Множество полноцветных 3-раскрасок гиперграфа $H(n, k, m)$ претерпевает шаттеринг, если существуют такие четыре константы $\beta, \gamma, \zeta, \theta > 0$, что а.п.н. $\mathcal{S}(H(n, k, m))$ можно разделить на регионы со следующими условиями:*

1. количество регионов не меньше $\exp(\beta n)$;
2. во всяком регионе содержится не более чем $\exp(-\gamma n)$ доли всех полноцветных 3-раскрасок;
3. расстояние между любыми двумя регионами не менее ζn ;
4. каждый путь между двумя вершинами двух различных регионов имеет высоту не менее θn .

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему работы.

Теорема 5. *Существует такая последовательность ε_k с условием $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что для всех c , удовлетворяющих неравенству*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{\ln k + \ln 2}{3k} \leq c \leq (1 - \varepsilon_k) \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{\ln 3}{3},$$

пространство полноцветных 3-раскрасок случайного k -однородного гиперграфа $H(n, k, \lceil cn \rceil)$ претерпевает шаттеринг с вероятностью, стремящейся к 1.

Отметим, что полученная верхняя граница соответствует нижней оценке порогового значения из работы [16] (см. (7), (8)), а нижняя граница, как и в (6), примерно в k раз ее меньше, что говорит о ее потенциальной близости к алгоритмической границе.

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Изложим общий план доказательства в виде трех последовательных шагов.

3.1. Теорема о переносе

Наша основная задача — исследовать “типичное” поведение множества почти всех полноцветных 3-раскрасок с большой вероятностью, поэтому разумно исследовать “типичные раскраски”. Формально это можно описать при помощи равномерного распределения на множестве полноцветных 3-раскрасок случайного гиперграфа.

Обозначим через $\Lambda_{n,m} = \{(H, \sigma) : H \in \mathcal{H}_{n,m}, \sigma \in \mathcal{S}(H)\}$, где $\mathcal{H}_{n,m}$ — множество всех k -однородных гиперграфов на n вершинах с m ребрами. Это интересующее нас множество пар. На этом множестве можно рассмотреть распределение $\mathcal{U}_{n,m}$, задающееся следующим образом:

1. выберем $H \in \mathcal{H}_{n,m}$ равновероятно;
2. если $\mathcal{S}(H) \neq \emptyset$, то выберем $\sigma \in \mathcal{S}(H)$ равновероятно.

Но исследовать подобный объект крайне сложно. Вместо этого существует другая, более простая для анализа модель, которая называется *planted model* и обозначается $\mathcal{P}_{n,m}$, и задается она перестановкой выбора раскраски и гиперграфа:

1. выберем $\sigma \in \mathcal{C}_3(n)$ равновероятно;
2. выберем $H \in \mathcal{H}_{n,m}$ равновероятно среди всех таких гиперграфов, что $\sigma \in \mathcal{S}(H)$.

Но тогда нам нужно уметь переносить результаты, которые мы сможем доказать для $\mathcal{P}_{n,m}$, в модель $\mathcal{U}_{n,m}$. Для этого нами доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы из [13] на случай полноцветных раскрасок.

Теорема 6 [о переносе]. *Существует такое $\varepsilon_k = o_k(1)$, что если*

$$c \leq (1 - \varepsilon_k) \frac{\ln 3}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^k,$$

то существует такая функция $f(n) = o(n)$, что для всякого свойства $\mathcal{E}$ пар (H, σ) с условием

$$P(\mathcal{P}_{n, \lceil cn \rceil} \in \mathcal{E}) \geq 1 - \exp(-f(n)),$$

выполнено $P(\mathcal{U}_{n, \lceil cn \rceil} \in \mathcal{E}) = 1 - o(1)$.

Ключевым фактом, необходимым для доказательства теоремы 6, является следующая лемма.

Лемма 1. *Существуют такие функция $g(n) = o(n)$ и последовательность $\varepsilon_k = o_k(1)$, что при*

$$c \leq (1 - \varepsilon_k) \frac{\ln 3}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

а.п.н. верно

$$|\mathcal{S}(H(n, k, \lceil cn \rceil))| \geq e^{-g(n)} \cdot E|\mathcal{S}(H(n, k, \lceil cn \rceil))|.$$

Доказательство леммы 1, в свою очередь, требует использования результатов о методе второго момента из работы [16], а также обоснования существования точной пороговой функции для свойства существования хотя бы N гомоморфизмов (при $0 < N < o(3^n)$) в случайном гиперграфе $H(n, k, m)$.

Для этого мы обобщили результат Х. Хатами и М. Моллоя [19] о точном пороге существования гомоморфизма между гиперграфами до точного порога для свойства существования хотя бы N гомоморфизмов.

Лемма 2. *Пусть R — фиксированный k -однородный гиперграф с r вершинами, а $N = N(n)$ — некоторая функция с условиями $0 < N < o(r^n)$. Тогда свойство $\mathcal{A}_N = \{H : |\text{Hom}(H, R)| \leq N\}$ имеет точную пороговую функцию в модели $H(n, k, m)$, т.е. существует такая функция $\hat{m} = \hat{m}(n)$, что для любого $\delta > 0$ при $m \leq (1 - \delta)\hat{m}$ выполнено*

$$P(H(n, k, m) \in \mathcal{A}_N) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

а при $m \geq (1 + \delta)\hat{m}$ выполнено

$$P(H(n, k, m) \in \mathcal{A}_N) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Прямым следствием леммы 2 является существование точной пороговой функции для свойства наличия хотя бы N полноцветных 3-раскрасок. Отметим, что лемма 2 имеет самостоятельный интерес.

3.2. Анализ *planted model*

Согласно определению модели $\mathcal{P}_{n,m}$ она состоит из случайной раскраски σ и выбираемой по ней случайного гиперграфа H . Рассмотрим их как функции $\sigma = \sigma(\mathcal{P}_{n,m})$, $H = H(\mathcal{P}_{n,m})$.

Для любой раскраски $\tau \in \mathcal{C}_3(n)$ введем матрицу $A_{\sigma, \tau} = (a_{ij}(\sigma, \tau) : i, j = 1, 2, 3)$, где

$$a_{ij}(\sigma, \tau) = \frac{3}{n} |\sigma^{-1}(i) \cap \tau^{-1}(j)|$$

— число вершин, покрашенных в цвет i в раскраске σ и в цвет j в раскраске τ . Если раскраски были заранее фиксированы, то будем опускать зависи-

мость от них: $a_{ij} = a_{ij}(\sigma, \tau)$, $A = A_{\sigma, \tau}$. Рассмотрим далее следующую функцию:

$$q(\sigma, \tau) = \sum_{i,j=1}^3 [(1 + a_{ij})^k - 2(1 - a_{ij})^k + a_{ij}^k]. \quad (9)$$

Эта функция будет в некотором смысле играть роль оценки расстояния, однако эта мера будет вырожденной: слагаемые могут быть отрицательными, но по-прежнему мы можем сформулировать важные технические утверждения, которые по сути будут переформулировкой условий шаттеринга в терминах функции q . Для этого рассмотрим следующую случайную величину:

$$\Gamma_{\sigma, \lambda}(x) = |\{\tau \in \mathcal{C}_3(n) : q(\sigma, \tau) = x, \rho_H(\tau) \leq \lambda n\}|.$$

Выполнена следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $c > c_{\text{shat}} = (3/2)^k \ln(2k)/(3k)$ и $c \leq (1 - \varepsilon_k)(3/2)^k$ для $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда найдутся такие $-1 < y_1 < y_2 < 3(2^k + 1)$ и $\lambda, \gamma > 0$, что пара (H, σ) , выбранная по схеме $\mathcal{P}_{n, \lceil cn \rceil}$, обладает следующими свойствами с вероятностью $1 - \exp(-\Omega(n))$:

1. для всех $x \in [y_1, y_2] : \Gamma_{\sigma, \lambda}(x) = 0$;
2. количество раскрасок $\tau \in \mathcal{S}(H)$ таких, что $q(\sigma, \tau) > y_2$ не больше, чем

$$\exp(n(-\gamma + \ln 3 + c \ln(1 - 3(2/3)^k + 3(1/3)^k))).$$

3.3. Завершение доказательства

При помощи теоремы о переносе 6, леммы 1 и известного значения математического ожидания $\mathcal{S}(H(n, k, \lceil cn \rceil))$ (см. [16]) мы выводим аналог леммы 3 для модели $\mathcal{U}_{n, \lceil cn \rceil}$.

Лемма 4. Пусть $c > c_{\text{shat}} = (3/2)^k \ln(2k)/(3k)$ и $c \leq (1 - \varepsilon_k)(3/2)^k$ для $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда найдутся такие $-1 < y_1 < y_2 < 3(2^k + 1)$ и константы $\lambda, \gamma > 0$, что пара (H, σ) , выбранная по схеме $\mathcal{U}_{n, \lceil cn \rceil}$, обладает следующими свойствами а.п.н.:

1. для всех $x \in [y_1, y_2] : \Gamma_{\sigma, \lambda}(x) = 0$;
2. количество раскрасок $\tau \in \mathcal{S}(H)$ таких, что $q(\sigma, \tau) > y_2$ не больше, чем $e^{-\gamma n} |\mathcal{S}(H)|$.

Наконец, лемма 4 позволяет доказать основную теорему 5. Назовем раскраску σ типичной, если для нее верны оба пункта леммы 4. Для всякой типичной раскраски σ рассмотрим соответствующий ей регион:

$$R_\sigma = \{\tau \in \mathcal{S}(H) : q(\sigma, \tau) > y_2\}.$$

Будем разбивать $\mathcal{S}(H)$ на такие соответствующие регионы. Согласно второму утверждению леммы 4,

в каждом таком регионе содержится не более чем экспоненциально маленькая доля всех правильных раскрасок, откуда напрямую следует, что для того, чтобы покрыть все $\mathcal{S}(H)$, их нужно экспоненциально много. Нетрудно показать, что для всякой $\tau \notin R_\sigma$:

- $\text{dist}(\sigma, \tau) \geq \delta n$ для некоторого $\delta > 0$;
- для всякого пути из σ в τ найдется σ' из этого пути, такая что $q(\sigma, \sigma') \in [y_1, y_2]$.

В силу первого утверждения леммы 4 и определения $\Gamma_{\sigma, \lambda}$ мы сразу получаем утверждение теоремы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00411.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krzakala F., Montanari A., Ricci-Tersenghi F., Semerjian G., Zdeborová L. Gibbs states and the set of solutions of random constraint satisfaction problems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2007. V. 104. № 25. P. 10318–10323. <https://doi.org/10.1073/pnas.0703685104>
2. Karp R.M. Reducibility among Combinatorial Problems // Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations. Springer US. 1972. P. 85–103. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9
3. Dinur I., Regev O., Smyth C. The hardness of 3-Uniform hypergraph coloring // The 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2002. Proceedings. 2002. P. 33–40. <https://doi.org/10.1109/SFCS.2002.1181880>
4. Lund C., Yannakakis M. On the hardness of approximating minimization problems // J. ACM. 1994. V. 41. № 5. P. 960–981. <https://doi.org/10.1145/185675.306789>
5. Alon N., Spencer J. A note on coloring random k -sets // unpublished manuscript, <http://www.cs.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/kset2.pdf>.
6. Achlioptas D., Kim J.H., Krivelevich M., Tetali P. Two-colorings random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 2002. V. 20. № 2. P. 249–259. <https://doi.org/10.1002/rsa.997>
7. Achlioptas D., Moore C. Random k -SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold // SIAM Journal on Computing. 2005. V. 36. № 3. P. 740–762.
8. Coja-Oghlan A., Zdeborová L. The condensation transition in random hypergraph 2-coloring // Proc. 23rd Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms. SIAM. 2012. P.241–250.
9. Coja-Oghlan A., Panagiotou K. Catching the k -NAESAT threshold // Proc. 44th STOC. 2012. P. 899–908.
10. Achlioptas D., Molloy M., The analysis of a list-coloring algorithm on a random graph // Proceedings 38th An-

- nual Symposium on Foundations of Computer Science. 1997. P. 204–212.
11. Coja-Oghlan A., Vilenchik D. The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // International Mathematics Research Notices. 2015. V. 2016. № 19. P. 5801–5859. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnv333>
 12. Coja-Oghlan A. Upper-bounding the k-colorability threshold by counting cover // Electronic Journal of Combinatorics. 2013. V. 20. № 3. Research paper №32. <https://doi.org/10.37236/3337>
 13. Achlioptas D., Coja-Oghlan A. Algorithmic Barriers from Phase Transitions // 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2008. P. 793–802.
 14. Erdős P., Lovász L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 1973. V. 10. P. 609–627.
 15. Guruswami V., Saket R. Hardness of Rainbow Coloring Hypergraphs // 37th IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2017). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2018. V. 93. P. 33:01–33:15. <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2017.33>
 16. Kravtsov D.A., Krokhmal N.E., Shabanov D.A. Panchromatic 3-colorings of random hypergraphs // European Journal of Combinatorics. 2019. V. 78. P. 28–43. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.01.006>
 17. Кравцов Д.А., Крохмаль Н.Е., Шабанов Д.А. Полноцветные раскраски случайных гиперграфов // Дискретная математика. 2019. Т. 31. №2. С. 84–113. <https://doi.org/10.1515/dma-2021-0003>
 18. Ayre P., Greenhill C. Rigid Colorings of Hypergraphs and Contiguity // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2019. V. 33. № 3. P. 1575–1606. <https://doi.org/10.1137/18M1207211>
 19. Hatami H., Molloy M. Sharp thresholds for constraint satisfaction problems and homomorphisms // Random Structures and Algorithms. 2008. V. 33. № 3. P. 310–332. <https://doi.org/10.1002/rsa.20225>

ON THE STRUCTURE OF THE SET OF PANCHROMATIC COLORINGS OF A RANDOM HYPERGRAPH

D. N. Tyapkin^a and D. A. Shabanov^b

^a National Research University “Higher School of Economics”, Faculty of Computer Science, Moscow Institute of Physics and Technology, Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, Moscow, Russian Federation

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, National Research University “Higher School of Economics”, Faculty of Computer Science, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryayev

The paper deals with the structure of the set of panchromatic colorings with three colors of a random hypergraph in the uniform model $H(n, k, m)$. It is well known that the property of the existence of a panchromatic coloring with given number of colors r has the sharp threshold, i.e. there exists the threshold value $\hat{m}_r = \hat{m}_r(n)$ such that for any $\varepsilon > 0$, if $m \leq (1 - \varepsilon)\hat{m}_r$, then the random hypergraph $H(n, k, m)$ admits this coloring with probability tending to 1, but if $m \geq (1 + \varepsilon)\hat{m}_r$, then, vice versa, it does not admit this coloring with probability tending to 1. We study the algorithmic threshold for the property of panchromatic coloring with three colors and prove that if the parameter m is slightly less than $\hat{m}_3$, then the set of panchromatic 3-colorings of $H(n, k, m)$ although it is not empty with a probability tending to 1, but at the same time it obeys the shattering effect, first described in the work of D. Achlioptas and A. Coja-Oghlan in 2008.

Keywords: random hypergraph, colorings of hypergraphs, panchromatic colorings, shattering

УДК 519.63

О ПОИСКЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ВОЛНОВОЙ ИНВЕРСИИ С ПОМОЩЬЮ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, А. С. Станкевич¹, А. В. Васюков^{1,**}

Поступило 09.12.2022 г.

После доработки 19.05.2023 г.

Принято к публикации 28.05.2023 г.

В работе рассматривается вопрос о выборе начального приближения при решении задачи восстановления распределения скоростей в гетерогенной сплошной среде с помощью методов градиентной оптимизации. Для описания поведения среды используется система уравнений акустики, для решения прямой задачи используется конечно-разностная схема. В качестве метода градиентной оптимизации используется L-BFGS-B. Для вычисления градиента функционала ошибки по параметрам среды используется метод сопряженных переменных состояния. Построение начального приближения для градиентного метода выполняется при помощи сверточной нейронной сети, обученной предсказывать распределение скоростей в среде по волновому отклику от нее. В работе показано, что нейронная сеть, обученная на откликах от простых слоистых структур, может быть успешно использована при решении задачи инверсии для существенно более сложной модели Мармузи.

Ключевые слова: акустическая инверсия, численная оптимизация, метод сопряженных переменных состояния, машинное обучение, глубокое обучение, сверточные нейронные сети

DOI: 10.31857/S2686954322600732, **EDN:** SWNWFY

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из типовых задач обработки геофизических данных является восстановление структуры гетерогенной сплошной среды по наблюдаемому волновому отклику от нее. Данную задачу можно отнести к широкому классу коэффициентных обратных задач, общая формулировка которых описывается следующим образом.

$$\begin{cases} Au(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t), & \vec{r} \in G, \quad t \in [0; T] \\ A = A(t, \vec{r}, \{c_j(\vec{r})\}), & j \in \overline{0, N} \\ Pu(t_m, \vec{r}) = f_m(\vec{r}), & t_m \in [0; T], \quad m \in \overline{0, M}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $G \in \mathbb{R}^n$ — область в n -мерном вещественном пространстве, u — набор переменных состояния системы, A — оператор, задающий динамику среды, зависящий от конечного числа неизвестных функций-коэффициентов $\{c_j(\vec{r})\}$. Известно конечное количество функций — наблюдений за средой $f_m(\vec{r})$, которые связаны с вектором пере-

менных $u(t_m)$ в различные моменты времени t_m с помощью оператора проекции P . Такая постановка является некорректной с математической точки зрения, задача решается численно путем оптимизации функционала, сравнивающего данные измерений с результатами моделирования динамики среды. Решение такой задачи инверсии обычно требует наличия тех или иных априорных предположений о структуре среды.

Распространенным методом для получения сейсмических изображений высокого разрешения является метод волновой инверсии (далее — FWI), предложенный в работе [1] для системы уравнений акустики. В рамках данного метода распределение параметров в среде восстанавливается итеративным процессом градиентной минимизации гладкого функционала потерь, измеряющего разницу между волновым откликом, полученным в рамках численного моделирования очередного приближения, и реальными данными.

Такая процедура, в силу ее итерационного характера, является весьма вычислительно затратной. Для ускорения сходимости и повышения вычислительной эффективности метода требуется построение достаточного точного начального приближения распределения параметров среды. Один из возможных способов решения такой задачи — выбор начального приближения для про-

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: a.vasyukov@phystech.edu

цедуры FWI с использованием статистических закономерностей. К примеру, в оригинальной работе [1] для практических приложений предлагается использовать некоторую осредненную модель, получаемую путем сбора статистики по той или иной географической области исследований. В современных работах разными группами авторов разработаны способы уточнения начального приближения, например, путем взвешенного усреднения результатов низкочастотной инверсии [2], или их экстраполяции с помощью моделей машинного обучения [3]. Тем не менее вопрос об инициализации процедуры волновой инверсии в общем случае остается недостаточно изученным.

В данной работе для решения данной задачи предлагается использовать тот факт, что реализация процедуры волновой инверсии в любом случае предполагает наличие средств численного решения прямой начально-краевой задачи, описывающей процедуру исследования целевой среды с помощью упругих волн. В результате решения прямой задачи для произвольного входного распределения параметров в исследуемой среде получается численная сейсмограмма. Таким образом, опираясь на существующие средства решения прямой задачи, могут быть получены пары “распределение свойств в среде — сейсмограмма”. На этих расчетных данных может быть обучена модель глубокого обучения, которая по наблюдаемой сейсмограмме будет получать вероятный вид распределения свойств в среде, для которой данная сейсмограмма была зарегистрирована. Предсказания нейронной сети носят вероятностный характер, в силу чего их неразумно использовать как окончательное решение задачи. В данной работе выход нейронной сети используется в качестве стартовой точки для процесса инверсии с использованием классических градиентных алгоритмов. В работе рассматривается эффективность подобной инициализации в сравнении с линейной интерполяцией, которая часто используется в роли начального приближения. Эффективность в данном случае понимается в смысле того, насколько быстро сходится задача оптимизации для данного начального приближения.

Методы машинного обучения были ранее рассмотрены рядом авторских коллективов для волнового уравнения и его различных приложений [4–6], в том числе конкретно для сейсмической инверсии [7, 8]. Вклад данной работы заключается в том, что рассмотрено использование нейронной сети, обученной на простых данных, для получения начального приближения для достаточно сложной модели Мармузи.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В данной работе предполагается, что распространение импульса в исследуемой сплошной среде подчиняется системе уравнений акустики (2), что является корректным приближением для сред с сильным затуханием сдвиговых волн [9].

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}) \frac{\partial v(\vec{r}, t)}{\partial t} + p(\vec{r}, t) = 0 \\ \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} + \rho(\vec{r}) c^2(\vec{r}) v(\vec{r}, t) = -\alpha(\vec{r}) c(\vec{r}) p(\vec{r}, t). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\rho(\vec{r})$ — плотность среды, $v(\vec{r}, t)$ — вектор скорости, $p(\vec{r}, t)$ — поле давления, $c(\vec{r})$ — скорость звука в среде, $\alpha(\vec{r})$ — коэффициент затухания. В данной работе предполагается, что затухание отсутствует. Для параметризации среды в данной работе используется величина ее акустического импеданса $m = 1/c^2(\vec{r})$, обратно пропорциональная квадрату скорости звука в среде. Классическая постановка задачи сейсморазведки подразумевает распространение импульса в полуплоскости, поэтому на верхней границе расчетной области ставится условие свободной границы, а на всех остальных — поглощающее граничное условие.

Для решения прямой задачи могут быть использованы различные численные методы. Так, в работе [10] для аналогичной задачи для модели акустики предложена компактная схема с использованием сеточно-характеристического численного метода. В данной работе используется явная конечно-разностная схема на регулярной сетке, обеспечивающая четвертый порядок аппроксимации по пространству и второй по времени, предложенная в [11]. На верхней границе расчетной области используется условие свободной границы. Отсутствие отражений волн от прочих границ расчетной области обеспечивает поглощающее условие типа C-PML [12].

Описанная численная схема используется в неизменном виде, в рамках данной работы какое-либо исследование методов решения прямой задачи не проводилось.

Программная реализация решения прямой задачи в данной работе использует библиотеки PyTorch [13] и TorchFWI [14, 15] и поддерживает расчет на видеокартах на базе технологии CUDA.

В качестве метода численной оптимизации в данной работе используется L-BFGS-B [16] — квазиньютоновский алгоритм, использующий вместо матрицы Гессе ее двухточечную аппроксимацию, что значительно повышает его привлекательность в применении к крупномасштабной оптимизации. Взятие градиента функционала ошибки по параметрам среды реализуется с помощью метода сопряженных переменных состоя-

ния [17], получить который можно методом множителей Лагранжа, рассматривая целевую задачу как задачу условной минимизации с ограничениями в виде системы уравнений в частных производных. Применение описанного метода к системе уравнений акустики дает вид (3) для градиента функционала ошибки J по параметрам системы m в точке $\vec{r}$ расчетной области.

$$\frac{\partial J}{\partial m}(\vec{r}) = - \sum_s \int q_s(\vec{r}, T - t) \frac{\partial^2 u_s(\vec{r}, t)}{\partial t^2} dt. \quad (3)$$

Здесь T — итоговое время расчета, а сумма ведется по конечному числу s источников возмущения. Величина q_s определяется из сопряженной системы уравнений, которая, в случае использования среднеквадратичного отклонения в качестве функционала потерь, имеет вид (4).

$$\begin{cases} \tilde{q}_s(0) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{q}_s(0)}{\partial t} = 0 \\ m \frac{\partial^2 \tilde{q}_s}{\partial t^2} - \Delta \tilde{q}_s = \sum_{r,s} P_{s,r}^T (P_{s,r} u_s(T - t) - d_{s,r}(T - t)). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $P_{s,r}$ — оператор проекции, характеризующий снятие измерений, а $d_{s,r}$ — наблюдаемая сейсмограмма.

Для предсказания распределений параметров в среде по входному сигналу используется полносверточная нейронная сеть архитектуры UNet. Используется классическая архитектура UNet [18], содержащая 30 миллионов параметров. Ранее сеть такой архитектуры уже была успешно использована для более простых геологических задач, в работе [19] с ее помощью решалась задача локализации трещиноватых зон по сейсмическому отклику от них. Следует отметить, что уменьшение размерности сети без значимого снижения качества предсказаний представляется реалистичной задачей, но на данном этапе она не рассматривалась.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для обучения и тестирования нейронной сети используется набор данных из 20 тысяч пар “распределение свойств в среде — сейсмограмма”, полученный методами численного моделирования.

