



# ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 510, 2023

---

---

## МАТЕМАТИКА

Об интерпретациях арифметики Пресбургера в арифметиках Бюхи <i>А. А. Запругаев</i>	3
Элементарные инварианты для кванторной вероятностной логики <i>С. О. Сперанский</i>	8
Нестационарная задача Вентцеля со старшими коэффициентами из класса $VMO_x$ <i>Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, Д. К. Палагачев, Л. Г. Софтова</i>	13
Аналог теоремы переноса Малера для мультипликативных диофантовых приближений <i>О. Н. Герман</i>	18
Уточненная математическая модель экономической динамики в условиях высокой инфляции и нестабильного развития <i>В. А. Садовничий, А. А. Акаев, А. И. Звягинцев, А. И. Сарыгулов</i>	23
Трансцендентность $p$ -адических значений обобщенных гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами <i>В. Г. Чирский</i>	29
Задача протекания одного типа неньютоновской жидкости через границу многосвязной области <i>В. Г. Звягин, В. П. Орлов</i>	33
Об одном условии дискретности спектра и компактности резольвенты несекториального оператора Штурма–Лиувилля на полуоси <i>С. Н. Туманов</i>	39
О точности разрывного метода Галеркина при расчете газодинамических ударных волн <i>М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. В. Остапенко, В. Ф. Тишкин</i>	43
Об одном подходе к оценке вырождения треугольного элемента в триангуляции <i>Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин</i>	52

---

---

# CONTENTS

---

---

Volume 510, 2023

---

---

## MATHEMATICS

On Interpretations of Presburger Arithmetic in Büchi Arithmetics <i>A. A. Zapryagaev</i>	3
Elementary Invariants for Quantified Probability Logic <i>S. O. Speranski</i>	8
Nonstationary Venttsel Problem with $VMO_x$ Leading Coefficients <i>D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, D. K. Palagachev, and L. G. Softova</i>	13
An Analogue of Mahler's Transference Theorem for Multiplicative Diophantine Approximation <i>O. N. German</i>	18
Refined Mathematical Model of Economic Dynamics under High Inflation and Unstable Development <i>V. A. Sadovnichiy, A. A. Akaev, A. I. Zvyagintsev, and A. I. Sarygulov</i>	23
Transcendence of $p$ -adic Values of Generalized Hypergeometric Series with Transcendental Polyadic Parameters <i>V. G. Chirskii</i>	29
The Problem of the Flow of One Type of Non-Newtonian Fluid Through the Boundary of a Multi-Connected Domain <i>V. G. Zvyagin and V. P. Orlov</i>	33
On One Condition for the Discreteness of the Spectrum and the Compactness of the Resolvent of a Nonsectorial Sturm–Liouville Operator on the Semiaxis <i>S. N. Tumanov</i>	39
On the Accuracy of Discontinuous Galerkin Method Calculating Gas-Dynamic Shock Waves <i>M. E. Ladonkina, O. A. Nekliudova, V. V. Ostapenko, and V. F. Tishkin</i>	43
On One Approach to the Assessment of a Triangular Element Degeneration in a Triangulation <i>Yu. A. Kriksin and V. F. Tishkin</i>	52

---

---

УДК 510.652

## ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИЯХ АРИФМЕТИКИ ПРЕСБУРГЕРА В АРИФМЕТИКАХ БЮХИ

© 2023 г. А. А. Запрыгаев<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Поступило 14.11.2022 г.

После доработки 31.01.2023 г.

Принято к публикации 03.02.2023 г.

Арифметики Бюхи  $\mathbf{BA}_n$ ,  $n \geq 2$ , являются расширениями арифметики Пресбургера унарным функциональным символом  $V_n(x)$ , обозначающим наибольшую степень  $n$ , делящую  $x$ . Определимость множества в  $\mathbf{BA}_n$  эквивалентна распознаванию его конечным автоматом, принимающим числа в  $n$ -ичной записи. Мы рассматриваем интерпретации арифметики Пресбургера в стандартной модели  $\mathbf{BA}_n$  и показываем, что для всякой такой интерпретации внутренняя модель изоморфна стандартной. Это дает ответ на вопрос А. Виссера, касающийся интерпретаций некоторых слабых арифметических теорий в себя.

*Ключевые слова:* формальные арифметики, интерпретации, автоматные структуры, автоматные абелевы группы

**DOI:** 10.31857/S2686954322600641, **EDN:** XHJOFS

### 1. ВВЕДЕНИЕ

*Арифметической теорией* называется первопрядковая теория, моделью которой служат натуральные числа  $\mathbb{N}$  с некоторыми операциями над ними.

Согласно первой теореме Гёделя о неполноте, арифметика Пеано  $\mathbf{PA}$ , язык которой содержит как сложение, так и умножение, является неполной и неразрешимой теорией. В связи с этим представляет интерес изучение арифметических теорий с менее выразительным языком, для которых устанавливаются полнота и разрешимость. Такие теории называют *слабыми арифметиками*. В частности, в литературе рассматриваются *арифметика Пресбургера*  $\mathbf{PrA} = \mathbf{Th}(\mathbb{N}; =, +)$  [6] и *арифметика Сколема*  $\mathbf{Th}(\mathbb{N}; =, \cdot)$ .

Арифметики Бюхи являются важным классом расширений арифметики Пресбургера, поскольку сохраняют свойство разрешимости и находят применение в описании множеств, принимаемых конечными автоматами.

**Определение 1.** Арифметикой Бюхи  $\mathbf{BA}_n$ ,  $n \geq 2$ , называется элементарная теория  $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_n)$ , где  $V_n$  – унарный функциональный символ такой,

что  $V_n(x)$  – наибольшая степень  $n$ , делящая  $x$ . Для определенности полагаем  $V_n(0) = 0$ .

Серия теорий  $\mathbf{BA}_n$  была предложена Ю. Бюхи [1] в качестве инструмента для описания распознаваемости подмножеств  $\mathbb{N}$  в конечных автоматах на арифметическом языке. Эта связь явно устанавливается посредством следующего классического результата В. Брюйер [2, 3]:

**Теорема 1.1.** Пусть  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  – формула в языке  $\mathbf{BA}_n$ . Тогда существует и эффективно строится автомат  $\mathcal{A}$  такой, что  $(a_1, \dots, a_m)$  принимается  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbb{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$ .

Наоборот, пусть  $\mathcal{A}$  – конечный автомат, обрабатывающий  $m$ -кортежи  $n$ -ичных натуральных чисел. Тогда существует и эффективно строится формула  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  в языке  $\mathbf{BA}_n$  такая, что  $\mathbb{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$  тогда и только тогда, когда  $(a_1, \dots, a_m)$  принимается  $\mathcal{A}$ .

Здесь подразумевается, что автомат  $\mathcal{A}$  получает на вход  $m$ -кортежи натуральных чисел в виде последовательных  $m$ -кортежей последних, затем предпоследних и т.д. цифр их  $n$ -ичной записи. Теорема Кобхэма-Семёнова [4, 5] утверждает, что для мультипликативно независимых натуральных чисел  $n, m$  (пара чисел  $n, m$  называется мультипликативно независимой, если уравнение  $n^k = m^l$  не имеет решений в целых числах, кроме  $k = l = 0$ ), всякое множество, определяемое в  $\mathbf{BA}_n$  и  $\mathbf{BA}_m$ , на

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

\*E-mail: azapryagaev@hse.ru

самом деле определимо в арифметике Пресбургера  $\mathbf{PrA}$ .

Мы рассматриваем интерпретации  $\mathbf{BA}_n$  в себя. А. Виссер поставил следующий вопрос: *если дана слабая арифметическая теория  $T$ , верно ли, что всякая интерпретация (одномерная или многомерная)  $T$  в себя изоморфна тождественной, и если так, то всегда ли возникающий изоморфизм выражим формулой  $T$ ?* Этот вопрос был положительно разрешен в случае арифметики Пресбургера  $\mathbf{PrA}$  в работе автора с Ф. Пахомовым [7]. Поскольку арифметики Бюхи являются консервативными расширениями  $\mathbf{PrA}$  с добавлением нового функционального символа, они являются естественным классом теорий для дальнейшего рассмотрения.

В настоящей работе мы доказываем, что даже для всякой интерпретации  $\mathbf{PrA}$  в  $\mathbf{BA}_n$  внутренняя модель изоморфна стандартной, что дает частичный положительный ответ на вопрос Виссера. Остается открытым вопросом, обязательно ли этот изоморфизм является  $\mathbf{BA}_n$ -определимым.