Геометрический размер области каждого образца составляет 9192 м по горизонтали и 3192 м по вертикали. Для каждого образца сначала генерируется некоторое распределение свойств в среде. Генерация происходит процедурным образом, алгоритм генерации обеспечивает получение случайных слоистых структур. Каждое такое распре-

деление (изображение) содержит 384 узла сетки (пиксела) по горизонтали и 134 по вертикали. Значение в каждом узле (пикселе) — значение скорости звука в данной точке пространства. Для полученного распределения скоростей звука в среде численно решается прямая задача и получается расчетная сейсмограмма.

При решении прямой задачи шаг регулярной расчетной сетки по пространству равен 5 м. Количество датчиков на верхней границе расчетной области, выполняющих запись сейсмограммы — 384 штуки. Сканирующий импульс задается в центре верхней границы расчетной области.

Примеры сгенерированных распределений параметров в среде, входящие в состав обучающей выборки, представлены на рис. 1. В верхнем ряду приведены распределения скоростей звука в среде. Для них по осям отложены геометрические размеры в метрах, а цветом показана скорость звука в данной точке области, выраженная в м/с. В нижнем ряду приведены расчетные сейсмограммы, для них по вертикальной оси отложен номер датчика на свободной границе, по горизонтальной оси — номер отсчета по времени, а цветом показана отмасштабированная сумма вертикальной и горизонтальной компоненты напруги на данном датчике в данный момент времени.

Полученный набор из 20000 пар разделяется на обучающий, проверочный и тестовый наборы в соотношении: 16000, 3000, 1000 образцов.

На полученных данных обучается сверточная нейронная сеть. Обучение нейронной сети велось с помощью алгоритма оптимизации Adam с постоянным шагом 0.001. В качестве критерия остановки оптимизатора выступала неизменность функции потерь на тестовой выборке в пределах 5% от ее текущего значения в течение 5 эпох обучения, после чего производился перезапуск алгоритма с уменьшенным в 10 раз шагом обучения. Для обучения использовались GPU NVIDIA Tesla K80 12 Gb. В конце обучения точность предсказания, выраженная как попиксельный MSE, составляет 0.099 для проверочного набора и 0.113 для тестового набора.

На рис. 2 приведены примеры предсказаний обученной сети, которые в дальнейшем использовались как начальные точки для работы алгоритма градиентной оптимизации. Справа показаны реальные конфигурации сред, а слева — предсказания их структуры, сделанные нейронной сетью на основании сейсмограммы. По осям отложены геометрические размеры в метрах, цветом показана скорость звука в данной точке области, выраженная в м/с.

Чистое время предсказания для одного образца составляло 0.4 с. С учетом загрузки данных с диска в память и выполнения технических проце-

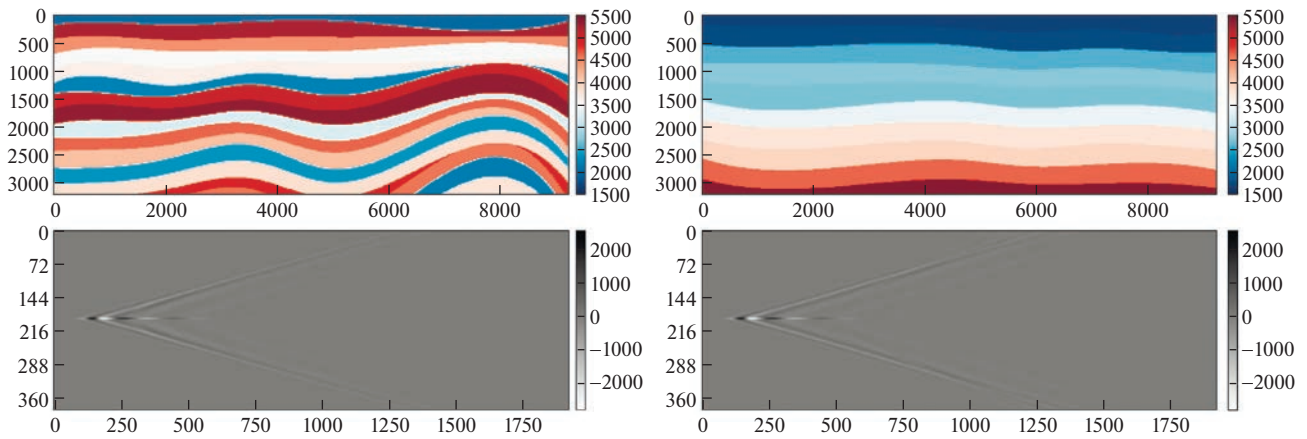


Рис. 1. Примеры сгенерированных случайных слоистых гетерогенных сред (верхний ряд) и сейсмограмм для них (нижний ряд).

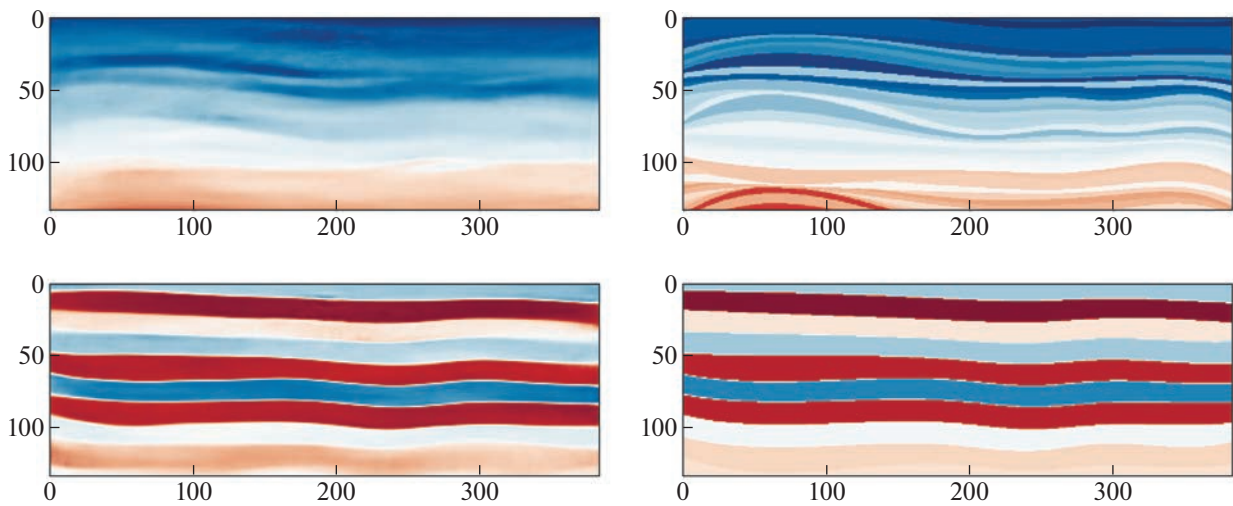


Рис. 2. Примеры предсказаний нейронной сети (слева) и реальных конфигураций сред (справа).

дур полное время получения предсказания составляло 1.2 с для одного образца.

Для тестирования совместной работы нейронной сети и градиентной оптимизации была использована геологическая модель Мармузи [20], которая широко используется при отработке алгоритмов инверсии. На рис. 3 показано истинное распределение параметров среды для данной модели. По осям отложены геометрические размеры в метрах, цветом показана скорость звука в данной точке области, выраженная в м/с.

Из полной модели Мармузи был взят центральный участок размеров 9192 м по горизонтали и 3192 м по вертикали, для него была получена сейсмограмма по той же процедуре, которая ранее была использована для синтетических сгенерированных распределений.

Для данной сейсмограммы с помощью обученной ранее нейронной сети было получено начальное приближение структуры среды. Далее на базе этого начального приближения была выполнена последовательность итераций методом L-BFGS-B. Отдельно следует отметить, что данные Мармузи никаким образом не использовались при обучении нейронной сети. То есть начальное приближение было получено нейронной сетью, которая обучалась исключительно на синтетических данных для случайных слоистых структур.

На рис. 4 приведен натуральный логарифм функционала потерь при проведении 50 итераций градиентной оптимизации алгоритма L-BFGS-B с различными видами начального приближения. Рассматривается начальное приближение, выданное нейронной сетью, и простое линейное

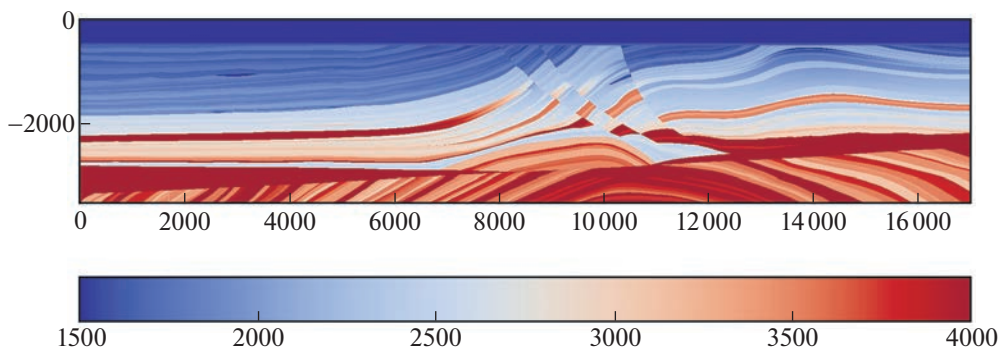


Рис. 3. Распределение скоростей в среде для модели Мармузи.

распределение скорости по глубине. Следует отметить, что данный функционал потерь специфичен для метода градиентной оптимизации и никак не связан с функционалом потерь для самой нейронной сети, предоставившей начальное приближение.

Видно, что при использовании предсказаний нейронной сети в качестве начальной точки, количественное значение функционала оказывается ниже, чем при использовании линейного распределения скорости по глубине.

Из представленных на рис. 4 результатов численных экспериментов видно, что скорость сходимости метода градиентной оптимизации L-BFGS-B при использовании предложенного метода получения начального приближения не изменяется по сравнению с его скоростью сходимости при использовании линейной интерполяции в качестве начального приближения. Однако абсолютное значение функционала потерь при использовании предложенного метода меньше на каждой итерации. Таким образом, для достижения одинакового значения функционала потерь при использовании предложенной инициализа-

ции потребуется меньшее количество итераций градиентного метода.

На рис. 5 показана траектория оптимизатора в пространстве параметров для первых 50 итераций. По осям отложены геометрические размеры в метрах, цветом показана скорость звука в данной точке области, выраженная в м/с. Результат нулевой итерации — предсказание нейронной сети. На качественном уровне видно, что сеть определяет принципиальную локализацию крупных структур. Обеспечить тонкое разрешение структуры слоев и разломов нейронная сеть оказывается не в состоянии, что достаточно ожидаемо с учетом ее обучения на исключительно синтетических геометриях. При этом предсказание нейронной сети оказывается удачным начальным приближением, что иллюстрируют последующие шаги алгоритма, который уверенно сходится к реальной структуре среды.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что сверточная нейронная сеть может быть использована при решении задачи волновой инверсии для быстрого получения начального приближения в пространстве параметров. Получено, что предложенный подход более эффективен, чем линейная интерполяция, которая часто используется в роли начального приближения. Однако следует сразу отметить, что в конкретных случаях лучше может оказаться удачно выбранная иная начальная оценка.

По результатам численных экспериментов получено, что скорость сходимости метода градиентной оптимизации при данном начальном приближении не изменяется по сравнению с его скоростью сходимости при использовании линейной интерполяции в качестве начального приближения. Однако абсолютное значение функционала потерь при использовании предложенного метода меньше на каждой итерации. Таким образом, для достижения одинакового значения функционала потерь при использовании предложенной

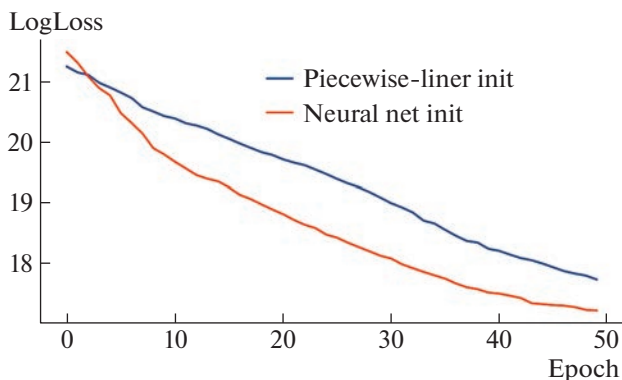


Рис. 4. История минимизации функционала при различных типах инициализации при решении задачи FWI для модели Мармузи с помощью алгоритма L-BFGS-B.

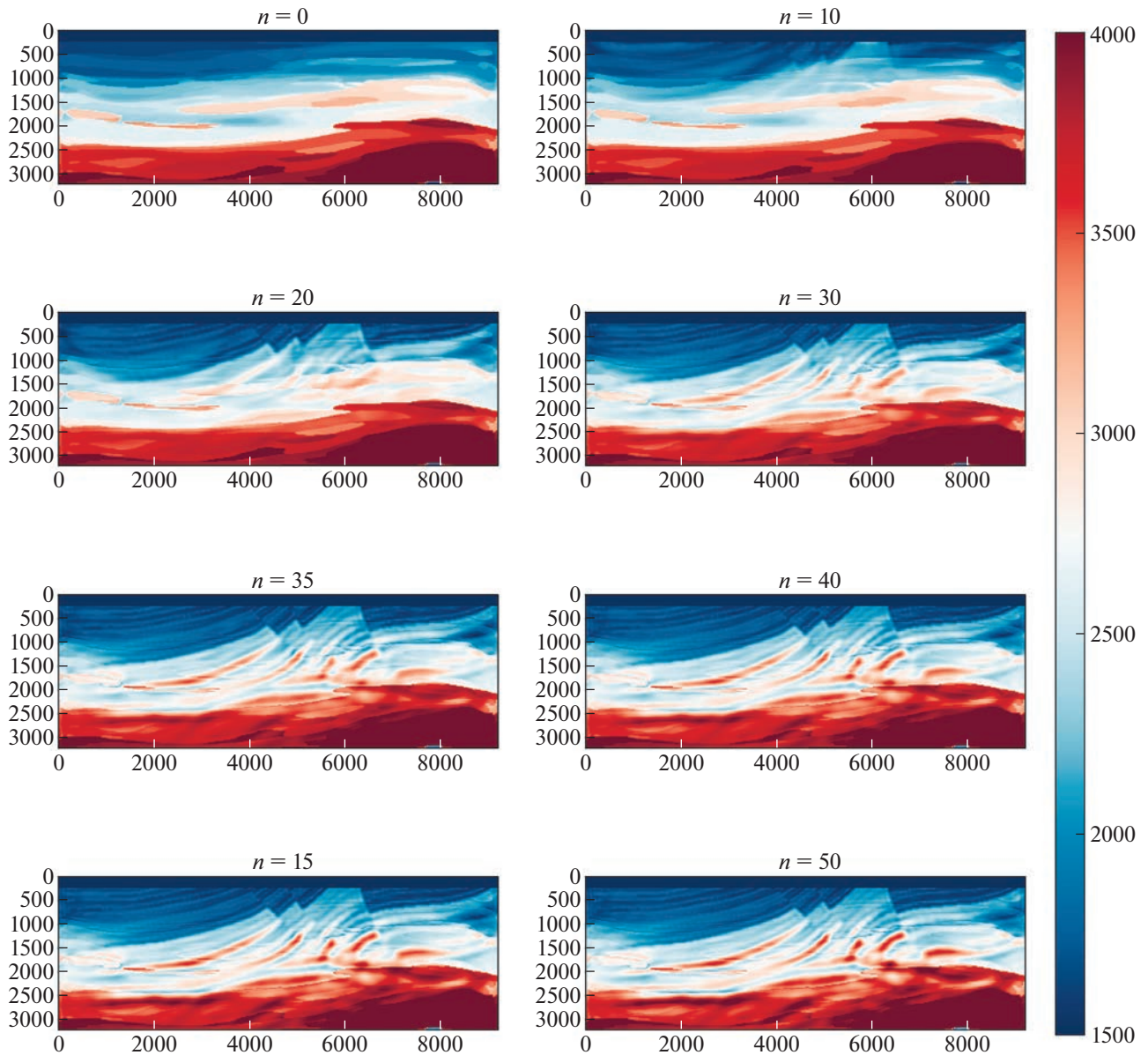


Рис. 5. Траектория L-BFGS-B при решении задачи FWI для модели Мармузи при инициализации предсказанием нейронной сети.

инициализации потребуется меньшее количество итераций градиентного метода.

Отдельно следует отметить, что в данной работе нейронная сеть обучалась на простых слоистых структурах, а для тестирования была использована модель Мармузи, в которую входят еще и разломы. При добавлении в обучающую выборку образцов с разломами можно ожидать дальнейшего улучшения качества работы нейронной сети.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа была выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00142.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tarantola A.* Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // *Geophysics*. 1984. V. 49. № 8. P. 1259–1266.
2. *Ovcharenko O., Kazei V., Peter D., Alkhalifah T.* Variance-based model interpolation for improved full-waveform inversion in the presence of salt bodies // *Geophysics*. 2018. V. 83. № 5. P. R541–R551.
3. *Sun H., Demanet L.* Extrapolated full-waveform inversion with deep learning EFWI-CNN // *Geophysics*. 2020. V. 85. № 3. P. R275–R288.
4. *Li H., Schwab J., Antholzer S., Haltmeier M.* NETT: solving inverse problems with deep neural networks // *Inverse Problems*. 2020. V. 36. № 6. P. 065005.

5. Kothari K., de Hoop M., Dokmani'c I. Learning the Geometry of Wave-Based Imaging // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2020. V. 33. P. 8318–8329.
6. Gahlmann T., Tassin P. Deep neural networks for the prediction of the optical properties and the free-form inverse design of metamaterials // *Phys. Rev. B*. 2022. V. 106. № 8. P. 085408.
7. Adler A., Araya-Polo M., Poggio T. Deep Learning for Seismic Inverse Problems: Toward the Acceleration of Geophysical Analysis Workflows // *IEEE Signal Processing Magazine*. 2021. V. 38. № 2. P. 89–119.
8. Yang F., Ma J. Deep-learning inversion: a next generation seismic velocity-model building method // *Geophysics*. 2019. V. 84. № 4. P. R583–R599.
9. Mast T.D., Hinkelman L.M., Metlay L.A., Orr M.J., Waag R.C. Simulation of ultrasonic pulse propagation, distortion, and attenuation in the human chest wall // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1999. V. 6. P. 3665–3677.
10. Golubev V., Shevchenko A., Khokhlov N., Petrov I., Malovichko M. Characteristic Scheme for the Acoustic System with the Piece-Wise Constant Coefficients // *International Journal of Applied Mechanics*. 2022. V. 14. № 2. P. 2250002.
11. Levander A.R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // *Geophysics*. 1988. V. 53. № 11. P. 1425–1436.
12. Martin R., Komatitsch D., Ezziani A. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave propagation in poroelastic media // *Geophysics*. 2008. V. 73. № 4. P. T51–T61.
13. Paszke A., Gross S., Massa F., Lerer A., Bradbury J., Chanan G., Killeen T., Lin Z., Gimelshein N., Antiga L., Desmaison A., Kopf A., Yang E., DeVito Z., Raison M., Tejani A., Chilamkurthy S., Steiner B., Fang L., Bai J., Chintala S. PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library // *Advances in Neural Information Processing Systems* 32. 2019. P. 8024–8035.
14. Li D., Xu K., Harris J.M., Darve E. Coupled Time-lapse Full Waveform Inversion for Subsurface Flow Problems using Intrusive Automatic Differentiation // 2019. arXiv: 1912.07552.
15. Xu K., Li D., Darve E., Harris J.M. Learning Hidden Dynamics using Intelligent Automatic Differentiation // 2019. arXiv: 1912.07547.
16. Byrd R.H., Nocedal J., Schnabel R.B. Representations of quasi-Newton matrices and their use in limited memory methods // *Mathematical Programming*. 1994. V. 63. № 1. P. 129–156.
17. Plessix R.-E. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications // *Geophysical Journal International*. 2006. V. 167. № 2. P. 495–503.
18. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // *CoRR*. 2015. V. abs/1505.04597. arXiv: 1505.04597.
19. Vasyukov A.V., Nikitin I.S., Stankevich A.S., Golubev V.I. Deep convolutional neural networks in Seismic Exploration problems // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2022. V. 10. № 3. P. 61–74.
20. Brougois A., Bourget M., Lailly P., Poulet M., Ricarte P., Versteeg R. Marmousi, model and data // *EAEG Workshop – Practical Aspects of Seismic Data Inversion*. 1990.

ON OBTAINING INITIAL APPROXIMATION FOR FULL WAVE INVERSION PROBLEM USING CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK

Corresponding Member of the RAS I. B. Petrov^a, A. S. Stankevich^a, and A. V. Vasyukov^a

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

The paper considers the problem of choosing the initial approximation when using gradient optimization methods for solving the inverse problem of restoring the distribution of velocities in a heterogeneous continuous medium. A system of acoustic equations is used to describe the behavior of the medium, and a finite-difference scheme is used to solve the direct problem. L-BFGS-B is used as a gradient optimization method. Adjoint state method is used to calculate the gradient of the error functional with respect to the medium parameters. The initial approximation for the gradient method is obtained using a convolutional neural network. The network is trained to predict the distribution of velocities in the medium from the wave response from it. The paper shows that a neural network trained on responses from simple layered structures can be successfully used to solve the inverse problem for a complex Marmousi model.

Keywords: acoustic inversion, numerical optimization, adjoint state method, machine learning, deep learning, convolutional neural networks

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЗАВИСИМЫМИ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2023 г. С. В. Асташкин^{1,2,3,4,*}

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 26.04.2023 г.

После доработки 27.05.2023 г.

Принято к публикации 30.05.2023 г.

Изучаются подпространства пространства Орлича L_M , порожденные независимыми (в вероятностном смысле) копиями функции $f \in L_M$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$. В терминах растяжений f получена характеристика сильно вложенных подпространств такого типа, а также найдены условия, гарантирующие, что их единичный шар имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M . Выделен класс пространств Орлича, для всех подпространств которых, порожденных независимыми и одинаково распределенными функциями, эти свойства эквивалентны и могут быть охарактеризованы с помощью индексов Матушевской–Орлича.

Ключевые слова: независимые функции, сильно вложенное подпространство, равностепенная непрерывность норм, функция Орлича, пространство Орлича, индексы Матушевской–Орлича

DOI: 10.31857/S2686954323600246, **EDN:** SVONHN

§ 1. Пусть M – функция Орлича, т.е. непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича L_M [1, 2] состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 M(|x(t)|/\lambda) dt \leq 1 \right\}.$$

Аналогично, если ψ – функция Орлича, то пространство Орлича последовательностей ℓ_ψ состоит из всех последовательностей $(a_k)_{k=1}^\infty$, для которых

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_{\ell_\psi} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{k=1}^\infty \psi(|a_k|/\lambda) \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если $M(u) = u^p$ (соотв. $\psi(u) = u^p$), $p \geq 1$, то $L_M = L^p$ (соотв. $\ell_\psi = \ell^p$). При этом определение про-

странства L_M (соотв. ℓ_ψ) зависит (с точностью до эквивалентности норм) лишь от поведения функции M при больших значениях аргумента (соотв. функции ψ при малых значениях аргумента).

Пространство L_M (соотв. ℓ_ψ) сепарабельно тогда и только тогда, когда $M(2u) \leq CM(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u (соотв. $\psi(2u) \leq C\psi(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно малых u). В этом случае пишем $M \in \Delta_2^\infty$ (соотв. $\psi \in \Delta_2^0$).

Для каждой функции Орлича M определим индексы Матушевской–Орлича в бесконечности:

$$\alpha_M^\infty := \sup \left\{ p : \sup_{t,s \geq 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} < \infty \right\},$$

$$\beta_M^\infty := \inf \left\{ p : \inf_{t,s \geq 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} > 0 \right\}.$$

Как нетрудно проверить, $1 \leq \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty \leq \infty$.