Можно показать, что для всякой  $m$ -мерной интерпретации  $\iota$  некоторой структуры  $A$  в  $\mathbf{BA}_n$ , существует одномерная интерпретация  $\iota'$ , изоморфная  $\iota$ , но не обязательно определимо. Тем самым, в многомерном случае вопрос наличия изоморфизма (но не его  $\mathbf{BA}_n$ -определимости) также разрешен положительно.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Мы рассматриваем одномерные непараметрические интерпретации арифметик Бюхи согласно [8, с. 20–21]. Интерпретацией  $\iota$  языка первого порядка  $\mathcal{H}$  в структуре  $\mathfrak{B}$  языка  $\mathcal{L}$  называют следующую совокупность формул в языке  $\mathcal{L}$ :

1.  $D_\iota(y)$ , задающая множество  $\mathbf{D}_\iota \subseteq \mathfrak{B}$  (область определения);
2.  $P_\iota(x_1, \dots, x_n)$  для всякого предикатного символа  $P(x_1, \dots, x_n)$  из  $\mathcal{H}$ ;
3.  $f_\iota(x_1, \dots, x_n, y)$  для всякого функционального символа  $f(x_1, \dots, x_n)$  из  $\mathcal{H}$ .

Здесь от всех  $f_\iota$  требуется, чтобы они задавали график некоторой функции (по модулю интерпретации предиката равенства).

Естественным образом  $\iota$  и  $\mathfrak{B}$  задают модель  $\mathfrak{A}$  языка  $\mathcal{H}$  с носителем  $\mathbf{D}_\iota / \sim_\iota$ , где отношение эквивалентности  $\sim_\iota$  задается  $=_\iota(x_1, x_2)$ .  $\mathfrak{A}$  называют *внутренней моделью*  $\mathcal{H}$ .

Если к тому же  $\mathfrak{A} \models \mathbf{T}$ , то  $\iota$  называют *интерпретацией теории  $\mathbf{T}$  в  $\mathfrak{B}$* . Если для теории первого порядка  $\mathbf{U}$  интерпретация  $\iota$  является интерпретацией  $\mathbf{T}$  вне зависимости от выбора  $\mathfrak{B} \models \mathbf{U}$ , то  $\iota$  называют интерпретацией теории  $\mathbf{T}$  в  $\mathbf{U}$ .

Мы будем рассматривать интерпретации  $\mathbf{BA}_n$  в себя. Поскольку  $\mathbf{BA}_n$  является элементарной теорией  $(\mathbb{N}; =, +, V_n)$ , это эквивалентно рассмотрению интерпретаций в стандартной модели  $\mathbf{BA}_n$ , т.е.  $\mathbb{N}$ . Наша задача состоит в установлении, для всякой ли интерпретации  $\iota$  теории  $\mathbf{BA}_n$  получающаяся внутренняя модель изоморфна стандартной. Тем самым требуется определить, интерпретируема ли какая-либо нестандартная модель  $\mathbf{BA}_n$  в арифметике Бюхи. Порядковые типы нестандартных моделей  $\mathbf{BA}_n$  описывает следующий стандартный результат.

**Теорема 2.1.** *Всякая нестандартная модель  $\mathfrak{A} \models \mathbf{BA}_n$  имеет порядковый тип  $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot A$ , где  $\langle A, <_A \rangle$  – некоторый плотный линейный порядок без первой и последней точек. В частности, всякая счетная нестандартная модель  $\mathbf{BA}_n$  имеет порядковый тип  $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$ .*

Забывая о  $V_n(x)$ , становится возможным рассматривать интерпретацию нестандартной модели  $\mathbf{BA}_n$  в арифметике Бюхи как интерпретацию одного сложения (т.е., интерпретацию арифметики Пресбургера  $\mathbf{PrA}$ ). Согласно теореме 1.1, всякая интерпретация произвольной структуры  $A$  в  $\mathbf{BA}_n$  является ее автоматным представлением; в частности, интерпретация  $(\mathbb{N}; =, +)$  индуцирует автоматный моноид в качестве своей внутренней модели.

Следующее необходимое условие для автоматных групп установили Браун и Штрюнгманн [9, теорема 10].

**Теорема 2.2.** *Пусть  $(A, +)$  – автоматная абелева группа без кручения. Тогда в  $A$  существует подгруппа  $B$ , изоморфная  $\mathbb{Z}^m$  для некоторого  $m$  такая, что факторгруппа  $C = A/B$  является прямой суммой конечного числа групп вида  $\mathbb{Z}(p^\infty)$ . В частности, порядки элементов  $C$  могут делиться лишь на конечный список различных простых  $p_1, \dots, p_s$ .*

Понятно, что внутренняя модель, индуцируемая интерпретацией  $\mathbf{PrA}$ , является не абелевой группой, а лишь моноидом, поскольку ни один из элементов, кроме нуля, не наделен аддитивным обратным. Однако это легко исправить, введя отрицательные числа отдельно и определив покомпонентное сложение. Тем самым, всякая интерпретация  $\mathbf{PrA}$  в  $\mathbf{BA}_n$  на самом деле порождает интерпретацию соответствующей абелевой группы.

**Лемма 2.1.** Пусть  $\text{PrA}$  интерпретируется в  $\mathbf{BA}_n$  посредством интерпретации  $\iota$ . Тогда она продолжается до интерпретации упорядоченной абелевой группы таким образом, что интерпретация  $\text{PrA}$  соответствует неотрицательным целым числам.

### 3. ТЕОРЕМА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

**Лемма 3.1.** Пусть  $\iota$  — интерпретация  $\text{PrA}$  в стандартной модели  $\mathbb{N}$  арифметики Бюхи  $\mathbf{BA}_n$ . Тогда внутренняя модель  $\mathcal{A}$ , индуцированная  $\iota$ , изоморфна тождественной.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть  $\iota$  — такая интерпретация  $\text{PrA}$ , что внутренняя модель нестандартна. Поскольку  $\mathbb{N}$  счетна, по теореме 2.1 получаем, что порядковый тип внутренней модели равен  $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$ .

Применяя лемму 2.1, можем перейти к интерпретации  $\iota'$  упорядоченной абелевой группы  $\mathcal{B}$ , порядковый тип которой изоморфен  $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$ .

Поскольку порядковый тип упорядоченной абелевой группы  $\mathcal{B}$  равен  $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$ , можно рассматривать галактики, т.е. множества вида  $[c] := \{d \in \mathcal{B} \mid |c - d| \text{ — стандартное натуральное число}\}$ . В частности, стандартные целые числа являются одной из галактик, а именно содержащей нуль (нейтральный элемент  $\mathcal{B}$ ). Стандартным образом, по аналогии с доказательством теоремы 2.1, устанавливается следующая

**Лемма 3.1.** Сложение на галактиках  $[c + d] := [c] + [d]$ , а также порядок  $[c] < [d] \stackrel{\text{def}}{=} c < d \wedge [c] \neq [d]$ , корректно определены.

Иными словами, на множестве  $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ , где  $\mathbb{Z}$  — стандартные целые числа, индуцируется структура группы, упорядоченной в соответствии с индуцированным порядком. Более того, выполнена следующая лемма:

**Лемма 3.2.**  $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$  содержит подгруппу  $\mathcal{Q}$ , изоморфную  $(\mathbb{Q}, +)$ .

*Доказательство.* Зафиксируем произвольную положительную нестандартную галактику  $[c]$ . Мы определим изоморфизм  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{B}/\mathbb{Z}$  следующим образом. Для всякого  $n \in \mathbb{Z}$  положим  $\varphi(n) := [nc]$ . Согласно лемме 3.1, это корректно определенное вложение  $\mathbb{Z}$  в  $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ .

Пусть теперь  $k/l$  — рациональное число. Зададим  $\varphi(k/l)$  как такую галактику  $[x]$ , что  $l \cdot x = kc + t$  для некоторого стандартного  $t$ . Поскольку в арифметике Пресбургера ровно одно из чисел  $kc, kc + 1,$

$\dots, kc + l - 1$  всегда делится  $l$ , такие  $t$  и  $x$  всегда возможно подобрать. Теперь покажем, что определение  $\varphi(k/l)$  корректно.