Пусть ψ – функция Орлича, $\psi \in \Delta_2^0$. Определим следующие (непустые компактные) подмножества пространства $C[0, 1]$:

$$E_{\psi,1}^0 = \overline{\{\psi(st)/\psi(s) : 0 < s < 1\}}, \quad C_{\psi,1}^0 = \overline{\text{conv} E_{\psi,1}^0},$$

где $\text{conv} U$ – выпуклая оболочка U , а замыкание берется в $C[0, 1]$. Согласно известной теореме

¹ Самарский национальный исследовательский университет, Самара Россия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

⁴ Bahcesehir University, Istanbul, Turkey

*E-mail: astash@ssau.ru

Й. Линденштраусса и Л. Цаффрири [3], теорема 4.а.8, пространство Орлича ℓ_ψ изоморфно некоторому подпространству пространства ℓ_ψ тогда и только тогда, когда $\psi \in C_{\psi,1}^0$. Определим также *индексы Матушевской—Орлича функции ψ в нуле*:

$$\alpha_\psi^0 := \sup \left\{ p : \sup_{0 < t, s \leq 1} \frac{\psi(st)}{s^p \psi(t)} < \infty \right\},$$

$$\beta_\psi^0 := \inf \left\{ p : \inf_{0 < t, s \leq 1} \frac{\psi(st)}{s^p \psi(t)} > 0 \right\}.$$

Тогда $1 \leq \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 \leq \infty$, и пространство ℓ^p (c_0 , если $p = \infty$) изоморфно некоторому подпространству пространства Орлича ℓ_ψ тогда и только тогда, когда $p \in [\alpha_\psi^0, \beta_\psi^0]$ [3], теорема 4.а.9.

Говорят, что (замкнутое линейное) подпространство H пространства Орлича L_M *сильно вложено* в L_M , если сходимость в L_M -норме и по мере на H эквивалентны¹. В частности, в силу неравенства Хинчина [4], глава V, теорема 8.4, функции Радемахера $r_k(t) = \text{sign}(\sin 2^k \pi t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$, порождают сильно вложенное подпространство в L_M , если $M \in \Delta_2^\infty$.

Множество $K \subset L_M$ имеет *равностепенно непрерывные нормы* в пространстве Орлича L_M , если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\text{mes}(E) < \delta} \sup_{x \in K} \|x\chi_E\|_{L_M} = 0.$$

Нетрудно показать, что подпространство H сильно вложено в L_M , если его единичный шар $B_H := \{x \in H : \|x\|_{L_M} \leq 1\}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M . Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места (см., например, [5, пример 2]).

Главная цель этой заметки состоит в изучении введенных свойств для подпространств пространства Орлича L_M , порожденных независимыми одинаково распределенными функциями. Изучению таких подпространств посвящена обширная литература. Ж. Бретаноль (J. Bretagnolle) и Д. Дакунья-Кастель (D. Dacunha-Castelle) [6–8] получили их описание в случае, когда $L_M = L^p$. Позднее эти исследования были продолжены в работах М.Ш. Бравермана [9–11], а также С.В. Асташкина, Д.В. Занина и Ф.А. Сукочева [12–14].

§ 2. Измеримые на $[0, 1]$ функции x и y называются *равноизмеримыми*, если

$$\text{mes}\{t : |x(t)| > \tau\} = \text{mes}\{t : |y(t)| > \tau\}$$

для каждого $\tau > 0$

¹ В случае, когда $M(u) = u^p$, такое подпространство называют также $\Lambda(p)$ -пространством.

(mes — мера Лебега на $[0, 1]$).

Всюду далее M — функция Орлича, $M \in \Delta_2^\infty$, L_M — пространство Орлича, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых (в вероятностном смысле) функций, равноизмеримых с некоторой функцией $f \in L_M$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, через $[f_k]$ и B_f будут обозначаться соответственно подпространство L_M , порожденное последовательностью $\{f_k\}$, и единичный замкнутый шар этого подпространства.

Из результатов работы [15] следует, что последовательность $\{f_k\}$ эквивалентна в L_M каноническому единичному базису $\{e_k\}$ в пространстве Орлича последовательностей ℓ_ψ (обозначаем это как $[f_k] \approx \ell_\psi$), где функция ψ удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\psi^{-1}(1/n)} \leq \|\sigma_n f\|_{L_M} + \left(n \int_{1/n}^1 f(s)^2 ds \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\psi^{-1}(1/n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь σ_n — оператор растяжения, $\sigma_n x(t) := x(t/n)\chi_{(0,1)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, и константа $C > 0$ не зависит от n . Напомним, что оператор σ_n ограничен в каждом пространстве Орлича L_M и $\|\sigma_n\|_{L_M \rightarrow L_M} \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ [16, теорема II.4.4].

Следующие два утверждения показывают, что введенные в § 1 свойства подпространства $[f_k]$ пространства Орлича L_M при определенных условиях могут быть охарактеризованы в терминах растяжений функции $f \in L_M$.

Предложение 1. (i) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)/t = \infty$ и для некоторого $C > 0$

$$\|\sigma_n f\|_{L_M} \leq C \|\sigma_n f\|_{L^1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

то подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M .

(ii) Наоборот, если подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M и $[f_k] \approx \ell_\psi$, где $1 < \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 < 2$, то имеет место соотношение (1).

Предложение 2. Рассмотрим следующие условия:

(а) шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M ;

(б) существует функция Орлича $N \in \Delta_2^\infty$ такая, что $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{N(u)}{M(u)} = \infty$ и для некоторого $C > 0$

$$\|\sigma_n f\|_{L_N} \leq C \|\sigma_n f\|_{L_M}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Имеет место импликация $(b) \Rightarrow (a)$. Если дополнительно известно, что $[f_k]_{L_M} \approx \ell_\psi$, где $1 < \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 < 2$, то справедлива также и обратная импликация $(a) \Rightarrow (b)$.

Применяя эти предложения вместе с результатами работ [17] и [13], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $1 < \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty < 2$ и $1 < \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 < 2$. Предположим, что подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M . Тогда, если существует функция $\varphi \in C_{\psi,1}^0$ такая, что для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in [0, 1]$

$$\psi(st) \leq C\psi(s)\varphi(t), \quad (3)$$

то шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M .

В частности, утверждение теоремы 1 справедливо при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

(а) $\psi(st) \leq C\psi(s)\psi(t)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in [0, 1]$;

(б) $\psi(st) \leq Ct^{\alpha_\psi^0}\psi(s)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in [0, 1]$;

(с) $t^{-1/p} \in L_M$ для некоторого $p \in (0, \alpha_\psi^0)$.

В случае, когда $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$, рассматриваемые свойства подпространств могут быть охарактеризованы с помощью индексов Матушевской–Орлича.

Теорема 2. Пусть M — такая функция Орлича, что $1 < \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty < 2$ и $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$. Следующие условия эквивалентны:

(а) шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M ;

(б) подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M ;

(с) $\alpha_\psi^0 > \beta_M^\infty$, где функция ψ — такова, что $[f_k] \approx \ell_\psi$.

В частности, так как $\beta_M^\infty = p$, если $M(t) = t^p$, получаем

Следствие 1. Если $1 < p < 2$, то $[f_k]_{L^p} - \Lambda(p)$ -пространство $\Leftrightarrow [f_k]_{L^p} - \Lambda(q)$ -пространство для некоторого $q > p \Leftrightarrow \alpha_\psi^0 > p$, где $[f_k]_{L^p} \approx \ell_\psi$.

Последний результат показывает, что в гильбертовом случае, т.е. когда $M(t) = t^2$, ситуация сильно упрощается.

Теорема 3. Пусть $f \in L^2$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых функций, равноизмеримых

с f , $\int_0^1 f_k(t)dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда единичный шар подпространства $[f_k]_{L^2}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в L^2 .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
2. Rao M.M., Ren Z.D. Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 146. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1991. 445 p.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965. 615 с. [перевод с английского Zygmund A. Trigonometric series. V. I. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1959.]
5. Astashkin S.V. $\Lambda(p)$ -spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266. P. 5174–5198.
6. Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D. Mesures aléatoires et espaces d'Orlicz (French) // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B. 1967, V. 264. P. A877–A880.
7. Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D. Application de l'étude de certaines formes l'étude aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1969. V. 2. № 5. P. 437–480.
8. Dacunha-Castelle D. Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz // Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975: Espaces L^p , applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. Nos. X et XI, 21 pp. Centre Math., mole Polytech., Paris, 1975.
9. Braverman M.Sh. On some moment conditions for sums of independent random variables // Probab. Math. Statist. 1993. V. 14. № 1 P. 45–56.
10. Braverman M.Sh. Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
11. Braverman M.Sh. Independent random variables in Lorentz spaces // Bull. London Math. Soc. 1996. V. 28. № 1. P. 79–87.
12. Astashkin S., Sukochev F. Orlicz sequence spaces spanned by identically distributed independent random variables in L_p -spaces // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 413. № 1. P. 1–19.
13. Astashkin S., Sukochev F., Zanin D. On uniqueness of distribution of a random variable whose independent copies span a subspace in L^p // Stud. Math. 2015. V. 230. № 1. P. 41–57.
14. Astashkin S., Sukochev F., Zanin D. The distribution of a random variable whose independent copies span ℓ_M is

- unique // *Rev. Mat. Complut.* 2022. V. 35. № 3. P. 815–834.
15. *Johnson W., Schechtman G.*, Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // *Ann. Probab.* 1989. V. 17. P. 789–808.
16. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
17. *Astashkin S.V.* On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // *Comment. Math.* 2016. V. 56. № 1. P. 29–44.

ON SUBSPACES OF AN ORLICZ SPACE SPANNED BY INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED FUNCTIONS

S. V. Astashkin^{a,b,c,d}

^a *Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

^b *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^c *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^d *Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

Subspaces of an Orlicz space L_M generated by probabilistically independent copies of a function $f \in L_M$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$, are studied. In terms of dilations of f , we get a characterization of strongly embedded subspaces of this type and obtain conditions that guarantee that the unit ball of such a subspace has equi-absolutely continuous norms in L_M . A class of Orlicz spaces such that for all subspaces generated by independent identically distributed functions these properties are equivalent and can be characterized by Matuszewska–Orlicz indices is determined.

Keywords: independent functions, strongly embedded subspace, equi-absolute continuity of norms, Orlicz function, Orlicz space, Matuszewska–Orlicz indices

УДК 531.36:534.1

СКРЫТАЯ ГРАНИЦА ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КОНТРПРИМЕРЕ К ГИПОТЕЗЕ КАПРАНОВА О ПОЛОСЕ ЗАХВАТА

© 2023 г. Член-корреспондент РАН Н. В. Кузнецов^{1),2),*}, М. Ю. Лобачев^{1),**}, Т. Н. Мокаев¹⁾

Поступило 25.02.2023 г.

После доработки 12.05.2023 г.

Принято к публикации 22.05.2023 г.

В рамках развития теории скрытых колебаний рассмотрена задача определения границы глобальной устойчивости и выявления на ней скрытых участков, соответствующих нелокальному рождению скрытых колебаний. Для системы управления фазовой синхронизацией с пропорционально-интегрирующим фильтром и кусочно-линейной характеристикой фазового детектора предложены эффективные методы выявления бифуркаций потери глобальной устойчивости, получения аналитических формул для бифуркационных значений и построения тривиальных и скрытых участков границы глобальной устойчивости.

Ключевые слова: скрытая граница глобальной устойчивости, самовозбуждающиеся и скрытые колебания, локальные и глобальные бифуркации, управление фазовой синхронизацией, гипотеза Капранова, полоса захвата

DOI: 10.31857/S2686954323600106, **EDN:** PKOSZG

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из ключевых инженерных задач нелинейного анализа систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) является задача определения полосы захвата для значений параметра частоты входного сигнала в зависимости от параметров физической реализации системы [1, 2]. При заданных параметрах физической реализации и частоты входного сигнала, соответствующих полосе захвата, состояние системы из любых начальных данных притягивается к стационарному множеству, а систему называют глобально устойчивой [3]¹. Границей глобальной устойчивости в пространстве параметров системы является граница замыкания множества значений параметров, для которых система не является глобально устойчи-

вой (в фазовом пространстве существуют траектории, не стремящиеся к стационарному множеству). При этом точки границы глобальной устойчивости являются точками бифуркации² рождения незатухающих колебаний, которые не стремятся к стационарному множеству. Точка границы называется *скрытой* [4], если для некоторой ее окрестности в пространстве параметров потеря глобальной устойчивости вызвана только глобальными бифуркациями рождения *скрытых колебаний*, область притяжения которых в фазовом пространстве не касается неустойчивых состояний равновесия, в противном случае точка называется *тривиальной (явной)*. Для выявления тривиальных точек границы хорошо развиты методы анализа локальных бифуркаций и численные процедуры анализа самовозбуждения колебаний из окрестности неустойчивых точек стационарного множества; общие методы выявления скрытых точек границ глобальной устойчивости требуют нелокального анализа, в том числе анализа глобальных бифуркаций, и развиваются в теории скрытых колебаний [4, 5].

¹ В зависимости от характера притяжения и вида стационарного множества для систем с неединственным состоянием равновесия могут определяться различные виды устойчивости; в работах [2, 18] в этом случае для систем фазовой автоподстройки также используются термины *глобальная асимптотическая устойчивость системы* и *система градиентного типа*.

¹⁾ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

²⁾ Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: n.v.kuznetsov@spbu.ru

**E-mail: mlobachev64@gmail.com

² Для точки бифуркации в пространстве параметров системы в сколь угодно малой окрестности есть другая точка такая, что соответствующие фазовые портреты системы топологически не эквивалентны. Неэквивалентность фазовых портретов в сколь угодно малой окрестности стационарного множества соответствует *локальной бифуркации*, а вне его некоторой окрестности — *глобальной бифуркации*.

Для системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром в работе М.В. Капранова [6, 1956 г.] предполагалось (аналогично задаче Трикоми [7]), что самовозбуждение колебаний при рождении соединяющей неустойчивые седловые состояния равновесия гетероклинической траектории определяет потерю глобальной устойчивости и задает полосу захвата системы (*гипотеза Капранова*). Однако вскоре было показано, что в общем случае гипотеза Капранова неверна (см. [8–11]), а в системе могут наблюдаться бифуркации нелокального рождения колебаний, приводящие к потере глобальной устойчивости. Основываясь на этих результатах, в статье [12, 1970 г.] были численно построены серии бифуркационных графиков при некоторых значениях параметров и видах характеристики фазового детектора, и вместе с тем отмечалось, что в общем случае для быстрого расчета полосы захвата в литературе нет достаточно полных и подробных формул. В результате в настоящее время в классических монографиях по фазовой синхронизации для полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром можно найти скопированные численные бифуркационные диаграммы, приближенные или консервативные аналитические оценки и замечания об отсутствии удовлетворительного решения задачи (см., например, [1, 2, 13, 14]).

В данной работе для решения этой задачи в рамках теории скрытых колебаний мы развиваем эффективный подход [15, 16] к определению точной границы глобальной устойчивости и выявлению на ней скрытых участков, основанный на специальной замене переменных и последующих интегрировании и сшивки траекторий в терминах фазовых переменных. В отличие от работ [6, 8, 10, 11], данный подход не требует вычисления интервалов времени прохождения траекториями участков линейности системы, что упрощает анализ и делает его наглядным. Развитие этих идей в данной работе позволило аналитически описать все возможные бифуркации потери глобальной устойчивости, в том числе глобальные бифуркации рождения скрытых колебаний, а также получить полные аналитические формулы для построения тривиальных и скрытых участков границы глобальной устойчивости и определения полосы захвата в общем случае непрерывной кусочно-линейной характеристики фазового детектора.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Классическая модель ФАПЧ в пространстве фаз сигналов может быть записана в виде системы управления в форме Лурье [4]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Pu - q\varphi(r^T u), \quad u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2, \\ P &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \tau_1 + \tau_2 & 0 \\ -K_{vco} & 0 \\ \tau_1 + \tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -\tau_1 \\ \tau_1 + \tau_2 \\ K_{vco}\tau_2 \\ \tau_1 + \tau_2 \end{pmatrix}, \\ r^T &= (0, 1), \quad \varphi(\cdot) = v_e(\cdot) - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{vco}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $K_{vco} > 0$ — коэффициент усиления подстраиваемого генератора; ω_e^{free} является разностью частоты входного сигнала и собственной частоты подстраиваемого генератора; $\tau_1 > 0$, $\tau_2 \geq 0$ — параметры фильтра нижних частот с передаточной функцией

$$F(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_1 + \tau_2)s};$$

состояние системы (1) соответствует сдвинутому состоянию фильтра нижних частот и разности фаз входного и подстраиваемого сигналов: $u(t) = \left(x(t) - \frac{\tau_1 \omega_e^{\text{free}}}{K_{vco}}, \theta_e(t) \right)^T$; $v_e(\cdot)$ — характеристика фазового детектора, которая в данной работе предполагается непрерывной кусочно-линейной:

$$v_e(u_2) = \begin{cases} ku_2 - 2\pi km, & -\frac{1}{k} + 2\pi m \leq u_2 < \frac{1}{k} + 2\pi m, \\ -\frac{1}{\pi - \frac{1}{k}} u_2 + \frac{1}{\pi - \frac{1}{k}} (\pi + 2\pi m), & \frac{1}{k} + 2\pi m \leq u_2 < -\frac{1}{k} + 2\pi(m+1), \\ k > \frac{1}{\pi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2)$$

К треугольной характеристике (2) с $k = \frac{2}{\pi}$ приводит анализ импульсных сигналов в цифровой схемотехнике [2].

Системе (1) соответствует блок-схема на рис. 1, где

$$\begin{aligned} \theta_1(t) - \theta_2(t) &= \theta_e(t), \\ G(s) &= r^T (sI - P)^{-1} q = \frac{1}{s} K_{vco} F(s). \end{aligned}$$

Инвариантность полученной системы (1) относительно преобразования $(\omega_e^{\text{free}}, x(t), \theta_e(t)) \rightarrow (-\omega_e^{\text{free}}, -x(t), -\theta_e(t))$ позволяет проводить анализ только для $\omega_e^{\text{free}} \geq 0$. Состояния равновесия системы (1) описываются уравнениями

$$u_1^{\text{eq}} = 0, \quad v_e(u_2^{\text{eq}}) = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}. \quad (3)$$

Из вида функции $v_e(\cdot)$ следует, что при $\omega_e^{\text{free}} > K_{\text{vco}}$ в системе (1) нет состояний равновесия, а из анализа соответствующих характеристических полиномов при $\omega_e^{\text{free}} < K_{\text{vco}}$ следуют асимптотическая устойчивость состояний равновесия $\left(0, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} + 2\pi m\right)$ и неустойчивость состояний равновесия $\left(0, \pi - (\pi k - 1)\frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} + 2\pi m\right)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$.

Существование асимптотически устойчивого состояния равновесия, которое непрерывно меняется в фазовом пространстве при непрерывном изменении параметра ω_e^{free} внутри максимального симметричного интервала: $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_h)$, соответствует инженерному понятию *полосы удержания* [17]. Для системы (1) имеем $[0, \omega_h) = [0, K_{\text{vco}})$.

Одной из ключевых инженерных задач нелинейного анализа систем ФАПЧ является задача оценки *полосы захвата* $[0, \omega_p)$ [17] – подынтервала полосы удержания, для которого при любых начальных данных состояние системы стремится к некоторому состоянию равновесия. При этом в математической модели допускаются неустойчивые переходные процессы из множества точек фазового пространства меры ноль к неустойчивым состояниям равновесия, которые не наблюдаются при физической реализации из-за шумов.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Используя для непрерывной кусочно-линейной системы (1) качественные методы анализа динамических систем, можно показать, что потеря глобальной устойчивости определяется бифуркациями исчезновения состояний равновесия, рождения полуустойчивого цикла второго рода³ или соединяющей неустойчивые седловые состояния равновесия гетероклинической траектории и не связана с рождением цикла первого рода или гомоклинической траектории [2, 18].

Введем обозначения

³ Циклом первого рода называется периодическая траектория в $\mathbb{R}^2$, а для циклов второго рода $(u_1(t), u_2(t))$ существуют период $T > 0$ и число $\varepsilon = \pm 1$ такие, что $u_1(t+T) = u_1(t)$, $u_2(t+T) = u_2(t) + 2\pi\varepsilon \forall t > 0$ [18].

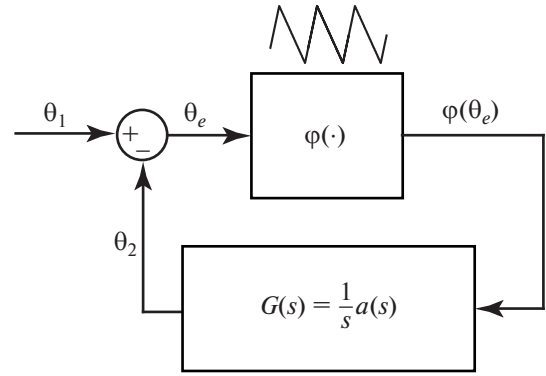


Рис. 1. Модель ФАПЧ в виде нелинейной системы управления.

$$K_{\text{vco}}^{\text{ht}} = \frac{1}{k(2\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}, \quad \tau_2 \geq 0, \quad (4)$$

$$K_{\text{vco}}^{\text{fn}} = \frac{1}{k(2\tau_1 + \tau_2 - 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}, \quad \tau_2 > 0,$$

определяющие тип устойчивых состояний равновесия относительно параметра K_{vco} .

Теорема 1. Для $\tau_1 > 0$, $\tau_2 \geq 0$, $k > \frac{1}{\pi}$ и $K_{\text{vco}} \in (0, K_{\text{vco}}^{\text{ht}}]$ полоса захвата совпадает с полосой удержания:

$$[0, \omega_p) = [0, \omega_h) = [0, K_{\text{vco}}).$$

Схема доказательства. С помощью замены переменных

$$y = \frac{\tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}}} \omega_e^{\text{free}} - \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1 + \tau_2}} (u_1 + \tau_2 v_e(u_2)),$$

$$t \mapsto \sqrt{\frac{\tau_1 + \tau_2}{K_{\text{vco}}}} t$$

систему (1) на участках гладкости можно записать в виде

$$\dot{y} = -\frac{1 + \tau_2 K_{\text{vco}} v_e'(\theta_e)}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}}} y + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} - v_e(\theta_e), \quad \dot{\theta}_e = y. \quad (5)$$

Использование квадратичной функции Ляпунова для системы (1) и анализ фазового пространства позволяют определить поглощающее множество

$$\Omega = \left\{ (y, \theta_e) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}} \left(1 + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right) \right\}, \quad (6)$$

в котором находятся предельные траектории системы (5).

При $K_{vco} \in (0, K_{vco}^{ht}]$ устойчивые состояния равновесия являются узлами, а их собственные векторы — фазовыми траекториями (5) на участках линейности. Поскольку траектория, соответствующая одному из собственных векторов узла, пересекает область (6) от границы до границы, циклы второго рода в системе (5) отсутствуют и полоса захвата совпадает с полосой удержания.

■

Используя метод систем сравнения (см., например, [18, 19]), можно доказать аналогичный результат о совпадении полос захвата и удержания в некоторой области параметров для синусоидальной характеристики фазового детектора.

Следующие Леммы 1 и 2 описывают бифуркации рождения гетероклинической траектории из седла в седло и полуустойчивого предельного цикла второго рода при различных значениях $K_{vco} > K_{vco}^{ht}$.

Лемма 1. При заданных $\tau_1 > 0$, $\tau_2 \geq 0$, $k > \frac{1}{\pi}$ для любого $K_{vco} > K_{vco}^{ht}$ существует единственное значение $\omega_e^{free} = \omega^{ht} \in [0, K_{vco})$, для которого в системе (1) существует гетероклиническая траектория, соединяющая седловые состояния равновесия, где

$$\omega^{ht} = \frac{\sqrt{s_1} - 1}{\sqrt{s_1} + 1} K_{vco},$$

$$s_1 = \begin{cases} \frac{(\kappa - \eta)^2 + 2\xi(\kappa - \eta) + k}{(\kappa + \eta)^2 - 2\xi(\kappa + \eta) + k} \times \\ \times \exp\left(\frac{2\xi}{\rho} \left(\arctan \frac{(\xi - \eta)^2 + \rho^2 - \kappa^2}{2\rho\kappa} + \frac{\pi}{2} \right)\right), & \text{если } K_{vco} \in (K_{vco}^{ht}, K_{vco}^{fn}) \text{ или } \tau_2 = 0, \\ \left(\frac{\kappa - \eta + \sqrt{k}}{\kappa + \eta - \sqrt{k}} \exp\left(\frac{2\sqrt{k}\kappa}{\kappa^2 - (\eta - \sqrt{k})^2}\right) \right)^2, & \text{если } K_{vco} = K_{vco}^{fn} \text{ и } \tau_2 \neq 0, \\ \frac{(\kappa - \eta + \xi)^2 - \rho^2}{(\kappa + \eta - \xi)^2 - \rho^2} \left(\frac{(\kappa + \rho)^2 - (\xi - \eta)^2}{(\kappa - \rho)^2 - (\xi - \eta)^2} \right)^{\frac{\xi}{\rho}}, & \text{если } K_{vco} > K_{vco}^{fn} \text{ и } \tau_2 \neq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\xi = \frac{k\tau_2 K_{vco} + 1}{2\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{vco}}}, \quad \eta = \frac{k\tau_2 K_{vco} - \mu}{2\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{vco}}}, \quad (8)$$

$$\rho = \sqrt{|\xi^2 - k|}, \quad \kappa = \sqrt{\eta^2 + k\mu}, \quad \mu = \pi k - 1.$$

Для случая $\tau_2 > 0$ определим

$$K_{vco}^{pt} = \frac{\pi k - 1}{k\tau_2}. \quad (9)$$

Лемма 2. При заданных $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $k > \frac{1}{\pi}$ для любого $K_{vco} > \max(K_{vco}^{pt}, K_{vco}^{ht})$ существует единственное значение $\omega_e^{free} = \omega^{pt} \in [0, K_{vco})$, для которого в системе (1) существует полуустойчивый цикл второго рода, где

$$\omega^{pt} = \frac{\sqrt{s_2} - 1}{\sqrt{s_2} + 1} K_{vco},$$

$$s_2 = \frac{(z_0^{pt} + \eta)^2 - \kappa^2}{(z_1^{pt} - \eta)^2 - \kappa^2} \left(\frac{(z_0^{pt} + \kappa + \eta)(z_1^{pt} + \kappa - \eta)}{(z_0^{pt} + \eta - \kappa)(z_1^{pt} - \eta - \kappa)} \right)^{\frac{\eta}{\kappa}}, \quad (10)$$

$$z_0^{pt} = z_0(z_1^{pt}),$$

$$z_0(z_1) = \frac{(1 + \mu)kz_1 - 2(\mu\xi + \eta)k}{(1 + \mu)k - 2(\xi - \eta)z_1},$$

а $z_1^{pt} \in (\eta + \kappa, k\sqrt{\tau_2 K_{vco}}]$ определяется из трансцендентного уравнения относительно переменной z_1

$$\frac{(z_0(z_1) + \eta)^2 - \kappa^2}{(z_1 - \eta)^2 - \kappa^2} \left(\frac{(z_0(z_1) + \eta + \kappa)(z_1 + \kappa - \eta)}{(z_0(z_1) + \eta - \kappa)(z_1 - \eta - \kappa)} \right)^{\frac{\eta}{\kappa}} =$$

$$\begin{cases} \frac{(z_0(z_1))^2 + 2\xi z_0(z_1) + k}{z_1^2 - 2\xi z_1 + k} \times \\ \times \exp\left(\frac{2\xi}{\rho} \left(\arctan \frac{\rho}{z_0(z_1) + \xi} - \arctan \frac{z_1 - \xi}{\rho} + \frac{\pi}{2} \right)\right), & \text{если } K_{vco} \in (K_{vco}^{ht}, K_{vco}^{fn}), \\ \left(\frac{z_0(z_1) + \sqrt{k}}{z_1 - \sqrt{k}} \exp\left(\frac{\sqrt{k}}{z_0(z_1) + \sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{z_1 - \sqrt{k}}\right) \right)^2, & \text{если } K_{vco} = K_{vco}^{fn}, \\ \frac{(z_0(z_1) + \xi)^2 - \rho^2}{(z_1 - \xi)^2 - \rho^2} \left(\frac{(z_0(z_1) + \rho + \xi)(z_1 + \rho - \xi)}{(z_0(z_1) + \xi - \rho)(z_1 - \xi - \rho)} \right)^{\frac{\xi}{\rho}}, & \text{если } K_{vco} > K_{vco}^{fn}. \end{cases}$$

Здесь значения ξ , η , ρ , κ , K_{vco}^{fn} , K_{vco}^{ht} , K_{vco}^{pt} определяются по формулам (4), (8), (9).

Лемма 2 также позволяет определить начальные данные для полуустойчивого цикла при $\omega_e^{free} = \omega^{pt}$: $u(0) = \left(\left(k\tau_2 - \sqrt{\frac{\tau_1 + \tau_2}{K_{vco}}} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{pt}}{kK_{vco}} \right) z_1^{pt}, -\frac{1}{k} \right)$.

Теорема 2. Для $\tau_1 > 0$, $k > \frac{1}{\pi}$, $K_{vco} > 0$ полоса захвата системы (1) с кусочно-линейной характеристикой (2) имеет вид при $\tau_2 = 0$:

$$[0, \omega_p) = \begin{cases} [0, K_{vco}), & \text{если } K_{vco} \leq K_{vco}^{ht}, \\ [0, \omega^{ht}), & \text{если } K_{vco} > K_{vco}^{ht}, \end{cases}$$

а при $\tau_2 > 0$:

$$[0, \omega_p) = \begin{cases} [0, K_{vco}), & \text{если } K_{vco} \leq K_{vco}^{ht}, \\ [0, \omega^{ht}), & \text{если } K_{vco} \in (K_{vco}^{ht}, \max(K_{vco}^{pt}, K_{vco}^{ht})], \\ [0, \omega^{pt}), & \text{если } K_{vco} > \max(K_{vco}^{pt}, K_{vco}^{ht}), \end{cases}$$

где ω^{ht} и ω^{pt} определяются из формул (7), (10) (здесь $\omega^{pt} < \omega^{ht}$ для $K_{vco} > \max(K_{vco}^{pt}, K_{vco}^{ht})$).

Схема доказательства.

Случай $K_{vco} \leq K_{vco}^{ht}$ рассмотрен в Теореме 1. Для $K_{vco} > K_{vco}^{ht}$ рассмотрим систему (5) на периоде и разделим фазовый портрет на области

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left\{ (y, \theta_e) \mid \frac{1}{k} - 2\pi \leq \theta_e < -\frac{1}{k}, y \in \mathbb{R} \right\}, \\ \bullet B &= \left\{ (y, \theta_e) \mid -\frac{1}{k} \leq \theta_e \leq \frac{1}{k}, y \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

где система (5) линейна (см. рис. 2). Рассмотрим траекторию $(y(t), \theta_e(t))$, которая пересекает прямые $\theta_e = \frac{1}{k} - 2\pi$, $\theta_e = -\frac{1}{k}$ и $\theta_e = \frac{1}{k}$ в точках $(y, \theta_e) = (y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$, $(y, \theta_e) = (y_1, -\frac{1}{k})$ и $(y, \theta_e) = (y_2, \frac{1}{k})$ соответственно (см. рис. 2). Замена переменных

$$\begin{aligned} z &= \frac{\mu y}{\theta_e + \pi + \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}}, \\ \theta_e &\in \left[\frac{1}{k} - 2\pi, -\pi - \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}} \right) \cup \left(-\pi - \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}, -\frac{1}{k} \right), \\ z &= \frac{y}{\theta_e - \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}}, \quad \theta_e \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}} \right) \cup \left(\frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}, \frac{1}{k} \right), \end{aligned}$$

где $\mu = \pi k - 1$ (см. (8)), позволяет записать систему (5) в виде уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{zdz}{z^2 - 2\eta z - \mu k} &= -\frac{d\theta_e}{\theta_e + \pi + \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}}, \\ \theta_e &\in \left[\frac{1}{k} - 2\pi, -\pi - \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}} \right) \cup \\ &\cup \left(-\pi - \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}, -\frac{1}{k} \right), \\ \frac{zdz}{z^2 + 2\xi z + k} &= -\frac{d\theta_e}{\theta_e - \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\theta_e \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}} \right) \cup \left(\frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}, \frac{1}{k} \right),$$

и получить выражения⁴, описывающие куски траектории $(y(t), \theta_e(t))$ системы (5) в областях A и B .

Для y_1 , соответствующих траекториям, лежащим выше собственных векторов седла, полученные выражения позволяют аналитически определить кривые $y_0 = y_0(y_1)$ и $y_2 = y_2(y_1)$, пересечение которых соответствует циклу второго рода с начальными данными $(y(0), \theta_e(0)) = (y_1, -\frac{1}{k})$. Анализ

производных кривых $y_0(y_1)$, $y_2(y_1)$ и ограниченная область поиска, которая задается множеством (6) и дополнительным условием прохождения траекторий выше собственных векторов седла, позволяют показать существование бифуркационного значения $\omega_e^{free} = \omega^{pt}$, которое соответствует полуустойчивому циклу второго рода и определяет границу глобальной устойчивости системы (1) при $K_{vco} > \max(K_{vco}^{pt}, K_{vco}^{ht})$, а также получить аналитические формулы для этого значения.

Аналогично рассмотрим предельный случай, когда в системе возникает соединяющая седловые состояния равновесия гетероклиническая траектория. Из анализа собственных векторов седла известны точки $y_1^{ht} = (\kappa + \eta) \left(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}} \right)$ и $y_2^{ht} = (\kappa - \eta) \left(\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}} \right)$ пересечения гетероклинической траекторией прямых $\theta_e = -\frac{1}{k}$ и $\theta_e = \frac{1}{k}$ соответственно. Подстановка точек $(y_1^{ht}, -\frac{1}{k})$ и $(y_2^{ht}, \frac{1}{k})$ в аналитическое выражение для траекторий в области B позволяет определить бифуркационное значение $\omega_e^{free} = \omega^{ht}$.

Таким образом, при $K_{vco} > K_{vco}^{ht}$ полоса захвата определяется попаданием точки (y_1^{ht}, y_0^{ht}) кривой $y_0(y_1)$ на кривую $y_2 = y_2(y_1)$ (см. рис. 2) при $\omega_e^{free} = \omega^{ht}$ (7), соответствующим рождению гетероклинической траектории из седла в седло, или касанием кривых при $\omega_e^{free} = \omega^{pt}$ (10), соответствующим рождению полуустойчивого цикла.

■

⁴ Для траектории системы (5), пересекающей прямую разрыва $\theta_e = -\pi - \mu \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}$ или $\theta_e = \frac{\omega_e^{free}}{kK_{vco}}$, исходя из непрерывности траекторий системы, за счет выбора константы интегрирования задаваемые уравнениями (11) куски решения сшиваются.

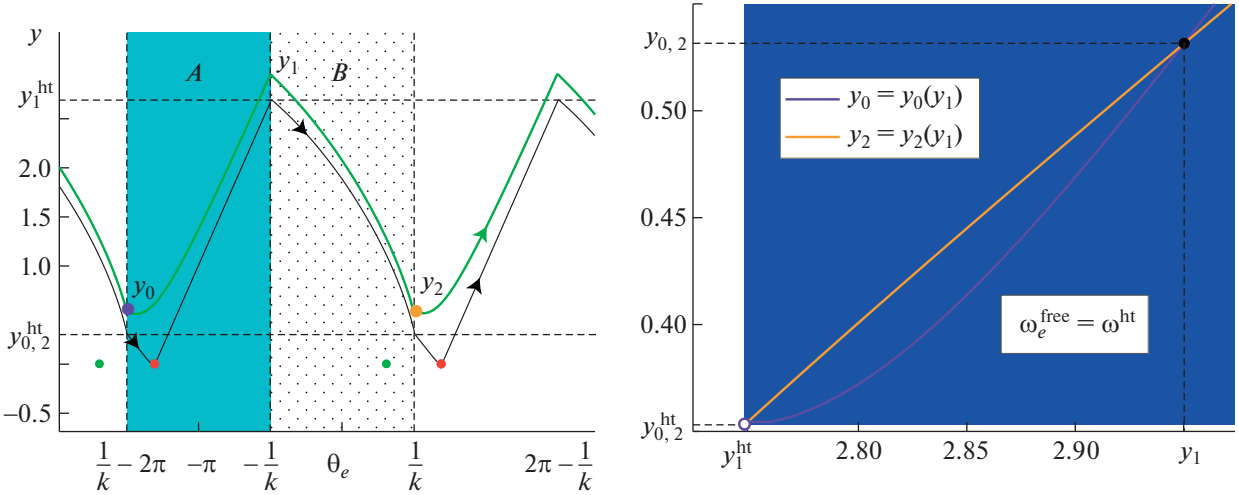


Рис. 2. Попадание точки $(y_1^{ht}, y_0^{ht}) = (2.744, 0.353)$ кривой $y_0 = y_0(y_1)$ на кривую $y_2 = y_2(y_1)$ соответствует гетероклинической траектории с начальными данными $(y(0), \theta_e(0)) = (2.744, -\frac{1}{k})$, соединяющей седловые состояния равновесия в системе (5). Пересечение кривых $y_0 = y_0(y_1)$ и $y_2 = y_2(y_1)$ в точке $(y_1, y_0) = (2.946, 0.531)$ соответствует устойчивому циклу второго рода в системе (5) с начальными данными $(y(0), \theta_e(0)) = (2.946, -\frac{1}{k})$. Параметры: $k = \frac{2}{\pi}$, $\tau_1 = 0.0448$, $\tau_2 = 0.0185$, $K_{vco} = 250$, $\omega_e^{free} = \omega^{ht} \approx 154.77$.

Следствие 1. Зафиксируем $a = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \in (0, 1)$.

Тогда

$$\frac{\omega_p}{K_{vco}} \rightarrow \frac{-2ab + b^2 + a}{2b - b^2 - a} \quad (12)$$

при $(\tau_1 + \tau_2)K_{vco} \rightarrow +\infty$,

где $b \in (a, \sqrt{a}]$ – единственное решение уравнения

$$\frac{a(2b - a - b^2)}{b(b - a)} = \ln \frac{b^2(1 - a)}{(b - a)^2}.$$

Если $\tau_2 = 0$, то $\frac{\omega_p}{K_{vco}} \rightarrow 0$ при $\tau_1 K_{vco} \rightarrow +\infty$.

4. КОНТРПРИМЕР К ГИПОТЕЗЕ КАПРАНОВА: СКРЫТЫЕ И ТРИВИАЛЬНЫЕ УЧАСТКИ ГРАНИЦЫ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для фиксированного $k > \frac{1}{\pi}$ за счет замены переменных и введения параметра $a = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$ можно строить бифуркационные диаграммы с осями $\left((\tau_1 + \tau_2)K_{vco}, \frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}} \right)$ для различных значений параметра a , используя теорему 2 (см. код построения

бифуркационных диаграмм: <https://github.com/ArCyb/2023-PLL-lead-lag-pull-in>).

С помощью аналитических выражений теоремы 2 построим границу глобальной устойчивости на рис. 3 для стандартных инженерных параметров $\tau_1 = 0.0448$, $\tau_2 = 0.0185$ [20] и кусочно-линейной характеристики фазового детектора с $k = \frac{2}{\pi}$ на

плоскости параметров при $K_{vco} > 0$, $\omega_e^{free} \geq 0$.

С точки зрения стандартного инженерного анализа полосы захвата при помощи численного моделирования граница глобальной устойчивости определяется следующим образом: для фиксированных параметров $\tau_1 > 0$, $\tau_2 \geq 0$, $k > \frac{1}{\pi}$, $K_{vco} > 0$ отслеживаются траектории из произвольной малой окрестности неустойчивого состояния равновесия при последовательных малых увеличениях $\omega_e^{free} \geq 0$ до тех пор, пока не будет выявлена бифуркация потери глобальной устойчивости⁵ (см. вертикальную прямую на рис. 3). Здесь исчезновение устойчивых состояний равновесия (при $0 < K_{vco} \leq K_{vco}^{ht}$; зеленый участок границы слева) и рождение гетероклинической траекто-

⁵ Известно, что система (1) с $\omega_e^{free} = 0$ глобально устойчива, что следует из анализа функции Ляпунова $V(u) = \frac{K_{vco}}{2\tau_1} u_1^2 + \int_0^{u_2} v_e(\sigma) d\sigma$.

рии из седла в седло (при $K_{vco}^{ht} < K_{vco} \leq K_{vco}^{pt}$; синий участок границы посередине, когда появляются самовозбуждающиеся колебания в фазовом пространстве) соответствуют тривиальному участку границы, который определяется при стандартном анализе полосы захвата. Рождение полуустойчивого цикла (при $K_{vco} > K_{vco}^{pt}$; красный участок границы справа), являющегося скрытым колебанием, определяет скрытый участок границы глобальной устойчивости, который не определяется при стандартном анализе полосы захвата (см. рис. 4) и является контрпримером к гипотезе Капранова. Синяя пунктирная кривая соответствует “границе”, определяемой стандартным инженерным анализом и гипотезой Капранова, а зазор между кривой, соответствующей красному участку границы справа, и синей пунктирной кривой, показывает необходимость анализа скрытых колебаний при исследовании глобального поведения системы.

Точки на вертикальной прямой $K_{vco} = 600$ на рис. 3 обозначают значения параметров, для которых построены фазовые портреты на рис. 4. Здесь красная верхняя траектория $u_s(t)$ строится численным интегрированием из окрестности неустойчивого состояния равновесия (не умаляя общности нами выбрана траектория неустойчивого одномерного многообразия, начальные данные которой определяются аналитически), а черная нижняя траектория $u_h(t)$ строится аналитически, исходя из особенностей поведения системы в теореме 2.

Верхний левый рисунок ($\omega_e^{free} = 328.72 < \omega_p$) соответствует первой точке на прямой возрастания $\omega_e^{free} \geq 0$, в которой отслеживаемая красная верхняя траектория $u_s(t)$ из окрестности неустойчивого состояния равновесия стремится к асимптотически устойчивому состоянию равновесия, при этом начальные данные черной нижней траектории $u_h(t)$ выбираются на границе поглощающего множества (б). На верхнем правом рисунке ($\omega_e^{free} = 399.56 > \omega_p = \omega^{pt}$) красная верхняя траектория $u_s(t)$ также стремится к асимптотически устойчивому состоянию равновесия (бифуркация рождения гетероклинической траектории из седла в седло еще не произошла: $\omega_e^{free} = 399.56 < \omega^{ht}$), не выявляя потери глобальной устойчивости из-за наличия в системе устойчивого цикла второго рода, являющегося скрытым колебанием и появившегося вследствие глобальной бифуркации рождения полуустойчивого цикла при $\omega_e^{free} = \omega^{pt}$. Отметим, что методы прямого численного интегрирования также могут проскакивать полуустойчивый цикл и близкие циклы из-за конеч-

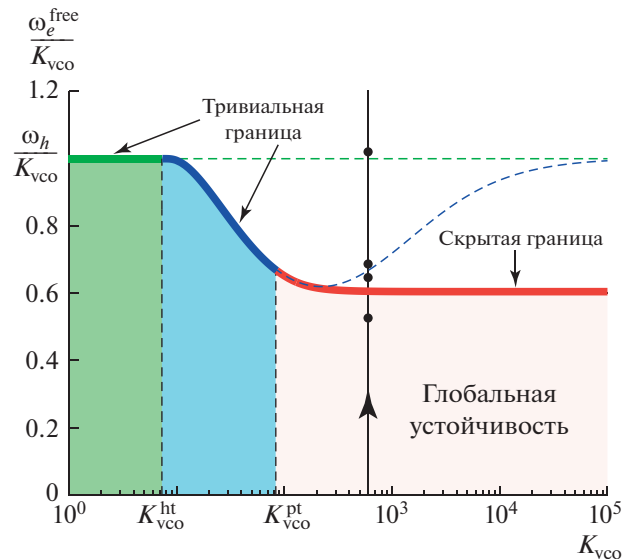


Рис. 3. Граница глобальной устойчивости, построенная согласно теореме 2. Участок границы при достаточно больших K_{vco} соответствует асимптотическому значению $\frac{\omega_e^{free}}{K_{vco}} = 0.605$ согласно следствию 1. Параметры: $k = \frac{2}{\pi}$, $\tau_1 = 0.0448$, $\tau_2 = 0.0185$.

ности шага интегрирования [21]. Важность решения задачи визуализации скрытых колебаний для дополнения результатов моделирования Э. Витерби [13] отмечается в работе Ч. Кана [9].

При дальнейшем увеличении $\omega_e^{free} = 399.77 > \omega^{ht} > \omega^{pt} = \omega_p$ красная верхняя траектория $u_s(t)$ из окрестности неустойчивого состояния равновесия стремится к устойчивому циклу второго рода (черная нижняя траектория $u_h(t)$) на нижнем левом рисунке и показывает потерю глобальной устойчивости позже пересечения ее границы. При $\omega_e^{free} = 601 > K_{vco} = \omega_h$ состояния равновесия исчезают и все траектории стремятся к циклу второго рода (нижний правый рисунок), показывая потерю глобальной устойчивости также при отслеживании и из окрестности устойчивого состояния равновесия (внешняя оценка границы глобальной устойчивости).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Простая структура границы глобальной устойчивости, полученная в рассмотренном примере, в общем случае соответствует многообразию на единицу меньшей размерности (гиперповерхности) в пространстве вещественных параметров. Для каждой из точек такой границы существует окрестность в пространстве параметров, которую

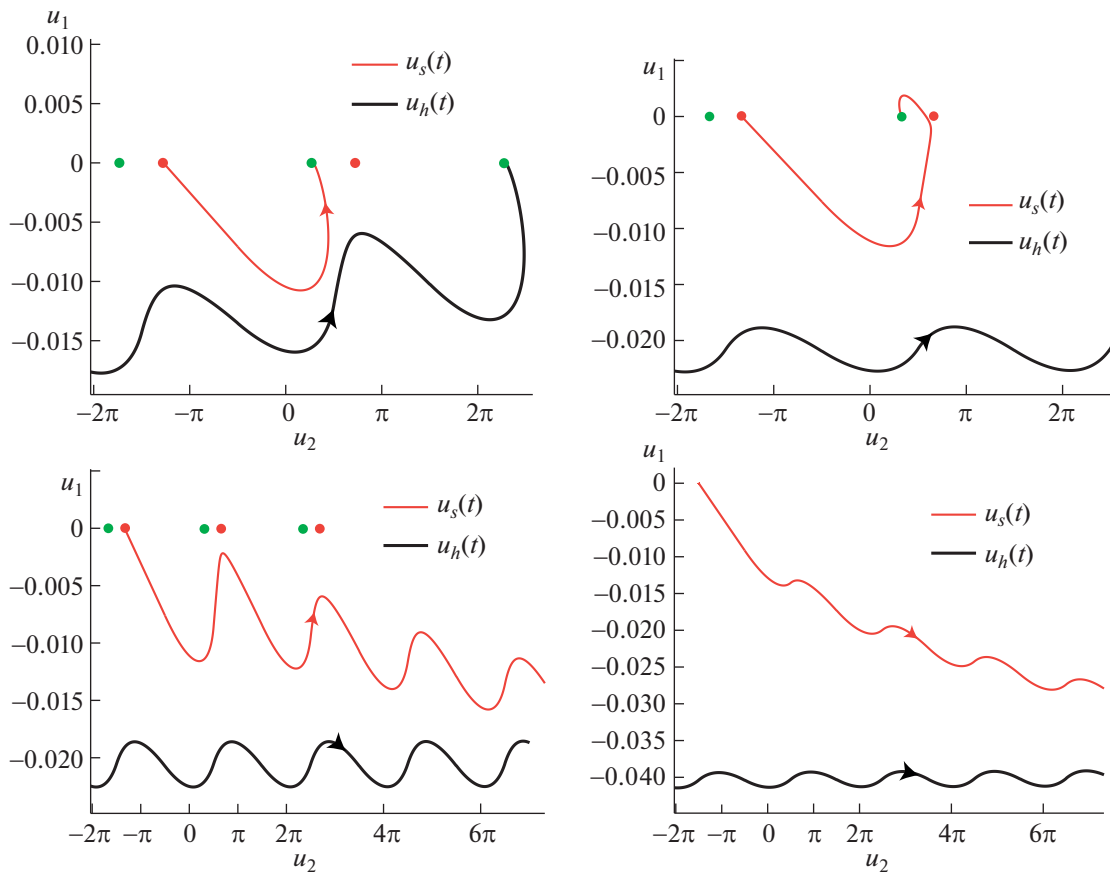


Рис. 4. Фазовые портреты системы (1). Параметры: $\tau_1 = 0.0448$, $\tau_2 = 0.0185$, $K_{vco} = 600$. Верхний левый рис.: $\omega_e^{\text{free}} = 328.72$, верхний правый рис.: $\omega_e^{\text{free}} = 399.56$, нижний левый рис.: $\omega_e^{\text{free}} = 399.77$, нижний правый рис.: $\omega_e^{\text{free}} = 601$.