Класс  $[x]$  не зависит от выбора  $t$ . В самом деле, пусть  $t$  и  $t'$  — разные стандартные числа, и  $lx = kc + t, lx' = kc + t'$ . Тогда  $l(x - x') = (t - t')$  — стандартное число. Поэтому  $x - x'$  стандартно, откуда  $[x] = [x']$ .

Класс  $[x] = \varphi(k/l)$  не зависит от представления  $k/l$ . Пусть  $k_1/l_1 = k_2/l_2$ , т.е.,  $l_2k_1 = l_1k_2$ , и  $\varphi(k_i/l_i) = [x_i], i = 1, 2$ . Это означает, что  $l_i \cdot x_i = k_i c + t_i$ . Поэтому

$$l_1 l_2 (x_1 - x_2) = (l_2 k_1 - l_1 k_2) c + (l_2 t_1 - l_1 t_2) = l_2 t_1 - l_1 t_2.$$

Поскольку  $l_2 t_1 - l_1 t_2$  стандартно,  $x_1 - x_2$  тоже стандартно, и  $[x_1] = [x_2]$ .

Сложение согласовано со сложением на  $\mathbb{Q}$ . Пусть  $k_1/l_1, k_2/l_2 \in \mathbb{Q}$ , и  $\varphi(k_i/l_i) = [x_i], i = 1, 2$ . В  $\mathbb{Q}$  мы имеем  $k_1/l_1 + k_2/l_2 = (k_1 l_2 + k_2 l_1)/l_1 l_2$ . Пусть  $y$  — такой элемент  $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ , что для некоторого  $t$  выполнено  $l_1 l_2 y = k_1 l_2 c + k_2 l_1 c + t$ . Требуется показать, что  $[x_1] + [x_2] = [y]$ . Запишем  $l_i \cdot x_i = k_i c + t_i$ . Умножая равенства на  $l_2$  и  $l_1$  соответственно и складывая, получаем

$$l_1 l_2 (x_1 + x_2) = k_1 l_2 c + k_2 l_1 c + (l_1 t_2 + l_2 t_1).$$

Следовательно,  $y - (x_1 + x_2) = t - (l_1 t_2 + l_2 t_1)$ , что является стандартным числом  $\varphi$  инъективно. Пусть  $k_1/l_1 \neq k_2/l_2, \varphi(k_i/l_i) = [x_i], i = 1, 2$ . Нужно показать, что  $[x_1] \neq [x_2]$ . Предположим, что  $[x_1] = [x_2]$ . Тогда  $x_1 - x_2$  стандартно. Но в таком случае  $[0] = [x_1 - x_2] = \varphi(k_1/l_1 - k_2/l_2)$ , где  $k_1/l_1 - k_2/l_2$  — ненулевое рациональное число. По определению это означает, что  $0 = (k_1 l_2 - l_1 k_2) c + t$  для некоторого  $t$ . Но  $t$  — стандартно, а  $(k_1 l_2 - l_1 k_2) c$  — нет, поэтому указанное равенство невозможно. Доказательство леммы завершено.

Вернемся к доказательству Теоремы 3.1 и покажем, что  $\mathcal{B}$  не может быть автоматной. Предположим противное: пусть  $\mathcal{B}$  автоматна. Тогда она удовлетворяет условиям Теоремы 2.2. Таким образом, в  $\mathcal{B}$  существует подгруппа  $\mathcal{E}$ , изоморфная  $\mathbb{Z}^m$ , такая, что  $\mathcal{F} = \mathcal{B}/\mathcal{E}$  — группа кручения, и порядки всех ее элементов делятся только на простые из списка  $p_1, \dots, p_s$ . Мы покажем, что это противоречит лемме 3.2 о существовании подгруппы  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{B}/\mathbb{Z}$ , изоморфной  $\mathbb{Q}$ . Далее под  $\mathbb{Z}$  понимается конкретная подгруппа стандартных целых чисел в  $\mathcal{B}$ .

Пусть  $\mathcal{G} = \langle \mathbb{Z}, \mathcal{E} \rangle$  – подгруппа  $\mathcal{B}$ , порожденная  $\mathbb{Z}$  и  $\mathcal{E}$ , и  $\pi: \mathcal{B}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{G}$  – естественный сюръективный гомоморфизм, переводящий всякий из классов эквивалентности в содержащий его класс из  $\mathcal{B}/\mathcal{G}$ . Рассмотрев цепочку сюръективных гомоморфизмов  $\mathcal{B} \xrightarrow{\rho} \mathcal{B}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}/\mathcal{G}$ , мы видим, что  $\mathcal{G} = \text{Ker}(\pi \circ \rho) = \rho^{-1}(\text{Ker}(\pi))$ , откуда  $\text{Ker}(\pi) = \mathcal{G}/\mathbb{Z}$ .

Теперь установим образ  $Q$  под действием  $\pi$ . В общем случае, если имеется сюръективный гомоморфизм между группами  $\sigma: A \rightarrow B$  и  $S$  – подгруппа  $A$ , то выполнено  $\sigma(S) \cong S/(S \cap \text{Ker}(\sigma))$ . В самом деле, два элемента  $a, b \in S$  попадают в один и тот же класс  $S/(S \cap \text{Ker}(\sigma))$  тогда и только тогда, когда  $(a - b) \in \text{Ker}(\sigma)$ , что эквивалентно  $\sigma(a) = \sigma(b)$ . В нашем случае, находим, что  $\pi(Q) \cong Q/(Q \cap \text{Ker}(\pi)) = Q/(Q \cap \mathcal{G}/\mathbb{Z})$ .

Группа  $\mathcal{G}/\mathbb{Z}$  конечно порождена как факторгруппа конечно порожденной. Она не обязательно свободна, но, согласно теореме о классификации конечно порожденных абелевых групп, может быть представлена в виде прямой суммы  $\mathbb{Z}^r$  для некоторого  $r$  и компонента кручения  $T = \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_r}$ . Поскольку  $Q \cap T = \{0\}$ , имеем  $Q/(Q \cap \mathcal{G}/\mathbb{Z}) \cong Q/\mathbb{Z}^r$ . Следующая лемма показывает, что  $Q/\mathbb{Z}^r$  изоморфно  $Q/h\mathbb{Z}$  для некоторого рационального  $h$ :

**Лемма 3.3.** Множество, порожденное в  $(\mathbb{Q}, +)$  набором элементов

$$\{(k_1/l_1, \dots, k_r/l_r) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\},$$

изоморфно  $\mathbb{Z}$  и может быть порождено единственным  $d/(l_1 \dots l_r)$ , где  $d := \text{НОД}(k_1 l_2 l_3 \dots l_r, l_1 k_2 l_3 \dots l_r, \dots, l_1 l_2 \dots k_r)$ .

*Доказательство.* Приведем дроби к общему знаменателю:

$$k_i/l_i = (l_1 \dots k_i \dots l_r)/(l_1 \dots l_r).$$

Для  $d$  из формулировки леммы согласно алгоритму Евклида существует представление в виде линейной комбинации  $a_1 \cdot k_1 l_2 l_3 \dots l_r + a_2 \cdot l_1 k_2 l_3 \dots l_r + \dots + a_r \cdot l_1 l_2 \dots k_r = d$ , причем любая линейная комбинация с другими коэффициентами равна кратному  $d$ . Поэтому  $a_1 \cdot k_1/l_1 + \dots + a_r \cdot k_r/l_r = d/(l_1 \dots l_r)$ , и всякая прочая линейная комбинация равна кратному  $d/(l_1 \dots l_r)$ .