граница делит на два связанных открытых подмножества, одно из которых содержит только точки глобальной устойчивости, а другое только точки отсутствия глобальной устойчивости. При этом классификация типа точки границы как скрытой или тривиальной однозначно определяется в этой окрестности вдоль любого непрерывного пути пересечения границы через точку в область неустойчивости. Внутренности наибольших связанных подмножеств точек границы одного типа задают разбиение на скрытые и тривиальные области (участки) границы глобальной устойчивости.

Для выявления тривиальных участков границ хорошо развиты методы анализа локальных бифуркаций и численный анализ самовозбуждения колебаний из окрестности неустойчивых точек стационарного множества; методы выявления скрытых участков границы глобальной устойчивости требуют нелокального анализа, в том числе анализа глобальных бифуркаций, и развиваются в теории скрытых колебаний [4, 5]. Классические задачи и гипотезы о глобальной устойчивости по первому приближению (задача Андронова—Выш-

неградского [22], гипотеза Айзермана [23], гипотеза Калмана [24], гипотеза Капранова и другие [4]) связаны с обоснованием и развитием идей о тривиальных границах глобальной устойчивости.

Для случая системы ФАПЧ с фильтрами более высокого порядка внутренние (консервативные) оценки границы глобальной устойчивости могут быть получены с помощью обобщения на цилиндрическое фазовое пространство прямого метода Ляпунова и частотных методов (см. [2, 5, 17, 25]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00172).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. Москва: Связь, 1972.
2. Leonov G., Kuznetsov N. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Stability and Oscillations. Cambridge Scientific Publishers, 2014.

3. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47–55.
4. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.
5. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R., Kudryashova E., Kuznetsova O., Rosenwasser E., Abramovich S.* The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference Proceedings. 2020. P. 769–774.
6. *Капранов М.В.* Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника. 1956. Т. 11. № 12. С. 37–52.
7. *Tricomi F.* Integrazione di un'equazione differenziale presentata in elettrotecnica // Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa (in Italian). 1933. V. 2. № 2. P. 1–20.
8. *Губарь Н.А.* Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами // ПММ. 1961. Т. 25. № 6. С. 1011–1023.
9. *Cahn C.* Piecewise linear analysis of phase-lock loops // IRE Transactions on Space Electronics and Telemetry. 1962. № 1. P. 8–13.
10. *Шахтарин Б.И.* Исследование кусочно-линейной системы ФАП // Радиотехника и электроника. 1969. № 8. С. 1415–1424.
11. *Сафонов В.М.* О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП // Радиотехника. 1969. Т. 24. № 6. С. 76–80.
12. *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 4. С. 561–567.
13. *Viterbi A.* Principles of Coherent Communications. New York: McGraw-Hill, 1966. P. 321.
14. *Margaris N.* Theory of the Non-Linear Analog Phase Locked Loop. New Jersey: Springer Verlag, 2004. P. 287.
15. *Благов М.В., Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Шахтарин Б.И., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* Нелинейный анализ и синтез системы фазовой автоподстройки частоты: гипотеза Капранова и скрытые колебания // Материалы 15-й мультиконференции по проблемам управления. 2022. С. 212–213.
16. *Kuznetsov N., Arseniev D., Blagov M., Lobachev M., Wei Z., Yuldashev M., Yuldashev R.* The Gardner problem and cycle slipping bifurcation for type-2 phase-locked loops // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. V. 32. № 9. art. num. 2250138.
17. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R.* The Egan problem on the pull-in range of type 2 PLLs // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2021. V. 68. № 4. P. 1467–1471.
18. *Leonov G., Reitmann V., Smirnova V.* Nonlocal Methods for Pendulum-like Feedback Systems. Stuttgart-Leipzig: Teubner, 1992.
19. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R., Tavazoei M.* The Gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops // IEEE Transactions on Automatic Control. 2023. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3277896>
20. *Gardner F.* Phaselock Techniques. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 2005. P. 550.
21. *Kuznetsov N., Leonov G., Yuldashev M., Yuldashev R.* Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. V. 51. P. 39–49.
22. *Андронов А.А., Майер А.Г.* Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования // Доклады АН СССР. 1945. Т. 47. № 5. С. 345–348.
23. *Айзерман М.А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости “в большом” динамических систем // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. С. 187–188.
24. *Kalman R.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. 1957. V. 79. № 3. P. 553–566.
25. *Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты // Доклады Академии наук. 2019. Т. 489. № 6. С. 541–544.

HIDDEN BOUNDARY OF GLOBAL STABILITY IN THE KAPRANOV CONJECTURE ON THE PULL-IN RANGE

Corresponding Member of the RAS N. V. Kuznetsov^{a,b}, M. Y. Lobachev^a, and T. N. Mokaev^a

^a Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation

^b Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation

Within the framework of the development of the theory of hidden oscillations, the problem of determining the boundary of global stability and revealing its hidden parts corresponding to the non-local birth of hidden oscillations is considered. For a phase-locked loop with a proportional-integrating filter and a piecewise-linear phase detector characteristic, effective methods for determination of bifurcations of the global stability loss, for obtaining analytical formulas of the bifurcation values, and for constructing trivial and hidden parts of the global stability boundary are suggested.

Keywords: hidden boundary of global stability, self-excited and hidden oscillations, local and global bifurcations, phase-locked loop, Kapranov conjecture, pull-in range

УДК 519.615

МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ФИКТИВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ В ЗАДАЧЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2023 г. Академик Ю. Г. Евтушенко^{1,2,*}, А. А. Третьяков^{1,3,**}

Поступило 19.04.2023 г.
После доработки 04.07.2023 г.
Принято к публикации 13.07.2023 г.

Рассматривается задача поиска глобального экстремума неотрицательной функции на положительном параллелепипеде в n -мерном евклидовом пространстве. Предложен метод локализации фиктивных экстремумов в ограниченной области вблизи начала координат, что позволяет отделить точку глобального экстремума от фиктивных экстремумов путем отбрасывания его на существенное расстояние от множества локализации фиктивных минимумов. При этом за счет выбора начальной точки в методе градиентного спуска удается обосновать сходимость итерационной последовательности к глобальному экстремуму минимизируемой функции.

Ключевые слова: глобальный экстремум, локальный минимум, градиентный метод, сходимость

DOI: 10.31857/S2686954323600222, **EDN:** PNRHVU

Рассматривается задача

$$\min_{x \in \Pi} \varphi(x), \quad (1)$$

где $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leq x^i \leq b^i, i = 1, \dots, m\}$. При этом считаем, что в точке минимума $x^* = \arg \min_{x \in \Pi} \varphi(x)$, $\varphi(x^*) = 0$ и $a^i > 0, i = 1, \dots, m$.

Данные предположения не являются принципиальными, но облегчают описание предложенного подхода решения таких задач. Пусть $\{x_j^*\}$, $j \in P$, множество локальных минимумов для задачи (1), $P = \{1, \dots, p\}$, и глобальный минимум достигается при $j = j_0$ в точке $x_{j_0}^* = x^*$. В общем случае данная задача является многоэкстремальной. Один из способов ее решения — это классический градиентный метод [1], схема которого имеет следующую структуру

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \varphi'(x_k), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

и при определенных условиях на выбор шага α_k (например, [1, 2]),

$$\begin{aligned} \varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) &\geq q_k \alpha_k \|\varphi'(x_k)\|^2, \\ q_k &\in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

последовательность x_k сходится к некоторому локальному минимуму $x_j^*(x_0)$ (см. [1]). Проблема состоит в том, что локальных минимумов может быть много ($j \in P$) и, в зависимости от начальной точки x_0 , мы получим тот или иной локальный экстремум $x_j^*(x_0) \neq x^*$. Учитывая свойства градиентного метода, естественно предположить, что — итерационная последовательность (2), определенная начальной точкой x_0 , будет сходиться к ближайшему локальному минимуму, т.е.

$$x_j^*(x_0) = \arg \min_{j \in P} \|x_0 - x_j^*\|. \quad (4)$$

Предположение (4) весьма естественно, и мы примем его в качестве отправного.

Отметим, что функция $\varphi(x)$ определена только в прямоугольнике Π , но мы можем ее доопределить гладким образом за границы прямоугольника (параллелепипеда) Π так, что

$$\varphi(x) \geq \varphi(P_\Pi(x)) + \|x - P_\Pi(x)\|^2,$$

где $P_\Pi(\cdot)$ — оператор проектирования на Π , т.е. $\varphi(x)$ будет квадратично возрастать вне прямоугольника Π и заведомо вне Π не будет локальных экстремумов у доопределенной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi, \quad (5)$$

¹ Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление”

Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

³ Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**E-mail: prof.tretyakov@gmail.com

и значения $\varphi(x)$ при $x \notin \Pi$ будут больше, чем внутри прямоугольника Π .

Новизна метода состоит в том, что делается замена координат

$$y = \frac{x}{\varphi(x) + \varepsilon} \quad (6)$$

и минимизируется функция $\bar{\varphi}(y) = \varphi(x(y))$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, где $x(y)$ – решение системы (6). Здесь $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, при котором

фиктивные (локальные) минимумы $y_j^* = \frac{x_j^*}{\varphi(x_j^*) + \varepsilon}$,

$j \in P \setminus \{j_0\}$, функции $\bar{\varphi}(y)$ остаются в ограниченном параллелепипеде

$$\bar{\Pi} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \bar{a}^i \leq y^i \leq \bar{b}^i, i = 1, \dots, m\},$$

где $\bar{a}^i = \frac{a^i}{M + \varepsilon}$, $\bar{b}^i = \frac{b^i}{m + \varepsilon}$, $M = \max_{j \in P \setminus \{j_0\}} \varphi(x_j^*)$, $m = \min_{j \in P \setminus \{j_0\}} \varphi(x_j^*)$, а глобальный минимум $y_j^* = y^* = \frac{x^*}{\varphi(x^*) + \varepsilon} = \frac{x^*}{\varepsilon}$ отбрасывается от области $\bar{\Pi}$, в которой локализуются фиктивные экстремумы y_j^* , $j \in P \setminus \{j_0\}$, т.е.

$$\|y^*\| \geq N = \frac{1}{\varepsilon},$$

где N достаточно велико и $N \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Причем в новых переменных функция $\bar{\varphi}(y)$ достигает минимума в точке $y^* = \frac{x^*}{\varepsilon}$, т.е. $\bar{\varphi}(y^*) = 0$.

В дальнейшем, при использовании наших построений, потребуется решать одномерное урав-

нение (см. ниже (8)) на каждом шаге итерационного процесса, что является платой за возможность получения (вычисления) глобального минимума в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, на наш взгляд, является несравненно более элементарной процедурой при решении n -мерной задачи. Поэтому мы будем использовать задачу (8) как вспомогательную и несравненно более простую, не требующую особых вычислительных затрат. При этом для всех фиктивных экстремумов y_j^* , $j \in P \setminus \{j_0\}$, будет выполнено неравенство $\|y_j^*\| \leq C$, где константа C не зависит от N , а $\|y^*\| = \|y_{j_0}^*\| \geq N = \frac{1}{\varepsilon}$ при N достаточно больших. Если взять начальную точку $y_0 = (2N, \dots, 2N)^\top$, то будет выполнено соотношение (4), так как

$$\|y_0 - y^*\| \sim N \cdot \sqrt{n - \frac{3}{4}} < 2N\sqrt{n} \sim \|y_0 - y_j^*\|, \quad j \in P \setminus \{j_0\}$$

при N достаточно больших. Здесь мы учитываем, что $y^* > 0$, ибо $x^* > 0$. Таким образом, градиентный метод

$$y_{k+1} = y_k - \alpha_k \bar{\varphi}'(x(y_k)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

$y_0 = (2N, \dots, 2N)^\top$ с выбором шага по формуле (3), согласно предположению (4), будет сходиться к точке глобального минимума y^* функции $\bar{\varphi}(y) = \varphi(x(y))$, а значит к x^* .

При этом $\bar{\varphi}'(y) = \varphi'_x(x(y)) \cdot x'(y)$, где $x(y)$ берем как решение уравнения (6) и по теореме о неявной функции

$$x'(y) = - \begin{pmatrix} \frac{\varphi(x) + \varepsilon - x^1 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^1}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} & \frac{-x^1 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^2}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} & \dots & \frac{-x^1 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^n}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} \\ \frac{-x^2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^1}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} & \frac{\varphi(x) + \varepsilon - x^2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^2}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} & \dots & \frac{-x^2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^n}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-x^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^1}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} & \dots & \frac{-x^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^{n-1}}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} & \frac{\varphi(x) + \varepsilon - x^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^n}}{(\varphi(x) + \varepsilon)^2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Очевидно, что для существования $\bar{\varphi}'(y)$ нужно требовать невырожденность матрицы $x'(y)$ во всех точках $y \in \mathbb{R}^n$.

Все вышеизложенное можно сформулировать в виде следующего результата:

Теорема 1. Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi''(x)\| \leq C$, $x \in \mathbb{R}^n$, выполняется предположение (4) и матрица $x'(y)$ невырождена для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Тогда существует достаточно большое $N_0 > 0$, такое, что при $N \geq N_0$ и $y_0 = (2N, \dots, 2N)^\top$ выполняется неравенство

$$\|y_0 - y^*\| < \|y_0 - y_j^*\|, \quad j \in P \setminus \{j_0\}$$

и метод (7) сходится к y^* при $k \rightarrow \infty$, где α_k выбирается из условия (3). (Или $x_k \rightarrow x^*$ при $k \rightarrow \infty$.)

Доказательство. Достаточно показать, что вне области $\bar{\Pi}$ не будет локальных экстремумов, кроме y^* , т.е. $\bar{\varphi}'(y) \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Pi}$.

Действительно, если для некоторого $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Pi}$ будет $\bar{\varphi}'(\tilde{y}) = 0$, то либо $\varphi'_x(x(\tilde{y})) = 0$, либо матрица $x'(\tilde{y})$ вырождена. Второе очевидно невозможно в силу условий теоремы. Если же $\varphi'_x(x(\tilde{y})) = 0$, то либо $\tilde{y} \in \bar{\Pi}$, что и требовалось, либо соответствующий $x(\tilde{y}) \notin \bar{\Pi}$. Но в последнем случае градиент $\varphi'_x(x(\tilde{y}))$ не может равняться нулю вне области Π , согласно (5). Теорема доказана. $\square$

Подчеркнем тот факт, что по формуле

$$\bar{\varphi}'(y_k) = \varphi'_x(x(y_k)) \cdot x'_y(y_k)$$

$x(y_k)$ ищется как решение одномерного уравнения относительно неизвестного x :

$$y_k = \frac{x}{\varphi(x) + \varepsilon} = \frac{t \cdot y_k}{\varphi(t \cdot y_k) + \varepsilon}, \quad (8)$$

откуда $x_k = x(y_k)$,

здесь $x = t \cdot y_k$, $t \in R$, что является более простой вычислительной задачей, по сравнению с решением системы n -мерных уравнений. Тогда последовательность $\{y_k\}$ сходится к y^* при $k \rightarrow \infty$, $x^* = \varepsilon \cdot y^*$.

Другой подход к решению задачи глобальной оптимизации можно найти, например, в [3].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №~21-71-30005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
2. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
3. Grishagin V., Israfilov R., Sergeyev Y. Convergence conditions and numerical comparison of global optimization methods based on dimensionality reduction schemes // Applied Mathematics and Computation. 2018. V. 318. P. 270–280.

THE METHOD OF FICTITIOUS EXTREMA LOCALIZATION IN THE PROBLEM OF GLOBAL OPTIMIZATION

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko^{a,b} and A. A. Tret'yakov^{a,c}

^a Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^b Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russian Federation

^c Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

The problem of finding the global extremum of a non-negative function on a positive parallelepiped in n -dimensional Euclidean space is considered. A method of fictitious extrema localization in a bounded area near the origin is proposed, which allows to separate the global extremum point from fictitious extrema by discarding it at a significant distance from the localization set of fictitious minima. At the same time, due to the choice of the starting point in the gradient descent method, it is possible to justify the convergence of the iterative sequence to the global extremum of the minimized function.

Keywords: global extremum, local minimum, gradient descent method, convergence

УДК 517.957

ОДНОМЕРНЫЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА КАК ПРЕДЕЛ КОММУТИРУЮЩИХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. Г. С. Маулешова^{1,2,*}, член-корреспондент РАН А. Е. Миронов^{1,2,**}

Поступило 15.05.2023 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принято к публикации 13.07.2023 г.

В работе показано, что одномерный конечнозонный оператор Шрёдингера может быть получен предельным переходом из разностного оператора второго порядка, который коммутирует с некоторым разностным оператором нечетного порядка, коэффициенты этих разностных операторов являются функциями на прямой и зависят от малого параметра. При этом спектральная кривая разностных операторов не зависит от малого параметра и совпадает со спектральной кривой оператора Шрёдингера.

Ключевые слова: коммутирующие разностные операторы, одномерный оператор Шрёдингера, коммутирующие дифференциальные операторы

DOI: 10.31857/S2686954323600349, **EDN:** POQKOT

В этой работе мы продолжаем изучение коммутирующих разностных операторов ранга один, начатое в [1]. Мы предполагаем, что коэффициенты операторов зависят от малого параметра и являются функциями на прямой, а не на решетке, как это принято в теории коммутирующих разностных операторов. С одной стороны, это предположение позволяет изучать взаимосвязь между коммутирующими разностными и дифференциальными операторами при стремлении малого параметра к нулю, с другой стороны, это сильно усложняет задачу, так как в этом случае не удастся построить совместные собственные функции операторов (функцию Бейкера–Ахиезера) явно. Здесь мы концентрируемся на случае, когда разностный оператор второго порядка коммутирует с разностным оператором нечетного порядка и при стремлении малого параметра к нулю переходит в одномерный конечнозонный оператор Шрёдингера, хотя предложенная здесь конструкция работает и в общем случае.

Для начала напомним, что одномерный вещественный гладкий периодический оператор Шрёдингера $H = \partial_x^2 + u(x)$, $u(x + \tau) = u(x)$ называется

конечнозонным, если его спектр Флоке (состоящий из собственных чисел, отвечающих блоховским функциям $\psi(x)$, $\psi(x + \tau) = e^{ip}\psi(x)$, $p \in \mathbb{R}$) состоит из конечного числа отрезков (один из которых полубесконечен). По теореме Новикова [2], если H коммутирует с некоторым дифференциальным оператором нечетного порядка, то H — конечнозонен. Далее под конечнозонным оператором H мы будем понимать оператор коммутирующий с некоторым оператором нечетного порядка (гладкость, вещественность и периодичность потенциала $u(x)$ не предполагается). Собственная функция таких операторов (функция Бейкера–Ахиезера) найдена в [3] в терминах тэта-функции многообразия Якоби гиперэллиптической спектральной кривой. Цель этой работы — построить оператор вида

$$L_2 = \left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + U(x, \varepsilon) \right)^2 + W(x, \varepsilon), \quad (1)$$

где T_ε — оператор сдвига, $T_\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon)$, такой, что L_2 коммутирует с некоторым разностным оператором нечетного порядка и такой, что $L_2 = H + O(\varepsilon)$.

Прежде чем рассматривать разностные операторы, коэффициенты которых — функции на прямой, напомним некоторые основные факты об операторах на решетке. Если разностные операторы

¹ Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

² Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: mauleshova@math.nsc.ru

**E-mail: mironov@math.nsc.ru

$$L_M = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n) T^j, \quad L_N = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n) T^j, \quad n \in \mathbb{Z}$$

коммутируют, то существует ненулевой полином $F(z, w)$ (см. [4]) такой, что $F(L_M, L_N) = 0$. Спектральная кривая Γ пары операторов задается уравнением $F(z, w) = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что Γ — гладкая кривая. Коммутативное кольцо R разностных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на замкнутой римановой поверхности Γ (на неприводимой замкнутой алгебраической кривой, которая может быть сингулярной) с полюсами в точках $q_1, \dots, q_s \in \Gamma$. Совместные собственные функции операторов образуют векторное расслоение ранга l над $\Gamma \setminus \{\cup q_j\}$. Операторы из R называются s -точечными операторами ранга l .

Классификация двухточечных операторов ранга 1 дана в [4, 5]. В случае гладкой спектральной кривой коэффициенты операторов выражаются через тэта-функцию многообразия Якоби (см. [4]). Одноточечные операторы ранга больше 1 рассматривались в [6], в частности, в этой работе найдены операторы ранга 2 в случае эллиптической спектральной кривой, примеры таких операторов в случае спектральной кривой рода больше 1 найдены в [7]. Рассмотрим одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1. Функция Бейкера–Ахиезера ψ для таких операторов восстанавливается по следующим спектральным данным

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, p_n\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \quad (2)$$

Здесь Γ — риманова поверхность рода g , q — некоторая точка на Γ , k^{-1} — локальный параметр в окрестности q , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ , $p_n \in \Gamma$ — набор точек в общем положении. Обозначим через $\mathcal{A}_q$ кольцо мероморфных функций на Γ с полюсом в q и пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Имеет место теорема.

Теорема 1. Существует единственная мероморфная функция $\psi(n, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.

$$1. \psi(0, P) = 1.$$

2. Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + p_1 + \dots + p_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq, \\ \text{если } n > 0,$$

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) - p_{-1} - \dots - p_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq, \\ \text{если } n < 0.$$

3. В окрестности q имеет место разложение

$$\psi = (\varepsilon k)^n + O(k^{n-1}).$$

Для $f(P) \in \mathcal{A}_q$ существует единственный разностный оператор вида

$$L(f) = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(n) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + u_0(n),$$

такой, что

$$L(f)\psi = f(P)\psi.$$

Для другой функции $g(P) \in \mathcal{A}_q$ операторы $L(f)$ и $L(g)$ коммутируют.

Теперь расширим построенные в теореме 1 операторы так, чтобы коэффициенты операторов были определены не на решетке, а на прямой. Основная сложность для этого заключается в том, что степень дивизора нулей $\psi(n, P)$ зависит от n . Чтобы преодолеть эту сложность, рассмотрим

$$\chi(n, P) = \frac{\psi(n+1, P)}{\varepsilon \psi(n, P)}.$$

Заметим, что дивизор нулей и полюсов χ имеет вид

$$(\chi) = \gamma_1(n+1) + \dots + \gamma_g(n+1) + p(n+1) - \\ - \gamma_1(n) - \dots - \gamma_g(n) - q.$$

Мы видим, что степень дивизора нулей и полюсов не зависит от n (и равна $g+1$). Это наблюдение позволяет расширить функцию $\chi(n, P)$ до функции $\chi(x, P)$, $x \in \mathbb{R}$ (или $x \in \mathbb{C}$) и построить коммутирующие разностные операторы с нужными нам свойствами. Изменим спектральные данные (2) на спектральные данные вида

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, p(x, \varepsilon)\},$$

где $p(x, \varepsilon) \in \Gamma$ — гладкое семейство точек такое, что $p(x, 0) = q$. Предположим, что координата точки $p(x, \varepsilon)$ имеет вид

$$k^{-1}(p) = \frac{\varepsilon}{p_1(x)} + \varepsilon^2 p_2(x) + \dots$$

Имеет место

Теорема 2. Существует единственная мероморфная функция $\chi(x, \varepsilon, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.

1. Дивизор нулей и полюсов χ имеет вид

$$(\chi) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) + p(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon) - q,$$

$$\gamma(x, \varepsilon) = \gamma_1(x, \varepsilon) + \dots + \gamma_g(x, \varepsilon), \text{ причем } \gamma(0, \varepsilon) = \gamma.$$

2. В окрестности q функция χ имеет разложение

$$\chi = \frac{k}{p_1(x)} + O(1). \quad (3)$$

$$3. \chi = \frac{1}{\varepsilon} + O(1).$$

Для $f(P) \in \mathcal{A}_q$ существует единственный оператор

$$L(f) = u_m(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + u_0(x, \varepsilon),$$

$u_m(x, \varepsilon) = p_1(x)p_1(x + \varepsilon) \dots p_1(x + (m-1)\varepsilon)$ такой, что

$$L(f) - f(P) = \tilde{L}(f)(p_1(x) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, \varepsilon, P)),$$

где $\tilde{L}(f)$ — некоторый разностный оператор порядка $m-1$, коэффициенты которого — функции от x и P . Для $g(P) \in \mathcal{A}_q$ операторы $L(f)$ и $L(g)$ коммутируют. Причем

$$L(f) = \tilde{u}_m(x) \partial_x^m + \tilde{u}_{m-1}(x) \partial_x^{m-1} + \dots + \tilde{u}_0(x) + O(\varepsilon).$$

Пример. Пусть $\Gamma = \mathbb{C}/\Lambda$ — эллиптическая кривая, $\Lambda = \{2n\omega + 2m\omega', n, m \in \mathbb{Z}\}$ — решетка в $\mathbb{C}$. Рассмотрим мероморфную функцию на Γ

$$\chi = \zeta(z) - \zeta(z - \gamma(x, \varepsilon)) + \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon)) - \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)),$$

где $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса. Функция $\chi(x, z)$ имеет простые полюса в точках $z = 0$, $z = \gamma(x, \varepsilon)$ и простые нули в точках $z = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)$, $z = p(x, \varepsilon) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon)$. Оператор, отвечающий эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$, имеет вид (1), где

$$U(x, \varepsilon) = \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) - \zeta(\gamma(x, \varepsilon)) - \zeta(p(x, \varepsilon)),$$

$$W(x, \varepsilon) = -\wp(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) - \wp(\gamma(x, \varepsilon)).$$

Предположим, что $\gamma(x, \varepsilon)$ имеет разложение

$$\gamma(x, \varepsilon) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\varepsilon + \alpha_2(x)\varepsilon^2 + \dots,$$

тогда

$$p(x, \varepsilon) = \alpha'_0(x)\varepsilon + \left(\alpha'_1(x) + \frac{\alpha''_0(x)}{2} \right) \varepsilon^2 + \dots$$

Положим для простоты $\alpha_0(x) = x, \alpha_1(x) = \text{const}$. Тогда

$$U(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad W(x, \varepsilon) = -2\wp(x) + O(\varepsilon),$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, оператор L_2 переходит в оператор Ламе при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть Γ — риманова поверхность рода g . Приведем явную формулу для χ с помощью тэта-функции многообразия Якоби поверхности Γ . Пусть $a_j, b_j, j = 1, \dots, g$ — базис циклов на Γ с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Обозначим через $\omega_1, \dots, \omega_g$ базис нормированных абелевых дифференциалов $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$. Многообразию Якоби $J(\Gamma)$ поверхности Γ имеет вид

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g\}, \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ji} = \int_{b_j} \omega_i.$$

Тэта-функция задается рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n' \Omega n + 2\pi i n' z).$$

Тэта-функция обладает следующими свойствами периодичности

$$\theta(z + n) = \theta(z), \quad n \in \mathbb{Z}^g,$$

$$\theta(z + \Omega m) = \exp(-\pi i m' \Omega m - 2\pi i m' z) \theta(z), \quad m \in \mathbb{Z}^g.$$

Пусть ω_{pq} — мероморфная 1-форма на Γ с простыми полюсами в $p = p(x, \varepsilon)$ и q , с вычетами $\text{Res}_p \omega_{pq} = \frac{1}{\varepsilon}, \text{Res}_q \omega_{pq} = -\frac{1}{\varepsilon}$ и нормированная условием $\int_{a_i} \omega_{pq} = 0$.

Отображение Абеля $A : \Gamma \rightarrow J(\Gamma)$ задается следующим образом

$$A(P) = \left(\int_q^P \omega_1, \dots, \int_q^P \omega_g \right).$$

Пусть $\zeta = A(\gamma) + \mathcal{H} = A(\gamma_1) + \dots + A(\gamma_g) + \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — вектор римановых констант. Пусть $V(x, \varepsilon)$ — решение разностного уравнения

$$\frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_b \omega_{pq} = V(x + \varepsilon) - V(x),$$

$$V(0, \varepsilon) = 0, \quad V(x) = V(x, \varepsilon),$$

$\int_b \omega_{pq}$ — вектор b -периодов, составленный из $\int_{b_j} \omega_{pq}$. Тогда функция χ имеет вид

$$\chi = \exp \left(\varepsilon \int_{P_0}^P \omega_{pq} \right) \frac{\theta(A(P) + V(x + \varepsilon) + \zeta) \theta(V(x) + \zeta)}{\theta(A(P) + V(x) + \zeta) \theta(V(x + \varepsilon) + \zeta) \xi},$$

где $\xi = \xi(x, \varepsilon)$ — нормировочный коэффициент для выполнения асимптотики (1), P_0 — некоторая точка на Γ . Путь от P_0 до P состоит из фиксированного пути от P_0 до q и от q до P_0 .

Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ форма ω_{pq} переходит в мероморфную форму ω_1 , которая имеет полюс второго порядка в q и нулевые a -периоды. Пусть $B = \int_b \omega_1$ — вектор ее b -периодов.

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ , заданную уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g} z^{2g} + \dots + c_0,$$

в качестве выделенной точки выберем $q = \infty$, пусть $k^{-1} = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда по теореме 2 мероморфной функции $f(P) = z$ отвечает оператор L_2 вида (1). Имеет место

Теорема 3. *Имеют место разложения*

$$U(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(1),$$

$$W(x, \varepsilon) = -2\partial_x^2 \log \theta(Bx + \zeta) + c + O(\varepsilon),$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\partial_x^2 \log \theta(Bx + \zeta) + c + O(\varepsilon),$$

где c — некоторая константа.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор L_2 переходит в одномерный конечнозонный оператор Шрёдингера.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-41-00018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маулешова Г.С., Миронов А.Е. // ДАН. 2018. Т. 478. В. 4. С. 392–394.
2. Новиков С.П. // Функции. анализ и его прил. 1974. Т. 8. В. 3. С. 54–66.
3. Имс А.Р., Матвеев В.Б. // ТМФ. 1975. Т. 23. В. 1. С. 51–68.
4. Кричевер И.М. // УМН. 1978. Т. 33. В. 4 (202). С. 215–216.
5. Mumford D. // Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977). Kinokuniya. Tokyo. 1978. 115–153.
6. Кричевер И.М., Новиков С.П. // УМН. 2003. Т. 58. В. 3 (351). С. 51–88.
7. Маулешова Г.С., Миронов А.Е. // Тр. МИАН. 2020. Т. 310. С. 217–229.

ONE-DIMENSIONAL FINITE-GAP SCHRÖDINGER OPERATORS AS A LIMIT OF COMMUTING DIFFERENCE OPERATORS

G. S. Mauleshova^{a,b,*} and Corresponding member of the RAS A. E. Mironov^{a,b,**}

^a Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

^b Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

In this paper we show that the one—dimensional finite—gap Schrödinger operator can be obtained by passing to the limit from a second—order difference operator that commutes with some odd—order difference operator; the coefficients of these difference operators are functions defined on the line and depend on a small parameter. Moreover, the spectral curve of the difference operators does not depend on the small parameter and coincides with the spectral curve of the Schrödinger operator.

Keywords: commuting difference operators, one—dimensional Schrödinger operator, commuting differential operators

УДК 511.9

ВОЗВРАЩАЕМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. Н. В. Денисова^{1,2,*}

Представлено академиком В.В. Козловым

Поступило 02.05.2023 г.

После доработки 25.06.2023 г.

Принято к публикации 13.07.2023 г.

Обсуждается круг вопросов, связанный с возвращаемостью интегралов условно периодических функций с нулевым средним значением. В случае гладких функций на торе возвращаемость интегралов заведомо имеет место для всех начальных фаз. Новое наблюдение заключается в том, что для почти всех начальных фаз свойство возвращаемости одновременно имеет место не только для интегралов, но и для фазовых точек на торе. Более того, этот результат справедлив и в случае, когда соответствующие функции на торе только непрерывны. Эти наблюдения переносятся на общий случай эргодических преобразований компактных метрических пространств с мерой Каратеодори.

Ключевые слова: условно периодическая функция, частоты, возвращаемость, мера Каратеодори, теорема Хопфа

DOI: 10.31857/S2686954323600258, **EDN:** SVEUKA

1. ФИНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 1\}$ – n -мерный тор с угловыми координатами $x_1, \dots, x_n$ и $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Пусть числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Функция

$$t \mapsto f(t) = f(\omega_1 t + x_1^0, \dots, \omega_n t + x_n^0)$$

называется *условно периодической* функцией. Числа $\{\omega_j\}$ – частоты, а $\{x_j^0\}$ – начальные фазы. Можно сказать по-другому: условно периодическая функция – это композиция функций $t \mapsto x(t, x^0)$, где $x(\cdot, x^0)$ – решение системы дифференциальных уравнений на $\mathbb{T}^n$

$$\dot{x}_j = \omega_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.1)$$

с начальным условием x^0 , и непрерывной функции $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Изучение интегралов

$$F(t, x^0) = \int_0^t f(\omega s + x^0) ds$$

относится к классическим задачам теории условно периодических функций (см., например, [1, 2]). Согласно теореме Вейля об усреднении, для всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{F(t, x^0)}{t} = \langle f \rangle, \quad \langle f \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f d^n x.$$

Усреднение f производится по инвариантной мере динамической системы, определяемой дифференциальными уравнениями (1.1). В дальнейшем будем считать среднее f равным нулю. Так что $F(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Теорема 1. Для почти всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$ имеет место свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $t_k \uparrow \infty$ такая, что

$$|F(t_k, x^0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \text{dist}(x(t_k, x^0), x^0) < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Расстояние dist между точками на торе определяется евклидовой метрикой $dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Последовательность моментов времени $\{t_k\}$, удовлетворяющих только второму неравенству (1.2), универсальна: она не зависит от выбора функции f . Однако подпоследовательность $\{t_k\}$, удовлетворяющая первому неравенству (1.2), уже может зависеть от выбора начальной фазы x^0 . По сравне-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: ndenis@mech.math.msu.su

нию с общим результатом работы [3] в заключении теоремы 1 присутствует содержательное свойство одновременной возвращаемости точки на торе с условно периодическим движением (второе неравенство (1.2)).

Положим $M = \{x \in \mathbb{T}^n : f(x) \neq 0\}$. Это измеримое множество в $\mathbb{T}^n$.

Теорема 2. Для почти всех $x^0 \in M$ функция $t \mapsto F(t, x^0)$ имеет бесконечно много простых нулей как при $t \rightarrow +\infty$, так и $t \rightarrow -\infty$.

Это простое следствие теоремы 1. В [3] установлена бесконечность числа нулей функции $t \mapsto F(t, x^0)$ для почти всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$. Теорема 2 утверждает бесконечность числа *простых* нулей для почти всех x^0 , удовлетворяющих неравенству $f(x^0) \neq 0$. С другой стороны, справедливо утверждение, которое обобщает и усиливает классический результат Боля (см. [4, 5]).

Теорема 3. Найдутся точки $x_{\pm}^0 \in \mathbb{T}^n$, $f(x_{\pm}^0) = 0$ такие, что

$$F(t, x_+^0) \geq 0 \quad (F(t, x_-^0) \leq 0)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Это утверждение справедливо и без предположения о независимости частот $\omega_1, \dots, \omega_n$. Надо только предположить, что f непрерывна и $\langle f \rangle = 0$.

Свойство возвращаемости интеграла в Теореме 1 имеет место для *почти всех*, но *не всех* начальных фаз. Вот пример, восходящий к Пуанкаре [5, 6]: $n = 2$ и

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^m \cos 2\pi(u_m x_1 + v_m x_2), \quad (1.3)$$

где $\Lambda = \sqrt{2} + 1$, $(\Lambda + 1)/2 < A < \Lambda$, а целые числа u_m и v_m определяются из разложения

$$(\sqrt{2} - 1)^m = u_m + v_m \sqrt{2}.$$

Функция (1.3), очевидно, непрерывна на $\mathbb{T}^2$. Пусть частоты ω_1, ω_2 равны соответственно $1/2\pi, \sqrt{2}/2\pi$: а начальные фазы x_1^0, x_2^0 равны нулю. Тогда

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^m \cos \frac{t}{\Lambda^m},$$

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds = \sum_{m=0}^{\infty} A^m \sin \frac{t}{\Lambda^m}.$$

Можно показать, что $F(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$. При этом $f(x_1^0, x_2^0) > 0$ (ср. с заключением теоремы 3). В этом примере в качестве начальных фаз можно

также взять $x_1^0 = \alpha, x_2^0 = \sqrt{2}\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$; тогда интеграл $F(t, \alpha, \sqrt{2}\alpha)$ также будет стремиться к $\pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Это множество начальных фаз всюду плотно на $\mathbb{T}^2$, но, конечно, имеет нулевую меру.

Как показано в [5], функция (1.3) не дифференцируема по переменным x_1, x_2 ни в одной точке двумерного тора. Это замечание имеет существенное значение. Дело в том, что для гладких f неравенства (1.2) в теореме 1 справедливы одновременно для *всех* начальных фаз. Этот результат сначала был установлен для $f \in C^2(\mathbb{T}^2)$ [7], затем для непрерывно дифференцируемых функций [8], а в заметке [9] для функций, абсолютно непрерывных на двумерном торе.

В многомерном случае возвращаемость интеграла F установлена в работе [10] в предположении аналитичности функции $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Правда, при этом ничего не говорится о выполнении второго неравенства (1.2). Этому результату предшествовала работа [11] о равномерной возвращаемости интеграла от условно периодической функции в предположении нечетности f (в примере Пуанкаре функция f четная). Общий результат о возвращаемости интеграла при $n = 3$ получен в [12].

Приложение свойств возвращаемости интегралов условно периодических функций к теории динамических систем содержится в [5, 13, 14].

2. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Имеется дискретный вариант теоремы 1. Чтобы его сформулировать, рассмотрим отображение $T : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, которое определяется формулами

$$x_j \mapsto x_j + \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Так что T^k отображает точку $x \in \mathbb{T}^n$ в $x + k\alpha$. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и 1 считаем независимыми над $\mathbb{Z}$.

Пусть $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Сопоставим ей сумму

$$G(k, x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_{m=0}^{k-1} g(m\alpha_1 + x_1^0, \dots, m\alpha_n + x_n^0).$$

Снова, по теореме Вейля,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G(k, x^0)}{k} = \langle g \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} g d^n x$$

равномерно по $x^0 \in \mathbb{T}^n$. Пусть дальше $\langle g \rangle = 0$.

Теорема 4. Для почти всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$ имеет место свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ най-

дётся последовательность целых чисел $k_s \uparrow \infty$ такая, что

$$|G(k_s, x^0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \text{dist}(T^{k_s} x^0, x^0) < \varepsilon.$$

В [15] указан дискретный вариант теоремы 3, справедливый для более широкого класса строго эргодических преобразований.

Теорема 1 вытекает из теоремы 4. Действительно, $\omega_n \neq 0$, поскольку числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ независимы над $\mathbb{Z}$. Далее положим $\tau = 1/\omega_n$. Введем отображение $(n-1)$ -мерного тора на себя формулой

$$T: x_1 \mapsto x_1 + \omega_1 \tau, \dots, x_{n-1} \mapsto x_{n-1} + \omega_{n-1} \tau$$

и непрерывную функцию

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^{1/\omega_n} f(\omega_1 t + x_1, \dots, \omega_{n-1} t + x_{n-1}, \omega_n t + x_n^0) dt.$$

Число $x_n^0 \bmod 1$ фиксировано. Легко показать, что

$$\langle g \rangle = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} g dx_1 \dots dx_{n-1} = 0.$$

Числа $\omega_1 \tau, \dots, \omega_{n-1} \tau$ и 1, очевидно, независимы над $\mathbb{Z}$. Наконец,

$$F(m\tau, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \sum_{k=0}^{m-1} g(T^k(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Остается применить теорему 4. Сама теорема 4 является следствием более общего результата из п. 3.

З а м е ч а н и е. Поскольку теорема 1 является следствием теоремы 4, то в теореме 1 моменты времени $\{t_k\}$ можно выбрать из некоторой арифметической прогрессии.

3. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ВОЗВРАЩЕНИИ

Пусть Γ — полное компактное метрическое пространство с расстоянием ρ и μ — конечная мера Каратеодори на Γ (эта мера счетно аддитивна и все открытые множества в Γ измеримы; подробности, например, в [16]). Пусть T — непрерывное отображение, сохраняющее меру μ .

Пусть $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция с нулевым средним:

$$\int_{\Gamma} g d\mu = 0.$$

Нас будет интересовать поведение суммы

$$G(n, x) = g(x) + g(Tx) + \dots + g(T^{n-1}x). \quad (3.1)$$

По теореме Биркгофа–Хинчина,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n, x)}{n} = 0$$

для почти всех $x \in \Gamma$.

Теорема 5. Если T — эргодическое преобразование, то для почти всех $x \in \Gamma$ имеет место свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность целых $n_k \uparrow \infty$ такая, что

$$|G(n_k, x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho(T^{n_k} x, x) < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Возвращаемости может не быть при всех $x \in \Gamma$ (как показывает пример Пуанкаре из п. 1). Кроме того, последовательность $\{n_k\}$ может зависеть от выбора точки x .

Справедлив непрерывный аналог теоремы 5.

Пусть (Γ, μ, g^t) — динамическая система на компактном метрическом пространстве Γ с конечной мерой Каратеодори μ и $\{g^t\}$ — семейство непрерывных преобразований Γ , сохраняющих меру μ . Пусть f — непрерывная функция на Γ с нулевым средним значением.

Теорема 6. Пусть система (Γ, μ, g^t) эргодическая. Тогда для почти всех $x \in \Gamma$ имеет место следующее свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $t_k \uparrow \infty$ такая, что

$$\left| \int_0^{t_k} f(g^s x) ds \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho(g^{t_k} x, x) < \varepsilon.$$

Это утверждение является некоторым усилением основного результата [3]. Непосредственным следствием этого утверждения является

Теорема 7. Пусть система (Γ, μ, g^t) эргодическая и $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция с нулевым средним значением. Тогда для почти всех $x \in \{x \in \Gamma: f(x) \neq 0\}$ функция

$$t \mapsto \int_0^t f(g^s x) ds$$

имеет бесконечно много простых нулей как при $t \rightarrow +\infty$, так и $t \rightarrow -\infty$.

Докажем теорему 5 (теорема 6 доказывается аналогично). Расширим фазовое пространство, заменив Γ на $\Gamma \times \mathbb{R}$. Это снова будет метрическим пространством, причем локально компактным.

Расширим теперь действие T на Γ до действия $\hat{T}$ на $\Gamma \times \mathbb{R} = \{(x, y)\}$, полагая

$$\hat{T}(x, y) = (Tx, y + g(x)).$$

Отображение $\hat{T}$ непрерывно и сохраняет меру $\hat{\mu}$ на $\Gamma \times \mathbb{R}$, которая есть произведение меры μ на Γ и стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$. Ясно, что

$$\hat{T}^n(x, y) = (T^n x, y + G(n, x)).$$

Расширенная динамическая система с дискретным временем часто называется *цилиндрическим каскадом*. Собственно нам надо показать, что почти все точки $(x, y) \in \Gamma \times \mathbb{R}$ цилиндрического каскада устойчивы по Пуассону.

Сначала покажем, что почти все точки $\Gamma \times \mathbb{R}$ не уходящие. Напомним, что точка $p = (x, y)$ будет уходящей, если последовательность $\{\hat{T}^n p\}$, $n \geq 0$ не имеет предельных точек. В нашем случае это означает, что последовательность $|G(n, x)|$, $n \geq 0$ должна стремиться к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Однако, поскольку T эргодично и $\langle g \rangle = 0$, то для почти всех $x \in \Gamma$ сумма $G(n, x)$ меняет знак бесконечно много раз в *слабом* смысле: она не может быть в конечном счете положительной или отрицательной. Далее, поскольку Γ компактно, а функция f непрерывна, то f ограничена. Следовательно, для почти всех $x \in \Gamma$ последовательность $|G(n, x)|$, $n \geq 0$ не может стремиться к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим теперь, что $\hat{\mu}(\Gamma \times \mathbb{R}) = \infty$, а для любого компактного подмножества $S \subset \Gamma \times \mathbb{R}$ мера $\hat{\mu}S$ конечна. Это позволяет применить известную эргодическую теорему Хопфа (см., например, [16]), согласно которой почти все точки $\Gamma \times \mathbb{R}$ являются либо уходящими, либо возвращающимися (устойчивыми по Пуассону). В нашем случае реализуется вторая возможность.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит академика В.В. Козлова за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор Г. Почти периодические функции. М.—Л., ОГИЗ, 1934. 128 с.
2. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. Гостехиздат. М. 1953. 396 с.
3. Шнейберг И.Я. Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 92–93.
4. Боль П.Г. Об одном дифференциальном уравнении из теории возмущений // Избранные труды, Изд-во АН Латвийской ССР, Рига, 1961. С. 127–154.
5. Козлов В.В. Об интегралах квазипериодических функций // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1978. № 1. С. 106–115.
6. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат. М.—Л., 1947. 392 с.
7. Козлов В.В. Об одной задаче Пуанкаре // ПММ. 1976. Т. 40. № 2. С. 352–355.
8. Крыгин А.Б. Об ω -предельных множествах гладких цилиндрических каскадов // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 6. С. 873–884.
9. Сидоров Е.А. Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 184–188.
10. Мошечевитин Н.Г. О возвращаемости интеграла гладкой условнопериодической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 737–748.
11. Конягин С.В. О возвращаемости интеграла нечетной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 570–577.
12. Мошечевитин Н.Г. О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 723–735.
13. Kozlov V.V., Moshchevitin N.G. Diffusion in Hamiltonian systems // Chaos. 1998. V. 8. № 1. P. 245–247.
14. Козлов В.В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 201–218.
15. Козлов В.В. Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 3. С. 358–367.
16. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат. М.—Л., 1949. 550 с.

THE RETURNABILITY OF INTEGRALS OF CONDITIONALLY PERIODIC FUNCTIONS

N. V. Denisova^{a,b}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^b P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A range of issues related to the returnability of integrals of conditionally periodic functions with zero mean value is discussed. In the case of smooth functions on the torus, the returnability of integrals obviously holds for all initial phases. A new observation is that for almost all initial phases, the returnability property simultaneously holds not only for integrals, but also for phase points on the torus. Moreover, this result is also valid in the case where the corresponding functions on the torus are only continuous. These observations are transferred to the general case ergodic transformations of compact metric spaces with Carateodori measure.

Keywords: conditionally periodic function, frequencies, returnability, measure Karatheodori, Hopf's theorem

УДК 519.6

ТРЕХСЛОЙНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2023 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин¹, О. Г. Ольховская¹, В. А. Гасилов¹

Поступило 11.05.2023 г.

После доработки 11.07.2023 г.

Принято к публикации 13.07.2023 г.

Разработан метод численного решения нелинейного уравнения, описывающего диффузионный перенос энергии излучения. Метод основан на введении в параболическое уравнение второй производной по времени с малым параметром и явной разностной схеме. Явная аппроксимация исходного уравнения позволяет реализовать на ее основе алгоритм, эффективно адаптируемый к архитектуре различных высокопроизводительных вычислительных систем. Новая схема обеспечивает, сравнительно с исходной схемой, более крупный шаг интегрирования по времени и достаточно высокое разрешение структуры решения, обеспечивая второй порядок точности. Предложен эвристический подход выбора параметров трехслойной разностной схемы. Перспективной областью приложений разработанного метода могут быть задачи физики плазмы и астрофизики.

Ключевые слова: лучистый перенос энергии, модель диффузии излучения, нелинейное параболическое уравнение, явная разностная схема, высокопроизводительные вычисления

DOI: 10.31857/S2686954323600295, **EDN:** SUTWAO

1. ВВЕДЕНИЕ

Высокая трудоемкость решения задач радиационной гидродинамики общеизвестна и стимулирует поиски новых подходов к конструированию численных алгоритмов. Методика, предлагаемая в настоящей работе, в основе имеет явную трехслойную разностную схему, которая применяется к уравнению переноса излучения, следующему из диффузионной модели.