Итак,  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}^r = \mathbb{Q}/h\mathbb{Z}$ , где  $h := d/(l_1 \dots l_r)$  найдено в доказательстве Леммы 3.3. Пусть  $q$  – простое, отсутствующее в списке  $p_1, \dots, p_s$ . Тогда элемент  $[h/q] \in \mathbb{Q}/(Q \cap \mathcal{G}/\mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{B}/\mathcal{G}$  имеет в точности порядок  $q$ . Однако, поскольку  $\mathcal{F} = \mathcal{B}/\mathcal{E}$  является группой кручения с ограничением на порядки элементов, это же выполнено и для  $\mathcal{B}/\mathcal{G}$ , где отождествлено больше элементов. Следова-

но, мы указали элемент  $\mathcal{B}/\mathcal{G}$  с порядком, разложение которого не ограничено  $p_1, \dots, p_s$ . Противоречие с Теоремой 2.2.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен Л.Д. Беклемишеву за предложение темы для исследования и многочисленные полезные обсуждения.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Büchi J.R. Weak second-order arithmetic and finite automata // *Mathematical Logic Quarterly*. 1960. V. 6. № 1–6. P. 66–92. <https://doi.org/10.1002/malq.19600060105>
2. Bruyère V. Entiers et automates finis // *Mémoire de fin d'études*, Université de Mons (1985).
3. Bruyère V. et al. Logic and p-recognizable sets of integers // *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*. 1994. V. 1. № 2. P. 191–238. <https://doi.org/10.36045/bbms/1103408547>
4. Cobham A. On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata // *Mathematical systems theory*. 1969. V. 3. № 2. P. 186–192. <https://doi.org/10.1007/BF01746527>
5. Семёнов А.Л. Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления // *Сибирский математический журнал*. 1977. Т. 18. № 2. С. 403–418. <https://doi.org/10.1007/BF00967164>
6. Presburger M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // *Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves* 92–101, 1929.
7. Pakhomov F., Zapryagaev A. Multi-dimensional interpretations of Presburger arithmetic in itself // *Journal of Logic and Computation*. 2020. V. 30. № 8. P. 1681–1693. <https://doi.org/10.1093/logcom/exaa050>
8. Tarski A., Mostowski A., Robinson R.M. Undecidable theories. North-Holland, 1953. 98 p.
9. Braun G., Strüningmann L. Breaking up finite automata presentable torsion-free abelian groups // *International Journal of Algebra and Computation*. 2011. V. 21. № 08. P. 1463–1472. <https://doi.org/10.1142/S0218196711006625>

# ON INTERPRETATIONS OF PRESBURGER ARITHMETIC IN BÜCHI ARITHMETICS

A. A. Zapryagaev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

Büchi arithmetics  $\mathbf{BA}_n$ ,  $n \geq 2$ , are extensions of Presburger arithmetic with an unary functional symbol  $V_n(x)$  denoting the largest power of  $n$  that divides  $x$ . Definability of a set in  $\mathbf{BA}_n$  is equivalent to its recognizability by a finite automaton receiving numbers in their  $n$ -ary expansion. We consider the interpretations of Presburger Arithmetic in the standard model of  $\mathbf{BA}_n$  and show that each such interpretation has an internal model isomorphic to the standard one. This answers a question by A. Visser on the interpretations of certain weak arithmetical theories in themselves.

*Keywords:* formal arithmetics, interpretations, automatic structures, automatic abelian groups

УДК 510.647+510.5

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ КВАНТОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЛОГИКИ

© 2023 г. С. О. Сперанский<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Поступило 20.01.2023 г.

После доработки 01.02.2023 г.

Принято к публикации 02.03.2023 г.

Пусть QPL – предложенный в [8] двусортный вероятностный язык, который расширяет хорошо известный “полиномиальный” язык, описанный в [3, раздел 6], посредством добавления кванторов по событиям. Мы показываем, что все безатомные пространства имеют одну и ту же QPL-теорию и эта теория разрешима. Также мы вводим понятие элементарного инварианта для QPL и используем его для получения точных верхних оценок на сложность некоторых интересных вероятностных теорий.

*Ключевые слова:* вероятностная логика, квантификация по событиям, элементарные инварианты, сложность

**DOI:** 10.31857/S2686954323600040, **EDN:** XHTJMV

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Нас будет интересовать двусортный вероятностный язык QPL, предложенный в [8]. Можно думать о QPL как о естественной комбинации элементарного языка булевых алгебр и языка упорядоченных полей. Его фрагмент, содержащий только кванторы по вещественным числам (но не по событиям), является вариантом хорошо известного “полиномиального” языка, описанного в [3, раздел 6].

Несколько важных сложностных результатов о QPL было получено в [8]. Мы знаем, что если  $\mathcal{K}$  – класс вероятностных пространств, который содержит все бесконечные дискретные пространства, то его QPL-теория имеет как минимум ту же сложность, что и полная арифметика второго порядка. QPL-теория конечных вероятностных пространств намного проще, но по-прежнему неразрешима; точнее, она имеет ту же сложность, что и дополнение проблемы остановки. Кроме того, эти результаты остаются справедливыми, если мы исключим кванторы по вещественным числам. С другой стороны, для каждого положительного целого числа  $n$  QPL-теория пространств с ровно  $n$  элементами является разрешимой. Можно задаться вопросом, существуют ли какие-нибудь другие естественные примеры разрешимых

вероятностных теорий. Мы отвечаем на этот вопрос утвердительно, показывая, что все безатомные пространства имеют одну и ту же QPL-теорию и эта теория разрешима.

Другая интересная проблема, возникающая в кванторной вероятностной логике, касается верхних оценок сложности. А именно, вероятностные пространства не могут быть непосредственно закодированы в языке арифметики высших порядков, что затрудняет получение верхних оценок сложности для многих вероятностных теорий. Чтобы преодолеть эту трудность, мы разрабатываем теорию элементарных инвариантов для QPL. В отличие от вероятностных пространств, их инварианты могут быть легко закодированы как множества натуральных чисел, что позволяет нам доказать, что для любого “аналитического” класса вероятностных пространств его QPL-теория имеет как максимум ту же сложность, что и полная арифметика второго порядка. Это решает одну из главных проблем, заявленных в [8].

Настоящую работу можно рассматривать как исследование по элементарным теориям классов вероятностных пространств; ср. [2] и [7].

### 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Поскольку многие сложностные результаты о кванторной вероятностной логике формулируются, используя арифметику второго порядка,

<sup>1</sup> Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: katze.tail@gmail.com

мы начнем с описания языка последней и лишь затем перейдем к определению QPL.

2.1. Арифметика второго порядка

Напомним, что в арифметике второго порядка имеются: (i) индивидуальные переменные  $x, y, z, \dots$ , которые предназначены пробегать  $\mathbb{N}$ ; (ii) для каждого положительного целого числа  $k$  переменные по множествам  $X^k, Y^k, Z^k, \dots$  типа  $k$ , которые предназначены пробегать подмножества  $\mathbb{N}^k$ . Обозначим через  $\mathfrak{A}$  стандартную модель арифметики и через  $\sigma$  – ее сигнатуру. Для удобства мы будем считать, что  $\sigma$  содержит символ для любой вычислимой функции или отношения.  $\sigma$ -Формулы второго порядка строятся из первопорядковых атомарных  $\sigma$ -формул и выражений вида

$$(t_1, \dots, t_k) \in X^k,$$

где  $k$  – положительное целое число,  $X^k$  – переменная по множествам типа  $k$  и  $t_1, \dots, t_k$  –  $\sigma$ -термы, обычным образом. В дальнейшем под  $\sigma$ -формулой мы будем понимать  $\sigma$ -формулу второго порядка.

Пусть  $n$  – положительное целое число. Напомним, что  $\sigma$ -формула лежит в  $\Pi_n^1$ , если она имеет вид

$$\underbrace{\forall \bar{X}_1 \exists \bar{X}_2 \dots \bar{X}_n}_{n-1 \text{ переменная кванторов}} \Psi,$$

где  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$  суть кортежи переменных по множествам и  $\Psi$  не содержит кванторов по множествам. Подмножество  $\mathbb{N}$  называется: (а)  $\Pi_n^1$ -ограниченным, если оно определимо в  $\mathfrak{A}$  посредством  $\Pi_n^1$ - $\sigma$ -формулы; (б)  $\Pi_n^1$ -трудным, если к нему  $m$ -сводимо любое  $\Pi_n^1$ -ограниченное подмножество  $\mathbb{N}$ ; (с)  $\Pi_n^1$ -полным, если оно одновременно  $\Pi_n^1$ -ограничено и  $\Pi_n^1$ -трудно. Традиционно  $\Pi_n^1$ -ограниченные множества называются  $\Pi_n^1$ -множествами. Хорошо известно, что  $\Pi_n^1$ -полные множества существуют. В частности, совокупность всех  $\Pi_n^1$ - $\sigma$ -предложений, истинных в  $\mathfrak{A}$ , оказывается  $\Pi_n^1$ -полной. Аналогично для подмножеств  $\mathbb{N}^2, \mathbb{N}^3$  и т.д.

**Теорема 2.1** (см. [9]). Пусть  $\sigma_+$  обозначает  $\langle +; = \rangle$ . Тогда любое  $\Pi_n^1$ -подмножество  $\mathbb{N}^k$  может быть определено в  $\mathfrak{A}$  посредством  $\sigma_+$ -формулы вида

$$\underbrace{\forall X_1^1 \exists X_2^1 \dots X_n^1}_{n-1 \text{ переменная кванторов}} \Psi, \tag{*}$$

где  $X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1$  суть переменные по множествам типа 1 и  $\Psi$  не содержит переменных по множествам.

Давайте называть  $\Pi_n^1$ - $\sigma_+$ -формулу специальной, если она имеет вид (\*).

**Следствие 2.2** (см. [9]). Совокупность всех специальных  $\Pi_n^1$ - $\sigma_+$ -предложений, истинных в  $\mathfrak{A}$ , является  $\Pi_n^1$ -полной.

Главный (и единственный) результат в [5] тривиальным образом следует из следствия выше. В [1] и [10] он был использован для получения некоторых интересных результатов о нижних оценках сложности для языков, предложенных в [4] и [11] соответственно.

2.2. Кванторная вероятностная логика

Под вероятностным пространством мы понимаем пару  $\langle \mathcal{A}, P \rangle$ , где  $\mathcal{A}$  – булева алгебра, в которой у всякого счетного множества элементов есть супремум (а потому и инфимум), и  $P$  – вероятностная мера на  $\mathcal{A}$ , т.е. функция из  $\mathcal{A}$  в  $[0, 1]$  такая, что для любого счетного множества  $S$  попарно непересекающихся элементов  $\mathcal{A}$ ,

$$P(\bigvee S) = \sum_{E \in S} P(E),$$

и к тому же  $P(\top) = 1$ , где  $\top$  обозначает наибольший элемент  $\mathcal{A}$ .

Поскольку само наше определение вероятностной меры подразумевает два различных рода объектов, нам нужны два сорта переменных: (а) булевы переменные  $X, Y, Z, \dots$ , которые предназначены бегать по событиям; (б) переменные по полю  $x, y, z, \dots$ , которые предназначены бегать по вещественным числам. Это, в свою очередь, приводит к рассмотрению двух множеств символов:

$$\{\perp, \top, \wedge, \vee, \neg\} \quad \text{и} \quad \{0, 1, +, \cdot, -, \leq\},$$

а именно функциональных символов языка булевых алгебр и символов языка упорядоченных полей (где  $-$  соответствует одноместной операции). Для обозначения данной меры будет использоваться специальный символ  $\mu$ .

Булевы термы строятся из  $\perp, \top$  и булевых переменных с использованием  $\wedge, \vee$  и  $\neg$  следующим образом: если  $T_1$  и  $T_2$  – булевы термы, то таковы и  $(T_1 \wedge T_2), (T_1 \vee T_2)$  и  $\neg T_1$ . Они представляют булевы комбинации событий. Под атомарной QPL-формулой мы понимаем выражение вида

$$f(\bar{x}, \mu(T_1), \dots, \mu(T_m)) \leq g(\bar{y}, \mu(T_{m+1}), \dots, \mu(T_{m+n})),$$

где  $f$  и  $g$  суть полиномы с целыми коэффициентами,  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  – кортежи переменных по полю и  $T_1, \dots, T_{m+n}$  – булевы термы.

Мы будем использовать  $\wedge$ ,  $\vee$  и  $\neg$  для обозначения не только булевых операций, но также и обычных логических связок. Поскольку их булевы версии не будут встречаться вне области действия  $\mu$ , интерпретации  $\wedge$ ,  $\vee$  and  $\neg$  будут всегда ясны из контекста. В качестве наших кванторных символов возьмем  $\forall$  и  $\exists$ . Тогда QPL-формулы строятся из атомарных QPL-формул с использованием символов логических связок и кванторов — связывающих булевы переменные или переменные по полю — обычным образом. Мы сокращаем  $\neg\Phi \vee \Psi$  как  $\Phi \rightarrow \Psi$  и  $(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$  — как  $\Phi \leftrightarrow \Psi$ . Кроме того,  $=$  и  $<$  трактуются как определенные в терминах  $\leq$ .

Отношение выполнимости  $\Vdash$  для QPL может быть определено очевидным образом, и оно ведет себя так, как можно ожидать. Например, рассмотрим

$$\Theta := \forall x(0 \leq x \leq 1 \rightarrow \exists Y \mu(Y) = x).$$

Пусть  $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle$  — вероятностное пространство. Тогда  $\mathcal{P} \Vdash \Theta$ , если и только если для каждого  $r \in [0, 1]$  существует  $E \in \mathcal{A}$  такое, что  $\mathcal{P}(E) = r$ .

**Замечание 2.3.** Фрагмент QPL, содержащий только кванторы по вещественным числам (но не по событиям), можно воспринимать как “полиномиальную” логику, описанную ранее в [3], разделе 6. В этой логике булевы переменные трактуются как константные символы и называются “пропозициональными переменными”; поэтому булевы термы становятся “пропозициональными формулами”.

Пусть  $\mathcal{K}$  — класс вероятностных пространств. Под QPL-теорией  $\mathcal{K}$ , обозначаемой  $\text{Th}(\mathcal{K})$ , мы понимаем совокупность всех QPL-предложений, истинных в любом пространстве из  $\mathcal{K}$ . Мы используем  $\text{Th}^\circ(\mathcal{K})$  для обозначения множества предложений из  $\text{Th}(\mathcal{K})$ , которые не содержат кванторов по вещественным числам. Мы будем часто писать  $\text{Th}(\mathcal{P})$  и  $\text{Th}^\circ(\mathcal{P})$  вместо  $\text{Th}(\{\mathcal{P}\})$  и  $\text{Th}^\circ(\{\mathcal{P}\})$  соответственно. Два пространства  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  называются элементарно эквивалентными, если их QPL-теории совпадают, т.е.  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  не различимы посредством QPL-предложений.

Используя следствие 2.2, можно получить следующее.

**Теорема 2.4** (см. [8]). Пусть  $\mathcal{K}$  — класс вероятностных пространств, который содержит все бесконечные дискретные пространства. Тогда теория второго порядка  $\mathfrak{L}$   $t$ -сводима к  $\text{Th}^\circ(\mathcal{K})$ .

### 3. ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

Пусть  $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle$  — вероятностное пространство. Рассмотрим формулу

$$X \approx Y := \mu((X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X)) = 0.$$

Она определяет весьма естественное отношение эквивалентности на  $\mathcal{A}$ , а именно

$$\mathcal{E} := \{(E_1, E_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid \mathcal{P} \Vdash E_1 \approx E_2\}.$$

Для каждого  $E \in \mathcal{A}$  обозначим через  $[E]_{\approx}$  класс эквивалентности  $E$  по  $\mathcal{E}$ . Теперь возьмем  $\mathcal{A}_{\approx}$  равным совокупности всех таких классов эквивалентности и определим функцию  $\mathcal{P}_{\approx}$  из  $\mathcal{A}_{\approx}$  в  $[0, 1]$  посредством

$$\mathcal{P}_{\approx}([E]_{\approx}) := \mathcal{P}(E).$$

Нетрудно проверить, что  $\mathcal{P}_{\approx} = \langle \mathcal{A}_{\approx}, \mathcal{P}_{\approx} \rangle$  является вероятностным пространством, которое называется фактор-пространством  $\mathcal{P}$  по модулю  $\mathcal{E}$ . Более того, QPL-теории  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_{\approx}$  совпадают.

**Замечание 3.1.** Что касается языков из [4], мы не можем безопасно переходить от структур к их фактор-структурам по модулю событий меры ноль, поскольку теория данной структуры может отличаться от теории ее фактор-структуры (см. дискуссию в [8]).

Напомним, что  $E \in \mathcal{A}$  является атомом  $\mathcal{A}$ , если  $E \neq \perp$  (где  $\perp$  обозначает наименьший элемент  $\mathcal{A}$ ) и для каждого  $F \in \mathcal{A}$  мы имеем  $E \wedge F = \perp$  или  $E \wedge F = E$ . Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \text{At}(X) &:= \mu(X) \neq 0 \wedge \\ \forall Y(\mu(X \wedge Y) = 0 \vee X \wedge Y \approx X). \end{aligned}$$

Очевидно,  $\mathcal{P} \Vdash \text{At}(E)$  тогда и только тогда, когда  $[E]_{\approx}$  является атомом  $\mathcal{A}_{\approx}$ . Мы называем  $\mathcal{P}$  безатомным, если  $\mathcal{P} \Vdash \neg \exists X \text{At}(X)$ . Например, пространство Лебега на  $[0, 1]$  является безатомным. Разумеется, существуют альтернативные определения безатомности, но приведенное выше — в духе булевых алгебр; ср. [6].