Диффузионное приближение широко применяется в задачах высокотемпературной газовой динамики для описания вклада излучения [1, 2]. Его использование позволяет понизить размерность решаемой задачи о лучистом переносе энергии за счет того, что во многих практически важных случаях позволяет эффективно определить поток $\mathbf{W}$ и плотность энергии излучения U ,

$$\mathbf{W} = \int_{4\pi} I \boldsymbol{\Omega} d\Omega, \quad U = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I d\Omega,$$

где c — скорость света, не прибегая к дорогостоящему расчету интенсивности энергии излучения I в зависимости от направления полета фотонов $\boldsymbol{\Omega}$. Например, в задачах, связанных с генерацией короткоживущей плазмы под действием импульс-

ного источника энергии (лазер, электроразрядный генератор) на конденсированное вещество, анизотропия излучения в основном заметна в начальной стадии процесса, в сравнительно узкой зоне вблизи фронта излучения, и мало влияет на следующее за ним течение плазмы. В подобных ситуациях диффузионное приближение дает вполне приемлемое качественное и количественное описание лучистого теплообмена.

Диффузионная модель переноса энергии излучением включает следующие уравнения [1–3]. Все уравнения записаны в системе единиц из работы [1].

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W} = \kappa (U_p - U), \quad (1.1)$$

$$\frac{c}{3} \cdot \operatorname{grad} U = -\kappa \mathbf{W}, \quad (1.2)$$

где U — плотность энергии излучения; T — температура среды; $U_p = \frac{4\sigma T^4}{c}$ — энергия равновесного излучения тела при локальной температуре материала T (σ — постоянная излучения Стефана-Больцмана); $\kappa = 1/l$ — осредненный по спектру коэффициент поглощения; l — длина свободного пробега фотона, t — время, c — скорость света; $\mathbf{W}$ — поток энергии излучения.

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: olkhovsk@gmail.com

При этом вклад лучистой энергии в удельную внутреннюю энергию среды E описывается уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c\alpha(U - U_p). \quad (1.3)$$

Начальные и граничные условия системы (1.1)–(1.3) задаются для конкретной задачи. Несмотря на широкое распространение в практике решений задач динамики излучающего газа [3] использование диффузионного приближения является не простой алгоритмической проблемой.

Аппроксимации системы уравнений (1.1)–(1.2) посредством неявных схем приводят к системам сеточных уравнений, которые необходимо решать с помощью тех или иных итерационных схем. Соответствующие алгоритмы в параллельной реализации показывают резкое снижение эффективности параллельных вычислений, особенно при использовании систем с экстремальным параллелизмом [4]. Локально-итерационные методы решения сеточных систем уравнений имеют хорошую перспективу, однако, несмотря на достигнутый в последние годы прогресс в их разработке (см., напр., [5]), требуются дальнейшие исследования по их адаптации (в частности, повышению эффективности при обменах данными в подходах типа геометрического параллелизма) для расчетов на перспективных гетерогенных вычислительных системах, в которых в качестве ускорителей используются графические платы. Большой проблемой при моделировании нелинейных процессов, зачастую снижающей эффективность использования итерационных методик в системах распределенных вычислений, является разбалансировка нагрузки компьютера.

Явные схемы, которые идеально подходят для распараллеливания, имеют при решении эволюционных задач весьма жесткие ограничения на шаг по времени, что необходимо для устойчивости счета. Это создает большие проблемы при расчете процессов в сильно неоднородных средах. Мы видим, следовательно, что, для того, чтобы стало возможным решение практических многомерных задач переноса излучения в среде, неявные, так и явные схемы решения сеточных уравнений типа диффузии необходимо адаптировать к архитектурам современных суперкомпьютерных систем гетерогенной архитектуры.

В данной работе предлагается трехслойная явная схема для решения уравнения плотности лучистой энергии U . Эта схема является следствием модифицированного за счет добавления члена с малым параметром при второй производной по времени уравнения диффузии.

Модифицированное уравнение диффузии и алгоритм его решения рассмотрим в следующем параграфе.

2. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Уравнения диффузионной модели (1.1)–(1.2) в приближении $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ описывают квазистационарное поле излучения, которое соответствует

“практически мгновенному” установлению лучеиспускательной способности и коэффициента поглощения излучения, зависящих от температуры и плотности вещества, которые, в свою очередь, могут зависеть от времени. Это приближение справедливо, когда характерное время изменения состояния вещества в расчетной области (время гидродинамических процессов) много больше времени прохождения этой области светом. В дальнейшем изложении не рассматривается зависимость излучательной способности и коэффициента поглощения от частоты излучения. В случае необходимости ее учета все полученные результаты легко обобщаются для многогрупповой по спектру модели [3].

Остановимся на физических и математических аспектах построения диффузионной модели (1.1)–(1.2).

Уравнение для одномерного, зависящего от времени переноса излучения имеет вид [1, 2]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{c\alpha}{4\pi} U_p - \alpha I, \quad (2.1)$$

где I — удельная интенсивность излучения, z — пространственная координата, μ — косинус угла относительно оси z .

В прикладных расчетах [1–3] широко используются приближения, основанные на угловых моментах интенсивности излучения (2.1). Первые два угловых момента I для плоского слоя определяются как:

$$U = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} d\mu I(\mu), \quad W = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu \mu I(\mu),$$

где U — плотность энергии излучения, W — поток излучения. Нулевой момент уравнения (2.1) удовлетворяет уравнению [1, 2]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial z} = \alpha(U_p - U), \quad (2.2)$$

которое является выражением энергетического баланса поля излучения.

Первый момент уравнения (2.1) находится путем умножения его на μ , и интегрирования по полному телесному углу:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial z} = -\alpha W. \quad (2.3)$$

Здесь появляется третий угловой момент, $P = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^2 I(\mu)$, который представляет собой давление лучистого потока. Соответственно, уравнение (2.3) выражает баланс импульса фотонов.

Учитывая уравнение баланса материальной энергии (1.3) для определения T , уравнения (2.2) и (2.3) имеют три неизвестных: U , W и P . Известный и самый простой в реализации способ замыкания получается в предположении зависимости давления излучения от плотности энергии:

$$P = \frac{1}{3}U.$$

Уравнение (2.3) при этом преобразуется к виду:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U}{\partial z} = -\alpha W. \quad (2.4)$$

Уравнение энергетического баланса (2.2) остается неизменным. Уравнения (2.2), (2.4) составляют основу так называемого приближения P_1 . В работе [6] было показано, что в пределе оптически толстой среды решение в модели P_1 имеет те же разложения нулевого и первого порядка, что и решение исходного уравнения переноса.

Уравнения диффузионной модели (1.1)–(1.2) соответствуют приближению P_1 , если в (2.4) пренебречь производной по времени от потока излучения W . Нестационарность поля излучения в диффузионном приближении учитывается членом $\frac{\partial U}{\partial t}$ в (2.3). Исключая из (1.1)–(1.2) поток W , получим нестационарное уравнение диффузии вида [2]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\alpha} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \alpha (U_p - U). \quad (2.5)$$

Здесь второе слагаемое записано в дивергентной форме, т.к. коэффициент α в общем случае может зависеть от температуры и плотности среды и, тем самым, от пространственной координаты. Начальные и граничные условия задаются для конкретной задачи. Уравнение (2.5) является уравнением параболического типа. С целью построения эффективного вычислительного алгоритма заменим (2.5) на уравнение гиперболического типа с малым параметром $\tau \ll 1$, имеющим размерность времени, при второй производной $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = c\alpha (U_p - U). \quad (2.6)$$

По форме уравнение (2.6) совпадает с предложенным и исследованным в [8, 9] и других работах гиперболизированным квазилинейным пара-

болическим уравнением. Поэтому для его численного решения можно применять явную трехслойную разностную схему, удовлетворяющую общим условиям устойчивости [7]. Такая схема предложена и изучена в работах [8, 9].

Малый параметр при второй производной τ в данном случае можно получить из системы (2.2), (2.4), отбросив производные по времени от медленно меняющихся параметров U_p и α , которые зависят от термодинамического состояния среды. Параметр τ имеет ясный физический смысл – это время прохождения светом расстояния порядка длины свободного пробега фотона $\tau = 1/(c\alpha) = l/c$. Однако в сеточной модели минимальное расстояние равно шагу сетки и $\tau = h/c$ ($h = \delta l$, $\delta \sim 10^{-2}$). Поэтому с целью стабилизации схемы и увеличения допустимого шага интегрирования по времени предлагается увеличить значение этого параметра, или, что эквивалентно, уменьшить эффективную скорость света $c \rightarrow \alpha c$, $0 < \alpha < 1$. Значение α следует выбирать таким образом, чтобы, прежде всего, выполнялось условие устойчивости. Ограничение на параметр α по устойчивости имеет и другой аспект. При моделировании радиационно-гидродинамических процессов корректирующий фактор α должен подчиняться физическому ограничению: модифицированная скорость света $c' = \alpha c$ должна быть много больше характерных скоростей гидродинамических процессов, учитываемых в конкретной радиационно-гидродинамической модели. Поэтому обоснованный выбор значения параметра α является основной проблемой рассматриваемой нами модификации параболического или эллиптического уравнения: он должен обеспечивать значительный вычислительный эффект, позволяя выполнять расчет по трехслойной явной схеме с разумным с вычислительной точки зрения шагом по времени.

Выпишем аппроксимирующую (2.6) трехслойную явную схему:

$$\begin{aligned} \tau \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\Delta t^2} + \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t} + c\alpha U_i^j = \\ = \frac{c}{3} \left(\frac{1}{\alpha} U x_k \right)^j \mathbf{x}_k + c\alpha F^j. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь Δt – шаг по времени при решении эволюционной радиационно-газодинамической задачи; $c/3(1/\alpha U x_k)^j \mathbf{x}_k$ – разностная аппроксимация дивергенции потока $c \operatorname{div} l/3 \operatorname{grad} U$, k – индекс пространственной координаты; U_i^j – значение плотности энергии излучения U на j -слое по времени в центральном элементе разностного шаблона.

Можно предложить следующую оценку, подтвержденную рядом вычислительных экспериментов

$$\tau \approx h/V,$$

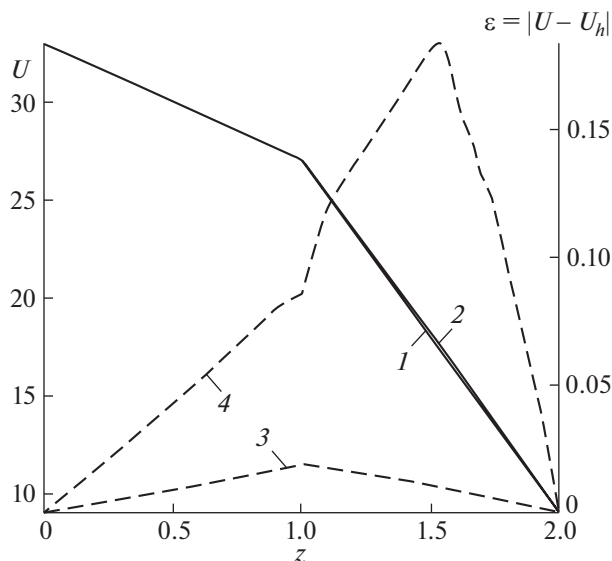


Рис. 1. Плотность энергии излучения. Шкала слева: 1 – численное решение, $\tau = h/c$; 2 – численное решение, $\tau = h/(0.01c)$. Шкала справа: 3 – погрешность численного решения, $\tau = h/c$; 4 – погрешность численного решения, $\tau = h/(0.01c)$.

где h – пространственный размер ячейки сетки, V – характерная скорость процесса.

Из общей теории устойчивости разностных схем [7] можно получить критерий устойчивости трехслойной явной схемы типа (2.7), который имеет вид [8]

$$\Delta t < C_1 \cdot h^{3/2}; \quad C_1 \approx 1/\sqrt{V\alpha}, \quad (2.8)$$

что значительно более приемлемо, чем условие устойчивости явной двухслойной схемы для параболического уравнения [7]

$$\Delta t < C_2 \cdot h^2; \quad C_2 \approx 1/2\alpha. \quad (2.9)$$

Данное различие особенно заметно проявляется при использовании разностных сеток большого размера. Именно для такого случая подробной пространственной сетки, требующей для своей обработки больших вычислительных мощностей, используются высокопроизводительные вычислительные системы.

Как показывает теоретический анализ линеаризованной задачи [10], при малом значении τ различие между гиперболизированной и исходной системами незначительно. Однако из опыта решения больших задач, имеющих реальный физический смысл, известно, что оценки, полученные в линейном приближении, не всегда выполняются.

В следующем параграфе рассмотрим результаты вычислительного эксперимента применительно к решению задачи радиационной газовой динамики, связанной с выбором параметра τ и срав-

нением решения гиперболизированного (2.8) и исходного (2.7) уравнений диффузии.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычислительные эксперименты проводились на одномерных задачах, поскольку явная схема для многомерного случая будет отличаться только способом аппроксимации пространственных производных, и ее реализация не вызывает принципиальных трудностей. Для выбора параметра τ следует использовать линейный размер ячейки пространственной сетки h .

Для тестирования разработанной методики использовались точные решения из работ [11], [12]. В этих работах приведены решения системы уравнений энергии и диффузии излучения в плоском одномерном случае без учета рассеяния

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{c}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + c\alpha(\sigma T^4 - U),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c\alpha(U - \sigma T^4)$$

при специально выбранных начальных и граничных условиях, а также с использованием уравнения состояния и коэффициента поглощения вида:

$$\alpha = k/T^m, \quad E = A\sigma T^4.$$

В каждом случае задача решалась с помощью как исходной (2.5), так и гиперболизированной системы (2.6). Для решения гиперболизированного уравнения использовалась трехслойная схема (2.7).

На рис. 1 и 2 приведено решение для двухобластной задачи с разрывным коэффициентом поглощения, рассмотренной в ([11], задача 4).

$$0 \leq z \leq 2; \quad U(0, t) = 3t + 30.5; \quad U(2, t) = 3t + 6;$$

$$T^4(z, 0) = \begin{cases} -3z + 15, & z \in (0, 1); \\ -6z + 14, & z \in (1, 2); \end{cases}$$

$$U(z, 0) = \begin{cases} 2T^4, & z \in (0, 1); \\ 3T^4, & z \in (1, 2); \end{cases}$$

$$\alpha(z, t) = \begin{cases} 2T^{-4}, & z \in (0, 1); \\ 4T^{-4}, & z \in (1, 2); \end{cases}$$

$$E(z, t) = \begin{cases} 4T^4, & z \in (0, 1); \\ 24T^4, & z \in (1, 2); \end{cases}$$

Решение системы (1.1)–(1.3) при данных начальных и граничных условиях:

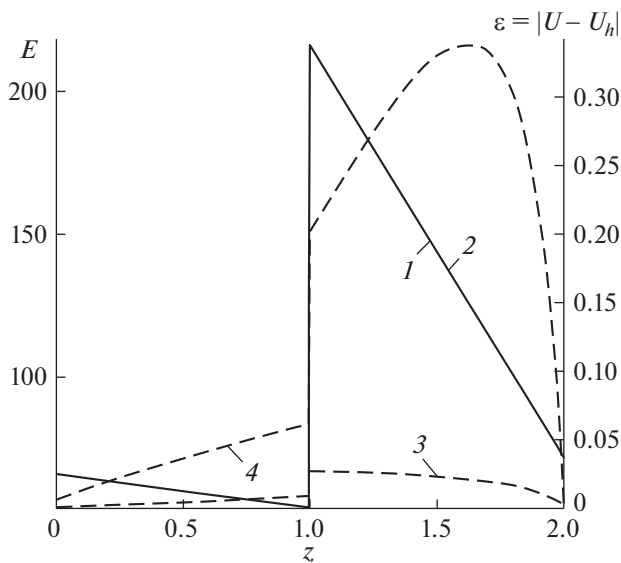


Рис. 2. Внутренняя энергия. Шкала слева: 1 – численное решение, $\tau = h/c$; 2 – численное решение, $\tau = h/(0.01c)$. Шкала справа: 3 – погрешность численного решения, $\tau = h/c$; 4 – погрешность численного решения, $\tau = h/(0.01c)$.

$$T^4(z, t) = \begin{cases} -3z + 1.5t + 15, & z \in (0, 1); \\ -6z + t + 14, & z \in (1, 2) \end{cases};$$

$$U(z, t) = \begin{cases} 2T^4, & z \in (0, 1) \\ 3T^4, & z \in (1, 2) \end{cases}.$$

Расчет выполнялся на отрезке $[0, 2]$, шаг пространственной сетки $h = 0.01$. На графиках представлены рассчитанные профили плотности энергии излучения U и внутренней энергии E (сплошные линии, левая шкала) в системе единиц [11], где $c = 3$, при двух значениях малого параметра при второй производной: $\tau = h/c$ и $\tau = h/(0.01c)$ на момент времени $t_{\max} = 1$. Соответствующие этим значениям графики 1 и 2 на обоих рисунках визуально не отличимы друг от друга и от точного решения, полученного в [11]. Пунктирными линиями показана погрешность разностного решения в норме C , им соответствует правая шкала. Относительная погрешность для U и для E при $\tau = h/c$ в равномерной норме имеет порядок 10^{-4} , см. табл. 1. Погрешность в интегральной норме на порядок меньше. При увели-

чении τ в 100 раз погрешность увеличилась в ~ 10 раз. Тем самым экспериментально подтверждены оценки (2.8) и (2.9) для явных схем решения соответственно систем (2.5) и (2.6). При этом шаг по времени, выбранный из условия (2.8), составлял 1.4×10^{-4} и 1.4×10^{-3} соответственно, тогда как допустимый шаг по времени для явной схемы (2.9) для исходного параболического уравнения $\Delta t_{\max} = h^2/(2\alpha_{\max}) = 2.5 \times 10^{-5}$. Таким образом, благодаря использованию модифицированного уравнения диффузии и трехслойной разностной схемы было достигнуто увеличение шага интегрирования по времени более чем в 50 раз при сохранении высокой точности разностного решения.

Возможность увеличения шага по времени в несколько десятков раз делает реальным расчет многомерных задач на подробных пространственных сетках с использованием современных вычислительных систем сверхвысокой производительности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод гиперболизации уравнения диффузионного переноса излучения имеет хорошую перспективу в отношении решения задач радиационной газовой динамики на современных и перспективных многопроцессорных вычислительных системах. Тестовые решения показали эффективность гиперболизации для задач в приближении “серого” вещества, однако при соответствующих доработках, обусловленных необходимостью детализации выбора стабилизирующего фактора в зависимости от спектрального состава излучения, метод вполне применим в многогрупповом спектральном приближении. Также стабилизированные трехслойные схемы для модели диффузионного переноса будут полезны в вычислениях на многомерных пространственных сетках сложной структуры, таких как, например, неструктурированные или локально-адаптивные иерархические сетки.

Важным направлением дальнейшего развития методики является исследование возможности выполнения расчетов с переменным шагом по времени и/или переменным малым параметром при второй производной по времени. Это позволит существенно повысить эффективность вычислений при сильных изменениях параметров

Таблица 1. Относительная погрешность численного решения

	$\left\ \frac{U - U_h}{U} \right\ _C$	$\frac{\ U - U_h\ _{L_2}}{\ U\ _{L_2}}$	$\left\ \frac{E - E_h}{E} \right\ _C$	$\frac{\ E - E_h\ _{L_2}}{\ E\ _{L_2}}$
$t = h/c$	7.0×10^{-4}	4.5×10^{-4}	1.7×10^{-4}	1.38×10^{-4}
$\tau = h/(0.01c)$	10^{-2}	4.0×10^{-3}	3.0×10^{-3}	1.7×10^{-3}

среды и при использовании динамически перестраиваемых сеток.

Метод гиперболизации диффузионного приближения, очевидно, сохраняет эволюционный вид уравнений, позволяющий относительно легко реализовать самосопряженные консервативные алгоритмы расчета, и хорошую проработку базовых численных методов решения параболических уравнений.

Как уже отмечалось, данный подход позволяет существенно сократить время расчета. Это является актуальным для решения многомерных задач радиационной газовой динамики с учетом спектральной зависимости поля излучения. Именно моделирование таких процессов является наиболее ресурсоемким и требует привлечения для своего решения вычислительных систем высокой и сверхвысокой производительности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (суперкомпьютеры К-60, К-100).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008. 653 с.
2. *Mihalas D., Mihalas B.* Foundations of Radiation Hydrodynamics. Oxford University Press Inc., 1984. 718 p.
3. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985, 304 с.
4. Осипов В.П., Четверушкин Б.Н. Вычислительные алгоритмы для систем с экстремальным параллелизмом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 5. С. 802–814. *Osipov V.P., Chetverushkin B.N.* Numerical Algorithms for Systems with Extramassive Parallelism // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. V. 60. № 5. P. 783–794. <https://doi.org/10.1134/S0965542520050115> <https://doi.org/10.31857/S0044466920050117>
5. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Адаптивный чебышевский итерационный метод // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 10. С. 67–85. *Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B.* An adaptive Chebyshev iterative method // Mathematical Models and Computer Simulations. 2019. V. 11. Iss. 3. P. 426–437. <https://doi.org/10.1134/S2070048219030165>
6. Gordon L. Olson, Lawrence H. Auer, Michael L. Hall Diffusion, P_1 , and other approximate forms of radiation transport // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 15 March 2000. V. 64. Iss. 6. P. 619–634. [https://doi.org/10.1016/S0022-4073\(99\)00150-8](https://doi.org/10.1016/S0022-4073(99)00150-8)
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. Изд. 3, стереот. М.: URSS. 2009. 384 с.
8. Четверушкин Б.Н., Гулин А.В. Явные схемы и моделирование на вычислительных системах сверхвысокой производительности. // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446. № 5. С. 501–503. *Chetverushkin B.N., Gulin A.V.* Explicit Schemes And Numerical Simulation Using Ultrahigh-Performance Computer Systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86. № 2. P. 681–683. <https://doi.org/10.1134/S1064562412050213>
9. Мышечная Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 8. С. 1299. *Myshetskaya E.E., Tishkin V.F.* Estimates of the hyperbolization effect on the heat equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55. Iss. 8. P. 1270–1275. <https://doi.org/10.1134/S0965542515080138> <https://doi.org/10.7868/S004446691508013X>
10. Репин С.И., Четверушкин Б.Н. Оценки разности приближенных решений задач Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Доклады Академии наук. 2013. Т. 451. № 3. С. 255. *Repin S.I., Chetverushkin B.N.* Estimates of the difference between approximate solutions of the cauchy problems for the parabolic diffusion equation and a hyperbolic equation with a small parameter // Doklady Mathematics. 2013. V. 88. № 1. P. 417–420. <https://doi.org/10.1134/S1064562413040157> <https://doi.org/10.7868/S0869565213210056>
11. Андреев Е.С., Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б. Точные решения систем уравнений переноса излучения с разрывом на границе раздела сред // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. Вып. 1. С. 161–163. *Andreev E.S., Kozmanov M.Yu., Rachilov E.B.* Exact solutions of sets of radiation transfer equations with a discontinuity at the boundary of two media // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1984. V. 24. № 1. P. 103–105. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(84\)90126-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(84)90126-5)
12. Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б. О некоторых точных решениях системы уравнений диффузии излучения // Вопросы атомной науки и техники. Серия “Математическое моделирование физических процессов”. 1938. Т. 14. Вып. С. 65–67.

THREE-LAYER SCHEME FOR SOLVING THE RADIATION DIFFUSION EQUATION

Academician of the RAS **B. N. Chetverushkin^a, O. G. Olkhovskaya^a, and V. A. Gasilov^a**

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russian Federation*

A method has been developed for the numerical solution of a nonlinear equation describing the diffusion transfer of radiation energy. The method is based on the introduction of the second time derivative with a small parameter into the parabolic equation and an explicit difference scheme. Explicit approximation of the initial equation makes it possible to implement on its basis an algorithm that is effectively adapted to the architecture of high-performance computing systems. The new scheme provides, in comparison with the original scheme, a larger time integration step and a sufficiently high resolution quality of the solution structure, providing the second order of accuracy. A heuristic algorithm for choosing the parameters of a three-layer difference scheme is proposed. A promising field of application of the method can be problems of plasma physics and astrophysics.

Keywords: radiative transfer of energy, radiation diffusion model, nonlinear parabolic equation, explicit difference scheme, high-performance computing

УДК 517.54

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ НА КЛАССЕ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

© 2023 г. В. В. Горяйнов^{1,*}, О. С. Кудрявцева^{2,3,**}, А. П. Солодов^{2,***}

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным

Поступило 30.03.2023 г.

После доработки 14.06.2023 г.

Принято к публикации 14.07.2023 г.