**Теорема 3.2.** Любые два безатомных вероятностных пространства элементарно эквивалентны. Кроме того, QPL-теория безатомных вероятностных пространств разрешима.

Это наводит на мысль, что хорошая “элементарная” классификация вероятностных пространств должна основываться на понятии атома (ср. [6]). Вместе с тем теорема выше обобщает результат Тарского о том, что первопорядковая теория упорядоченного поля вещественных чисел является разрешимой; см. [12].

### 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Пусть  $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle$  — вероятностное пространство. Возьмем  $\mathcal{D}$  равным совокупности всех атомов  $\mathcal{A}_{\approx}$ . Под элементарным инвариантом  $\mathcal{P}$  мы

понимаем функцию  $\#_{\mathcal{P}}$  из  $(0, +\infty)$  в  $\mathbb{N}$ , заданную посредством

$$\#_{\mathcal{P}}(r) := \text{число элементов в } \{D \in \mathcal{D} \mid P_{\equiv}(D) = r\}.$$

Значит, в частности,  $\mathcal{P}$  является безатомным, если и только если  $\#_{\mathcal{P}}$  – функция, тождественно равная нулю.

Поскольку дискретные пространства состоят из атомов, их элементарные инварианты могут рассматривать как их абстрактные представления. К примеру, рассмотрим дискретное распределение  $g$  на  $\mathbb{N}$ , заданное посредством

$$g(n) := \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Пусть  $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A}, P \rangle$  – соответствующее вероятностное пространство. Значит,  $\mathcal{A}$  – совокупность всех подмножеств  $\mathbb{N}$  и для каждого  $E \subseteq \mathbb{N}$  мы имеем

$$P(E) = \sum_{n \in E} g(n).$$

Тогда  $\mathcal{D} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$  и для любого положительного  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$\#_{\mathcal{P}}(r) = \begin{cases} 1 & \text{если } r = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,  $\#_{\mathcal{P}}$  очень похож на  $g$ . Как было показано в [8],  $\text{Th}(\mathcal{P})$  и  $\text{Th}^c(\mathcal{P})$  обе  $m$ -эквивалентны теории второго порядка  $\mathfrak{L}$ .

**Теорема 4.1.** *Для любых вероятностных пространств  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ ,*

$$\#_{\mathcal{P}_1} = \#_{\mathcal{P}_2} \Leftrightarrow \text{Th}(\mathcal{P}_1) = \text{Th}(\mathcal{P}_2).$$

Другими словами, два пространства имеют один и тот же инвариант, если и только если они элементарно эквивалентны.

**Замечание 4.2.** *Аналогичные формулировки возникают в метаматематике булевых алгебр; ср. [6]. Хотя эти два направления исследований явно связаны, они в некотором смысле несравнимы, поскольку QPL имеет дело с мерами на булевых алгебрах специального рода.*

Для наших текущих целей мы можем отождествить каждое пространство с его элементарным инвариантом. Отметим, что такие инварианты могут быть легко закодированы как подмножества  $\mathbb{N}$ . Назовем класс пространств  $\mathcal{K}$  *аналитическим*, если  $\{\#_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \mathcal{K}\}$  определимо в  $\mathfrak{L}$  (как множество подмножеств  $\mathbb{N}$ ).

**Теорема 4.3.** *Пусть  $\mathcal{K}$  – аналитический класс пространств. Тогда  $\text{Th}(\mathcal{K})$   $m$ -сводима к теории второго порядка  $\mathfrak{L}$ .*

Это приводит к следующему.

**Следствие 4.4.** *Пусть  $\mathcal{K}$  – аналитический класс пространств, который содержит все бесконечные дискретные пространства. Тогда  $\text{Th}(\mathcal{K})$   $m$ -эквивалентна теории второго порядка  $\mathfrak{L}$ .*

*Доказательство.* Непосредственно из Теорем 2.4 и 4.3.

В частности, Следствие 4.4 применимо к классу всех пространств и классу всех бесконечных пространств. Это решает одну из главных проблем, заявленных в [8].

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00318; см. <https://rscf.ru/project/21-11-00318/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abadi M., Halpern J.Y.* Decidability and expressiveness for first-order logics of probability // Information and Computation. 1994. V. 112. № 1. P. 1–36.
2. *Ershov Yu.L., Lavrov I.A., Taimanov A.D., Taitlin M.A.* Elementary theories // Russian Mathematical Surveys. 1965. V. 20. № 4. P. 35–105.
3. *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N.* A logic for reasoning about probabilities // Information and Computation. 1990. V. 87. № 1–2. P. 78–128.
4. *Halpern J.Y.* An analysis of first-order logics of probability // Artificial Intelligence. 1990. V. 46. № 3. P. 311–350.
5. *Halpern J.Y.* Presburger arithmetic with unary predicates is  $\Pi_1^1$  complete // Journal of Symbolic Logic. 1991. V. 56. № 2. P. 637–642.
6. *Koppelberg S.* General theory of Boolean algebras // in *Handbook of Boolean Algebras*, Vol. 1, Ed. by Monk J.D., Bonnet R. (North-Holland, 1989), P. 1–311.
7. *Solovay R.M., Arthan R.D., Harrison J.* Some new results on decidability for elementary algebra and geometry // Annals of Pure and Applied Logic. 2012. V. 163. № 12. P. 1765–1802.
8. *Speranski S.O.* Quantifying over events in probability logic: an introduction // Mathematical Structures in Computer Science. 2017. V. 27. № 8. P. 1581–1600.
9. *Speranski S.O.* A note on definability in fragments of arithmetic with free unary predicates // Archive for Mathematical Logic. 2013. V. 52. № 5–6. P. 507–516.
10. *Speranski S.O.* Complexity for probability logic with quantifiers over propositions // Journal of Logic and Computation. 2013. V. 23. № 5. P. 1035–1055.
11. *Speranski S.O.* Quantification over propositional formulas in probability logic: decidability issues // Algebra and Logic. 2011. V. 50. № 4. P. 365–374.
12. *Tarski A.* A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry (University of California Press, 1951).

# ELEMENTARY INVARIANTS FOR QUANTIFIED PROBABILITY LOGIC

**S. O. Speranski<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup> Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

Let QPL be the two-sorted probabilistic language proposed in [8], which expands the well-known ‘polynomial’ language described in [3, Section 6] by adding quantifiers over events. We show that all atomless spaces have the same QPL-theory, and this theory is decidable. Also we introduce the notion of elementary invariant for QPL and use it for obtaining exact complexity upper bounds for some interesting probabilistic theories.

*Keywords:* probability logic, quantification over events, elementary invariants, complexity

УДК 517.95

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ВЕНТЦЕЛЯ СО СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КЛАССА $VMO_x$

© 2023 г. Д. Е. Апушкинская<sup>1,2,\*</sup>, А. И. Назаров<sup>1,3,\*\*</sup>,  
Д. К. Палагачев<sup>4,\*\*\*</sup>, Л. Г. Софтова<sup>5,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 30.11.2022 г.

После доработки 21.02.2023 г.

Принято к публикации 24.02.2023 г.

Получены новые результаты о сильной разрешимости в пространствах Соболева линейной начально-краевой задачи Вентцеля для параболических уравнений с разрывными старшими коэффициентами.

**Ключевые слова:** линейные параболические уравнения второго порядка, задача Вентцеля, априорная оценка, класс  $VMO_x$ , существование и единственность

**DOI:** 10.31857/S2686954322600707, **EDN:** ХНКРGG

Задача Вентцеля, впервые введенная в [1], представляет собой наиболее общую краевую задачу для эллиптического оператора второго порядка, которая порождает генератор марковского процесса. Эта задача, а также ее параболический аналог, возникают в различных приложениях (см. например, ссылки в [2] и [3]).

Практически все имеющиеся работы о разрешимости и регулярности решений задачи Вентцеля предполагают непрерывность старших коэффициентов как оператора в области, так и оператора в граничном условии. В недавней статье авторов [3] регулярность и сильная разрешимость в пространствах Соболева впервые были получены для стационарных задач Вентцеля в случае, когда и оператор в области, и граничный оператор имеют *разрывные* старшие коэффициенты из класса  $VMO$ . Отметим, что соответствующие ре-

зультаты для краевых задач Дирихле, Неймана и Робена в эллиптическом и параболическом случаях были установлены ранее, см. [4–7].