Изучается класс голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя граничными неподвижными точками, одна из которых является точкой Данжуа–Вольфа. Найдена оценка сверху области однолистности на классе таких функций в зависимости от значения угловой производной в отталкивающей граничной неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, теорема Данжуа–Вольфа, угловая производная, область однолистности

DOI: 10.31857/S2686954323600192, **EDN:** SWBDPG

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы существования и определения размеров областей однолистности голоморфных отображений составляют важное направление геометрической теории функций и в различных постановках исследовались многими авторами. В данной работе мы сконцентрируем внимание на том, какое влияние на область однолистности ограниченного голоморфного отображения оказывают его неподвижные точки. Хорошо известен классический результат Ландау об области однолистности на классе голоморфных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя, нормированных условиями $f(0) = 0$ и $|f'(0)| = \beta$, $\beta \in (0, 1)$. Согласно теореме Ландау [1, 2] любая такая функция однолистка внутри круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \beta/(1 + \sqrt{1 - \beta^2})\}$, причем оценка точная. Недавно было обнаружено [3], что наличие у голоморфного отображения

двух неподвижных точек при определенных условиях влечет существование областей однолистности. Это обстоятельство мотивировало к исследованию геометрии указанных областей и поиску их точных размеров. Прежде чем сформулировать недавние результаты, а также результаты настоящей работы, полученные на пути решения обозначенной выше задачи, приведем необходимые сведения.

Пусть $\mathcal{B}$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя. Если $f \in \mathcal{B}$ и $f(z) \neq z$, то в силу леммы Шварца–Пика (см. [4]) функция f может иметь внутри круга $\mathbb{D}$ не более одной неподвижной точки. В общем случае функция $f \in \mathcal{B}$ может не иметь в круге $\mathbb{D}$ неподвижной точки. Тогда ее заменяет некоторая выделенная точка на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Теорема А (Данжуа, Вольф [5–8]). Пусть $f \in \mathcal{B}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга $\mathbb{D}$ на себя. Тогда существует единственная точка q , $q \in \overline{\mathbb{D}}$, такая, что последовательность натуральных итераций $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n \geq 2$, функции $f = f^1$ сходятся к q локально равномерно в $\mathbb{D}$. Кроме того, если $q \in \mathbb{T}$, то существуют угловые пределы

$$\angle \lim_{z \rightarrow q} f(z) = f(q),$$

$$\angle \lim_{z \rightarrow q} f'(z) = \angle \lim_{z \rightarrow q} \frac{f(z) - q}{z - q} = f'(q),$$

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

³ Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

*E-mail: goryainov_vv@hotmail.com

**E-mail: kudryavceva_os@mail.ru

***E-mail: apsolodov@mail.ru

причем $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leq 1$.

Точка q называется *точкой Данжуа–Вольфа* функции f . Если $q \in \mathbb{D}$, то в силу леммы Шварца–Пика выполняется неравенство $|f'(q)| \leq 1$. Таким образом, точка Данжуа–Вольфа q , $q \in \mathbb{D}$, является *притягивающей* ($|f'(q)| < 1$) или *нейтральной* ($|f'(q)| = 1$) неподвижной точкой функции f .

Если функция $f \in \mathcal{B}$ с точкой Данжуа–Вольфа q , $q \in \mathbb{D}$, имеет дополнительную неподвижную точку a , то она должна располагаться на единичной окружности $\mathbb{T}$ и ее неподвижность понимается в смысле углового предела. По теореме Жюлиа–Каратеодори (см. [9]) в граничной неподвижной точке a всегда существует угловой предел

$$\angle \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - a}{z - a} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|a - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \frac{1 - |z|^2}{|a - z|^2}. \quad (1)$$

Более того, если этот предел конечен, то он является положительным числом и $f'(z)$ имеет тот же угловой предел при $z \rightarrow a$. В этом случае предел (1) называется *угловой производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Обозначим через $\mathcal{B}\{a\}$, $a \in \mathbb{T}$, класс функций f из $\mathcal{B}$, для которых точка a является граничной неподвижной точкой:

$$\mathcal{D}(\alpha, q) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|((1+q)/(1-q))(1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2) - 2i\operatorname{Im} z|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}, \quad (2)$$

причем ни в какой более широкой, чем $\mathcal{D}(\alpha, q)$, области указанное свойство уже не выполняется.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда точка Данжуа–Вольфа является граничной. Не нарушая общности, будем считать, что это точка $q = -1$. Полученный класс обозначим следующим образом:

$$\mathcal{B}_\alpha[-1, 1] = \mathcal{B}_\alpha\{1\} \cap \mathcal{B}[-1], \quad \alpha > 1.$$

(Здесь через $\mathcal{B}[-1]$ обозначен класс функций $f \in \mathcal{B}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q = -1$.) Существование областей однолиственности при некоторых значениях α на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ вытекает из результатов работы [12], в которой были найдены области однолиственности на более широком классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$, состоящем из функций, имеющих ограничение на значение произведения угловых производных в двух граничных неподвижных точках:

$$m(\alpha) = \frac{\alpha(9 - \alpha)^2}{(\alpha - 1)(9(K_1^2(\alpha) + K_2^2(\alpha)) + 3(\alpha - 6)(K_1(\alpha) - K_2(\alpha)) + \alpha^2 + 24\alpha - 9)},$$

$$\mathcal{B}\{a\} = \{f \in \mathcal{B} : \angle \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a) = a\}.$$

Для определенности положим $a = 1$. Для произвольного $\alpha > 1$ выделим в классе $\mathcal{B}\{1\}$ подкласс $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$, состоящий из функций, имеющих ограничение на значение угловой производной в неподвижной точке:

$$\mathcal{B}_\alpha\{1\} = \{f \in \mathcal{B}\{1\} : \angle \lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = f'(1) = \alpha\}.$$

В [10] показано, что ни при каком $\alpha > 1$ на классе $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ нет непустых областей однолиственности. Другими словами, класс $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ слишком обширен и для продвижения в задаче об области однолиственности необходимо рассматривать более узкие классы. Наиболее естественное сужение класса $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$, $\alpha > 1$, — его подкласс, состоящий из функций, имеющих наряду с отталкивающей неподвижной точкой $z = 1$ притягивающую неподвижную точку q . В силу теоремы А притягивающая неподвижная точка обязательно существует (точка Данжуа–Вольфа), и дополнительное условие состоит лишь в фиксации ее расположения (внутри или на границе круга $\mathbb{D}$).

Задача об области однолиственности в случае внутренней точки Данжуа–Вольфа исследовалась в [3, 10]. В [11] была найдена точная область однолиственности при $\alpha \in (1, 4]$. А именно, любая функция f из класса $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ с внутренней точкой Данжуа–Вольфа q , $q \in \mathbb{D}$, однолистка в области

$$\mathcal{B}\{-1, 1\} = \mathcal{B}\{-1\} \cap \mathcal{B}\{1\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\} = \{f \in \mathcal{B}\{-1, 1\} : f'(1)f'(-1) = \alpha\}.$$

Теорема В (Горяйнов [12]). Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$, $\alpha \in (1, 9)$. Тогда f однолистка в области

$$\mathcal{J}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\cos y^*(\alpha)} \right\}, \quad (3)$$

где $y^*(\alpha)$ — единственный в интервале $0 < y < \pi/2$ корень уравнения

$$\cos^2 y = (\alpha - 1) \cos \frac{3\pi - 2y}{3}.$$

Для исследования области $\mathcal{J}(\alpha)$ полезно заметить, что $\cos y^*(\alpha) = (1 + m(\alpha))^{-1/2}$, где

$$K_1(\alpha) = \sqrt[3]{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-1} + 2\alpha^2 - 14\alpha + 11},$$

$$K_2(\alpha) = \sqrt[3]{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-1} - 2\alpha^2 + 14\alpha - 11}.$$

Области $\mathcal{J}(\alpha)$ при каждом $\alpha, \alpha \in (1, 9)$, содержат вещественный диаметр и ограничены двумя дугами окружностей, проходящих через точки $z = \pm 1$.

Верхняя оценка области однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$, $\alpha \in (1, 9)$, найдена в [13]. А именно, показано, что при каждом $s, s \in (-1, 1)$, функция

$$f_s(z) = \frac{a(s)z^3 + b(s)z^2 + c(s)z + d(s)}{d(s)z^3 + c(s)z^2 + b(s)z + a(s)},$$

где $a(s) = (1 + \sqrt{\alpha})(s^2 + 1)$, $b(s) = -2(\sqrt{\alpha} + 3)s$, $c(s) = (3 - \sqrt{\alpha})(s^2 + 1)$, $d(s) = 2(\sqrt{\alpha} - 1)s$, принадлежит классу $\mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$ и имеет нулевую производную в точках

$$z_{1,2}(s) = \frac{-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha) \pm i p_2(\alpha)s}{(-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha))s \pm i p_2(\alpha)},$$

где $p_1(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha}-1)(3+\sqrt{\alpha})}$, $p_2(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha}+1)(3-\sqrt{\alpha})}$. Кривые $z_1(s)$ и $z_2(s)$, $s \in (-1, 1)$, представляют собой дуги окружностей – границу области

$$\mathcal{H}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \frac{2\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3+\sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha}-1)}} \right\}. \quad (4)$$

Таким образом, за границу области $\mathcal{H}(\alpha)$ распространение области однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$ невозможно.

Поскольку $f'_s(\pm 1) = \sqrt{\alpha}$, $\alpha \in (1, 9)$, то обе неподвижные точки функции f_s являются отталкивающими. Это означает, что функция f_s не принадлежит классу $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$. Таким образом, верхняя оценка области однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$ (см. (4)) ничего содержательного для класса $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ не дает. Более того, до настоящего момента не было известно никаких оценок сверху области однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$. В данной работе впервые получена подобная оценка. Кроме того, мы предполагаем (и это будет объяснено далее), что найденная оценка есть точная область однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ

Основной результат работы (теорема 1) опирается на следующее утверждение, имеющее, на наш взгляд, самостоятельное значение.

Лемма 1. Пусть α, β – положительные числа, $z_0 \in \mathbb{D}$. Если некоторая функция $f \in \mathcal{B}\{-1, 1\}$ удовлетворяет условиям $f'(-1) = \beta$, $f'(1) = \alpha$, $f'(z_0) = 0$, то какова бы ни была точка $\zeta \in \mathbb{D}$ такая, что

$$\frac{|1-\zeta^2|}{1-|\zeta|^2} = \frac{|1-z_0^2|}{1-|z_0|^2}, \quad (5)$$

найдется функция $g \in \mathcal{B}\{-1, 1\}$, удовлетворяющая условиям $g'(-1) = \beta$, $g'(1) = \alpha$, $g'(\zeta) = 0$.

Если в дополнение ко всем условиям функция f не имеет других неподвижных точек, то и функцию g можно выбрать так, чтобы она не имела других неподвижных точек.

Доказательство. Пусть для заданных чисел α, β и точки z_0 требуемая функция f найдена. При каждом $s \in (-1, 1)$ рассмотрим функцию $T_s(z) = (z-s)/(1-sz)$, которая осуществляет дробно-линейное отображение круга $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет условиям $T_s(1) = 1$, $T_s(-1) = -1$. Так как $f \in \mathcal{B}\{-1, 1\}$, то функция $g_s = T_s^{-1} \circ f \circ T_s$ также принадлежит классу $\mathcal{B}\{-1, 1\}$. Нетрудно проверить, что $g'_s(-1) = \beta$, $g'_s(1) = \alpha$. Кроме того, $g'_s(\zeta(s)) = 0$, где $\zeta(s) = T_s^{-1}(z_0)$.

Легко убедиться, что каждая точка кривой $\zeta(s)$, $s \in (-1, 1)$, удовлетворяет соотношению (5). В силу непрерывности $\zeta(s)$ и того, что $\zeta(1-0) = 1$, $\zeta(-1+0) = -1$, данная кривая представляет собой одну из двух симметричных относительно вещественного диаметра дуг окружностей, из которых состоит множество точек, описываемых условием (5). Вторая дуга $\overline{\zeta(s)}$, $s \in (-1, 1)$, состоит из нулей производных функций $h_s(z) = \overline{g_s(z)}$, каждая из которых принадлежит классу $\mathcal{B}\{-1, 1\}$ и удовлетворяет условиям $h'_s(-1) = \beta$, $h'_s(1) = \alpha$.

Вторая часть леммы непосредственно следует из следующего факта: $a \in \mathbb{D}$ – неподвижная точка функции g_s (функции h_s) тогда и только тогда, когда точка $T_s(a)$ (точка $T_s(a)$) – неподвижная точка функции f . Лемма доказана. $\square$

Следующая теорема устанавливает, что точная область однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, $\alpha > 1$, содержится в области

$$\mathcal{U}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}. \quad (6)$$

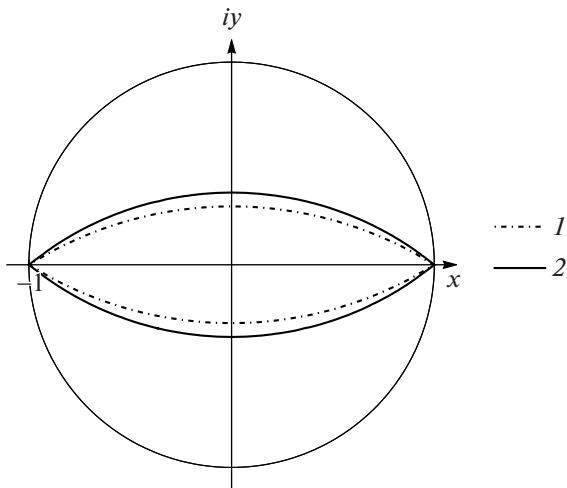


Рис. 1. Границы областей $J(\alpha)$ и $U(\alpha)$ при $\alpha = 2.5$.

Теорема 1. При каждом $\alpha > 1$ какова бы ни была область V , $U(\alpha) \subset V \subset \mathbb{D}$, $V \neq U(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, не однолистная в области V .

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(\zeta) = \alpha^{-1}(\zeta + i(\alpha - 1) + (\alpha - 1)/(\zeta + i))$. Эта функция отображает правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ в себя и имеет ровно две неподвижные точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$. Кроме того, производная функции h обращается в нуль в точке $\zeta_0 = \sqrt{\alpha - 1} - i$.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $L(\zeta) = (\zeta - 1)/(\zeta + 1)$, отображающее полуплоскость $\mathbb{H}$ на круг $\mathbb{D}$, и составим композицию $f = L \circ h \circ L^{-1}$. Функция f отображает круг $\mathbb{D}$ в себя и имеет ровно две неподвижные точки $z = -1$ и $z = 1$, одна из которых в силу теоремы А является точкой Данжуа–Вольфа. Несложные вычисления показывают, что в неподвижных точках функция f имеет следующие значения угловых производных: $f'(-1) = 1$, $f'(1) = \alpha$. Тем самым точка $z = -1$ является точкой Данжуа–Вольфа и $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$. Производная функции f обращается в нуль в точке

$$z_0 = L(\zeta_0) = \frac{\sqrt{\alpha - 1} - 1 - i}{\sqrt{\alpha - 1} + 1 - i},$$

причем $\frac{|1 - z_0|^2}{1 - |z_0|^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}.$

Тем самым $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ и на границе области $U(\alpha)$ имеет нуль производной (точку z_0). Согласно лемме 1 существование такой функции влечет существование для произвольной точки $z \in \mathbb{D}$, лежащей на границе области $U(\alpha)$, функции

$g \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, производная которой обращается в нуль в этой точке.

Пусть теперь V – произвольная область такая, что $U(\alpha) \subset V \subset \mathbb{D}$, $V \neq U(\alpha)$. Тогда некоторая граничная точка области $U(\alpha)$ находится внутри области V . Как показано выше, найдется функция, принадлежащая классу $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ и имеющая в этой точке нулевую производную. Следовательно, эта функция не однолистка в области V . Теорема доказана. $\square$

Интересно провести сравнение верхней и нижней оценок областей однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$. Оценку сверху дает только что доказанная теорема 1, оценка снизу вытекает из теоремы В и вложения $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1] \subset \mathcal{B}_\alpha\{-1, 1\}$. Заметим, что области $J(\alpha)$ и $U(\alpha)$ (см. (3) и (6)) имеют одинаковую структуру (см. рис. 1) и отличаются только размером, что, на наш взгляд, не случайно. В контексте леммы 1 можно предположить, что структура точной области однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ имеет такой же вид. Что касается сравнения размеров областей, то при α , близких к 1, зазор между нижней и верхней оценками невелик. Действительно, дуги, ограничивающие области $J(\alpha)$ и $U(\alpha)$, образуют с вещественной осью в точках $z = \pm 1$ углы $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ соответственно, тангенсы которых имеют следующую асимптотику:

$$\operatorname{tg} \varphi_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} - \frac{19}{32} \sqrt{\alpha - 1} + o(\alpha - 1), \quad \alpha \rightarrow 1 + 0,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}}.$$

Таким образом, полученная двусторонняя оценка областей однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ асимптотически точна при $\alpha \rightarrow 1 + 0$. Разумеется, при α , близких к 9, верхняя и нижняя оценки различаются уже очень сильно, так как при $\alpha \rightarrow 9 - 0$ область $J(\alpha)$ стягивается в вещественный диаметр. При $\alpha \geq 9$ вообще никакой оценки снизу не известно. Тем не менее близость двусторонней оценки при $\alpha \rightarrow 1 + 0$ позволяет сформулировать гипотезу, что полученная в данной работе верхняя оценка и есть точная область однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$. Эта гипотеза косвенно подтверждается также тем, что область $U(\alpha)$ в определенном смысле мало отличается от точной области однолиственности $\mathcal{D}(\alpha, q)$ на классе функций $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ с внутренней неподвижной точкой q , расположенной вблизи точки $z = -1$ (см. (2)), что видно из рис. 2.

В заключение обобщим результат теоремы 1 на случай, когда точка Данжуа–Вольфа произвольно расположена на единичной окружности $\mathbb{T}$. Обозначим через $\mathcal{B}_\alpha[q, 1]$ класс, состоящий из

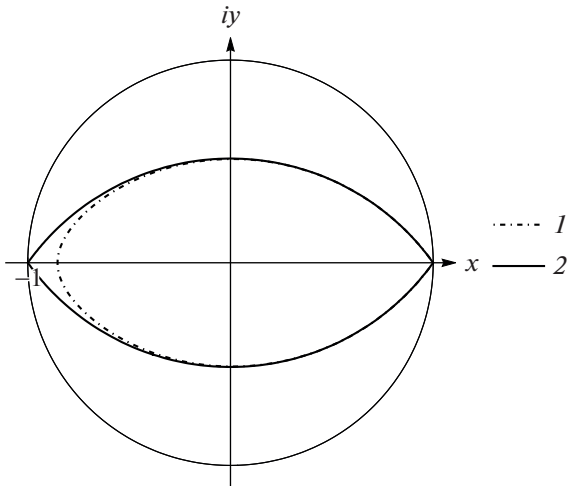


Рис. 2. Границы областей $\mathcal{D}(\alpha, q)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ при $\alpha = 1.5$, $q = -0.8$.

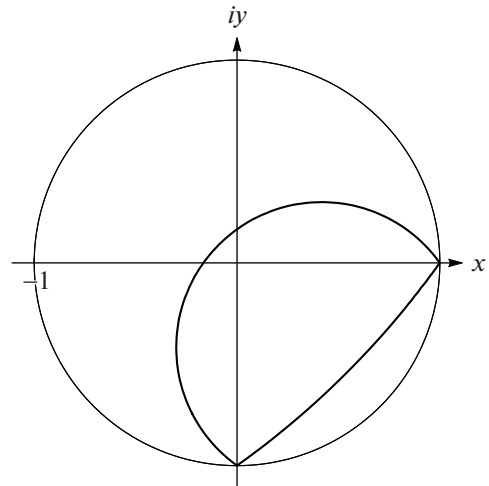


Рис. 3. Граница области $\mathcal{U}(\alpha, q)$ при $\alpha = 1.5$, $q = -i$.

функций $f \in \mathcal{B}_\alpha\{1\}$ с точкой Данжуа–Вольфа $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Покажем, что точная область однолистности на классе $\mathcal{B}_\alpha[q, 1]$ содержится в области

$$\mathcal{U}(\alpha, q) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{2}{|1-q|} \frac{|1-z||q-z|}{1-|z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$, $q \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Какова бы ни была область $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}(\alpha, q) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}(\alpha, q)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[q, 1]$, не однолистная в области $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее дробно-линейное преобразование:

$$S_q(z) = \frac{(3q-1)z - (1+q)}{(1+q)z - (3-q)}.$$

Поскольку $|q| = 1$, $\operatorname{Re} q < 1$ и $|(1+q)/(3q-1)| = (1 + \operatorname{Re} q)/(5 - 3\operatorname{Re} q) < 1$, функция S_q отображает круг $\mathbb{D}$ на себя, при этом точка $z = 1$ остается на месте, а точка $z = -1$ переходит в точку $z = q$.

Как и при доказательстве теоремы 1 достаточно для каждой граничной точки области $\mathcal{U}(\alpha, q)$ (см. (7)) предъявить функцию из класса $\mathcal{B}_\alpha[q, 1]$, производная которой обращается в нуль в этой точке.

Фиксируем точку $z \in \mathbb{D}$, лежащую на границе $\mathcal{U}(\alpha, q)$. Легко проверить, что имеет место равенство

$$\frac{|1 - (S_q^{-1}(z))^2|}{1 - |S_q^{-1}(z)|^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Следовательно, точка $S_q^{-1}(z)$ расположена на границе области $\mathcal{U}(\alpha)$ (см. (6)), и в силу теоремы 1

найдется функция $g \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, производная которой обращается в нуль в точке $S_q^{-1}(z)$. Тогда функция $S_q \circ g \circ S_q^{-1}$ принадлежит классу $\mathcal{B}_\alpha[q, 1]$ и имеет нуль в точке z . Теорема доказана. $\square$

На рис. 3 изображена граница области $\mathcal{U}(\alpha, q)$ (см. (7)) в случае $q = -i$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00131) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau E. Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. V. 32. P. 467–474.
2. Montel P. Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris: Gauthier-Villars, 1933.
3. Горяйнов В.В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. 54–71.
4. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
5. Denjoy A. Sur l'iteration des fonctions analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 255–257.
6. Wolff J. Sur l'iteration des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 42–43.
7. Wolff J. Sur l'iteration des fonctions bornées // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1926. V. 182. P. 200–201.
8. Валирон Ж. Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957.
9. Ahlfors L.V. Conformal invariants: Topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

10. Кудрявцева О.С., Солодов А.П. Двусторонние оценки областей однолиственности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 7. 120–144.
11. Солодов А.П. Точная область однолиственности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. 190–218.
12. Горайнов В.В. Голоморфные отображения полосы в себя с ограниченным искажением на бесконечности // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. 101–111.
13. Кудрявцева О.С., Солодов А.П. Асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолиственности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 11. 96–117.

ESTIMATE FOR DOMAIN OF UNIVALENCE ON THE CLASS OF HOLOMORPHIC SELF-MAPS OF A DISC WITH TWO BOUNDARY FIXED POINTS

V. V. Goryainov^a, O. S. Kudryavtseva^{b,c}, and A. P. Solodov^b

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^b *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^c *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*

Holomorphic self-maps of the unit disc with two boundary fixed points, one of which is a Denjoy–Wolff point are investigated. An upper estimate for domain of univalence is obtained for functions in such class, which depends on the value of the angular derivative at the repulsive boundary fixed point.

Keywords: holomorphic map, fixed points, Denjoy–Wolff theorem, angular derivative, domain of univalence

ПОПРАВКИ

УДК 510.635510.665

**ПОПРАВКА К СТАТЬЕ “АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ТЕОРИЙ
БИНАРНОГО ПРЕДИКАТА В ЯЗЫКАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ
ПЕРЕМЕННЫХ”, 2022, том 507, с. 61–65**

© 2023 г. М. Н. Рыбаков^{1,*}

Поступило 13.06.2023 г.

После доработки 13.06.2023 г.

Принято к публикации 13.06.2023 г.

DOI: 10.31857/S2686954323350011, EDN: VEROCA

К статье М.Н. Рыбакова “Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката в языках с малым числом переменных”, опубликованной в 2022, том 507, с. 61–65, (<https://doi.org/10.31857/S2686954322600501>) добавлено следующее изменение: пункт 2 списка литературы фамилия первого автора Ершов Ю.Л.

¹ Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
Москва, Россия

*E-mail: m_rybakov@mail.ru