Важно отметить, что в статье [3] ограничения на младшие коэффициенты операторов в области и на границе оптимальны в терминах пространств Лебега и Орлича. Вывод коэрцитивных оценок для решений линейной эллиптической задачи Вентцеля при этих ограничениях потребовал тонкой аналитической техники, включающей теоремы вложения для соболевских пространств, зависящие от соотношения показателей суммируемости в области и на границе, а также оценки норм специальных операторов продолжения.

В настоящей статье мы переносим результаты [3] на параболические задачи Вентцеля в композитных пространствах Соболева  $W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T) \cap W_q^{2,1}(\Gamma_T)$ . При этом предполагается, что старшие коэффициенты как в уравнении, так и в граничном условии, принадлежат пространству  $VMO$  по переменным  $x$ , но *только измеримы* относительно переменной  $t$ . Младшие же коэффициенты принадлежат пространствам Лебега или Орлича, причем ограничения на них *оптимальны* (неулучшаемы) в этих шкалах.

Для непрерывных старших коэффициентов аналогичные результаты были получены в [8], однако требования на младшие коэффициенты в этой статье далеки от оптимальных.

Наши результаты могут быть обобщены на случай анизотропных пространств Соболева  $W_{p,r}^{2,1}$ ,

<sup>1</sup> Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Политехнический университет, Бари, Италия

<sup>5</sup> Университет Салерно, Фишиано, Италия

\*E-mail: apushkinskaya@gmail.com

\*\*E-mail: al.il.nazarov@gmail.com

\*\*\*E-mail: dian.palagachev@poliba.it

\*\*\*\*E-mail: Isofтова@unisa.it

но в этом сообщении мы ограничиваемся изотропным случаем.

В статье используются следующие обозначения:

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2; |x|$  – евклидова норма  $x; (x; t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

$\Omega$  – гладкая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n; \bar{\Omega}$  – ее замыкание,  $\partial\Omega$  – граница.

$\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_1(x), \dots, \mathbf{n}_n(x))$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$  в точке  $x$ .

$\mathcal{Q}_T = \Omega \times (0, T)$  – цилиндр в  $\mathbb{R}^{n+1}; \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$  – его боковая поверхность.

$B_\rho(x^0)$  – открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  с центром в  $x^0$  и радиусом  $\rho, Q_\rho(x^0; t^0) = B_\rho(x^0) \times (t^0 - \rho^2, t^0)$  – стандартный параболический цилиндр.

Для измеримого множества  $E$  обозначим через  $|E|$  меру Лебега соответствующей размерности, а через  $L^p(E)$  – стандартное пространство Лебега с нормой  $\|\cdot\|_{p,E}$ . Далее,  $f_+ = \max\{f; 0\}$ , а среднее значение функции  $f$  на  $E$  записывается как

$$\int_E f = \frac{1}{|E|} \int_E f.$$

Всюду в работе индексы  $i, j$  изменяются от 1 до  $n$ . По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

$D_i, \partial_t$  – операторы дифференцирования по переменным  $x_i$  и  $t$  соответственно;  $Du = (D_1u, \dots, D_nu)$  – градиент функции  $u$ .

$d_i$  – касательный дифференциальный оператор на  $\partial\Omega$ :

$$d_i = D_i - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j D_j;$$

$du = (d_1u, \dots, d_nu)$  – касательный градиент  $u$  на  $\partial\Omega$ .

$W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T)$  и  $W_q^{2,1}(\Gamma_T)$  – параболические пространства Соболева с нормами

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T)} &= \|\partial_t u\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|D(Du)\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|u\|_{p,\mathcal{Q}_T}, \\ \|u\|_{W_q^{2,1}(\Gamma_T)} &= \|\partial_t u\|_{q,\Gamma_T} + \|d(du)\|_{q,\Gamma_T} + \|u\|_{q,\Gamma_T}. \end{aligned}$$

Мы будем обозначать через  $V_{p,q}(\mathcal{Q}_T) = W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T) \cap W_q^{2,1}(\Gamma_T)$  пространство всех  $W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T)$ -функций, имеющих след из  $W_q^{2,1}(\Gamma_T)$ ; норма в нем определяется формулой

$$\|u\|_{V_{p,q}(\mathcal{Q}_T)} = \|u\|_{W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T)} + \|u\|_{W_q^{2,1}(\Gamma_T)}.$$

$\mathcal{C}^{1,1}$  – пространство функций, имеющих липшицевы первые производные. Далее, условие  $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$  означает, что существует такой радиус  $\mathfrak{R}_0 > 0$ , что

для любой точки  $x^0 \in \partial\Omega$  множество  $\partial\Omega \cap B_{\mathfrak{R}_0}(x^0)$  в подходящей декартовой системе координат есть график  $y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1})$  функции  $f \in \mathcal{C}^{1,1}$ . Выражение “константа зависит от свойств  $\partial\Omega$ ” означает зависимость от  $\mathfrak{R}_0$ , от  $\mathcal{C}^{1,1}$ -норм диффеоморфизмов, используемых при локальном распрямлении  $\partial\Omega$  и от площади  $\partial\Omega$ .

Различные положительные постоянные обозначаются через  $C$  и  $N$  с индексами или без них.

Следуя [6], для локально интегрируемой функции  $a : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  определим среднюю осцилляцию по пространственным переменным в цилиндре  $Q_\rho(x; t)$  формулой:

$$\text{osc}_x(a, Q_\rho(x; t)) = \int_{t-\rho^2}^t \int_{B_\rho(x)} \int_{B_\rho(x)} |a(y; \tau) - a(z; \tau)| dy dz d\tau \quad (1)$$

и положим

$$a_R^{\#(x)} = \sup_{(x;t) \in \mathbb{R}^{n+1}} \sup_{\rho \leq R} \text{osc}_x(a, Q_\rho(x; t)).$$

Говорят, что  $a \in BMO_x$ , если  $a_R^{\#(x)}$  ограничена равномерно по  $R > 0$ , и  $a \in VMO_x$ , если  $\lim_{R \rightarrow 0} a_R^{\#(x)} = 0$  (при этом  $a_R^{\#(x)}$  называется  $VMO_x$ -модулем непрерывности функции  $a$ ).

Для цилиндра  $\mathcal{Q}_T$  пространства  $BMO_x(\mathcal{Q}_T)$  и  $VMO_x(\mathcal{Q}_T)$  вводятся аналогично, с заменой в (1) интегрирования по  $B_\rho(x)$  на  $B_\rho(x) \cap \Omega$  и  $(t - \rho^2, t)$  на  $(t - \rho^2, t) \cap (0, T)$ . Пространства  $BMO_x(\Gamma_T)$  и  $VMO_x(\Gamma_T)$  (в случае гладкой поверхности  $\partial\Omega$ ) определяются соответственно через поверхностные интегралы по  $B_\rho(x) \cap \partial\Omega$  для  $(x; t) \in \Gamma_T$ .

В отличие от пространства Джона–Ниренберга  $BMO$  (см. [9]) и класса Сарасона  $VMO$  (см. [10]), которые требуют, соответственно, “ограниченности в среднем” и “непрерывности в среднем” по всем переменным  $(x; t)$ , пространства  $BMO_x$  и  $VMO_x$  требуют этих свойств лишь по пространственным переменным  $x$ , допуская функции, лишь измеримые по  $t$ . В частности, если  $a(x; t)$  не зависит от  $x$ , то  $a \in VMO_x$  автоматически, но вообще говоря,  $a \notin VMO$ .

Следующее утверждение является обобщением теоремы 6.1 [8].

**Теорема 1.** Пусть  $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$  и пусть показатели  $p$  и  $q$  удовлетворяют условиям

$$1 \leq p \leq q \frac{n+2}{n+1}, \quad q > 1.$$

Тогда существует оператор продолжения

$$\Pi : W_q^{2,1}(\Gamma_T) \rightarrow W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T)$$

такой, что

$$\|\Pi u\|_{W_p^{2,1}(\mathcal{Q}_T)} \leq N_0 \|u\|_{W_q^{2,1}(\Gamma_T)}, \quad (2)$$

где  $N_0$  зависит только от  $p, q$  и свойств  $\partial\Omega$ .

Доказательство базируется на применении теорем вложения [11, теорема 18.12] и продолжения [11, теорема 18.13] в пространствах Соболева и Бесова, а также на локальном распрямлении границы и склеивании полученных оценок с помощью подходящего разбиения единицы.

Пусть показатели  $q$  и  $p$  удовлетворяют условиям (см. рис. 1)

$$1 < p \leq q \frac{n+2}{n+1} < p^* := \frac{(n+2)p}{(n+2-p)_+} \quad \text{и} \quad q > 1. \quad (3)$$

Рассмотрим линейный равномерно параболический оператор  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L} := \partial_t - a^{ij}(x;t)D_i D_j + b^i(x;t)D_i + c(x;t), \quad (4)$$

$$a^{ij}(x;t) = a^{ji}(x;t) \quad (x;t) \in \mathcal{Q}_T, \quad (L1)$$

$$a^{ij} \in VMO_x(\mathcal{Q}_T),$$

$$\forall |\xi|^2 \leq a^{ij} \xi_i \xi_j \leq v^{-1} |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (L2)$$

$$v = \text{const} > 0,$$

и линейный равномерно параболический граничный оператор  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{B} := \partial_t - \alpha^{ij}(x;t)d_i d_j + \beta^i(x;t)D_i + \gamma(x;t), \quad (5)$$

$$\alpha^{ij}(x;t) = \alpha^{ji}(x;t) \quad (x;t) \in \Gamma_T, \quad (B1)$$

$$\alpha^{ij} \in VMO_x(\Gamma_T),$$

$$\forall |\xi^*|^2 \leq \alpha^{ij} \xi_i^* \xi_j^* \leq v^{-1} |\xi^*|^2, \quad (B2)$$

$$\forall \xi^* \in \mathbb{R}^n, \quad \xi^* \perp \mathbf{n}(x).$$

Обозначим  $\mathbf{b}(x;t) = (b^1(x;t), \dots, b^n(x;t))$  и предположим, что младшие коэффициенты оператора  $\mathcal{L}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$|\mathbf{b}| \in L^{\max\{p, n+2\}}(\mathcal{Q}_T), \quad \text{если} \quad p \neq n+2,$$

$$|\mathbf{b}|(\log(1 + |\mathbf{b}|))^{\frac{n+1}{n+2}} \in L^{\frac{n+2}{n+2}}(\mathcal{Q}_T), \quad (L3)$$

если  $p = n+2$ ,

и

$$c \in L^{\max\{p, \frac{n+2}{2}\}}(\mathcal{Q}_T), \quad \text{если} \quad p \neq \frac{n+2}{2},$$

$$c(\log(1 + |c|))^{\frac{n}{n+2}} \in L^{\frac{n+2}{2}}(\mathcal{Q}_T), \quad (L4)$$

если  $p = \frac{n+2}{2}$ .

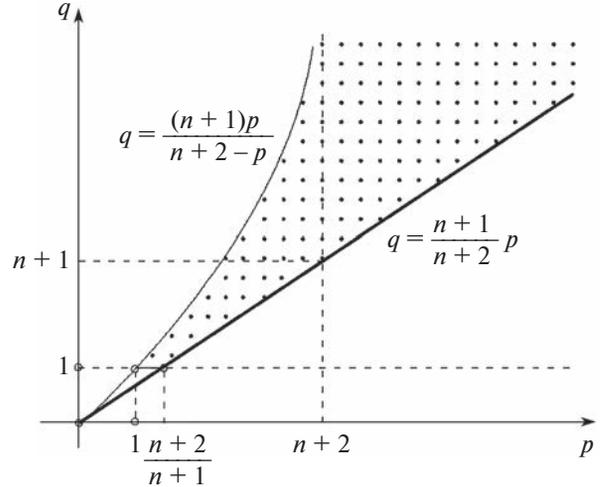


Рис. 1. Допустимые показатели  $p$  и  $q$ .

Далее, обозначим  $\beta(x;t) = (\beta^1(x;t), \dots, \beta^n(x;t))$ , введем нормальную и касательную компоненты вектора  $\beta(x;t)$

$$\beta_0(x;t) := \beta^i(x;t)\mathbf{n}_i(x);$$

$$\beta^*(x;t) := \beta(x;t) - \beta_0(x;t)\mathbf{n}(x)$$

и предположим, что

$$|\beta^*| \in L^{\max\{q, n+1\}}(\Gamma_T), \quad \text{если} \quad q \neq n+1,$$

$$|\beta^*|(\log(1 + |\beta^*|))^{\frac{n}{n+1}} \in L^{n+1}(\Gamma_T), \quad (B3)$$

если  $q = n+1$ ,

$$\beta_0 \in L^q(\Gamma_T), \quad \text{если} \quad p > n+2,$$

$$\beta_0 \in L^{\frac{qp^*}{p^* - q \frac{n+2}{n+1}}}(\Gamma_T), \quad \text{если} \quad p < n+2, \quad (B4)$$

$$\beta_0(\log(1 + |\beta_0|))^{\frac{n+1}{n+2}} \in L^q(\Gamma_T), \quad \text{если} \quad p = n+2,$$

$$\gamma \in L^{\max\{q, \frac{n+1}{2}\}}(\Gamma_T), \quad \text{если} \quad q \neq \frac{n+1}{2}, \quad (B5)$$

$$\gamma(\log(1 + |\gamma|))^{\frac{n-1}{n+1}} \in L^{\frac{n+1}{2}}(\Gamma_T), \quad \text{если} \quad q = \frac{n+1}{2}.$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы.

**Теорема 2.** Пусть  $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$  и выполнены условия (3), (L1)–(L4) и (B1)–(B5).

Тогда для любых  $f \in L^p(\mathcal{Q}_T)$  и  $g \in L^q(\Gamma_T)$  начально-краевая задача

$$\mathcal{L}u(x;t) = f(x;t) \quad \text{в} \quad \mathcal{Q}_T, \quad (6)$$

$$\mathcal{B}u(x;t) = g(x;t) \quad \text{на} \quad \Gamma_T \quad (7)$$

с начальным условием  $u|_{t=0} = 0$  в  $\bar{\Omega}$  имеет единственное решение и  $u \in V_{p,q}(\mathcal{Q}_T)$ , и справедлива оценка

$$\|u\|_{V_{p,q}(\mathcal{Q}_T)} \leq C(\|f\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|g\|_{q,\Gamma_T}), \quad (8)$$

где  $C$  зависит только от  $n, v, p, q, \text{diam}\Omega, T$ , свойств  $\partial\Omega$  и от  $VMO_x$ -модулей непрерывности коэффициентов  $a^{ij}(x; t)$  и  $\alpha^{ij}(x; t)$ , а также от модулей абсолютной непрерывности функций  $|\mathbf{b}|, c, |\mathbf{b}^*|, \beta_0$  и  $\gamma$  в соответствующих функциональных пространствах, определенных условиями (L3)–(L4) и (B3)–(B5).

**Набросок доказательства.** Стандартное рассуждение, основанное на продолжении по параметру, сводит доказательство теоремы к выводу априорной оценки (8) для решений задачи (6)–(7) с однородным начальным условием.

Для получения этой оценки мы используем прием Мюнхаузена (ср. [3, теорема 3.1], см. также [8, теорема 2.2]). При введенных условиях на младшие коэффициенты, используя анизотропные теоремы вложения (см. [11, §§ 10.2–10.6]), мы получаем оценки на младшие члены в уравнениях (6) и (7), которые позволяют рассматривать их как компактные операторы из  $V_{p,q}(\mathcal{Q}_T)$  в  $L^p(\mathcal{Q}_T)$  и  $L^q(\Gamma_T)$  соответственно. Вместе с теоремой 1 и теоремой о разрешимости задачи Дирихле для параболических уравнений со старшими коэффициентами из пространства  $VMO_x$  [7, Theorem 6] это дает оценку

$$\|u\|_{V_{p,q}(\mathcal{Q}_T)} \leq C_1(\|f\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|g\|_{q,\Gamma_T} + \|u\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|u\|_{q,\Gamma_T} + \|\beta_0 \partial_n u\|_{q,\Gamma_T}), \quad (9)$$

а затем позволяет оценить слагаемое  $\beta_0 \partial_n u$  через само себя:

$$\|\beta_0 \partial_n u\|_{q,\Gamma_T} \leq \varepsilon \|\beta_0 \partial_n u\|_{q,\Gamma_T} + \tilde{C}(\varepsilon)(\|f\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|g\|_{q,\Gamma_T} + \|u\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|u\|_{q,\Gamma_T})$$

с произвольным  $\varepsilon > 0$ . Положим  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  и подставим в (9) очевидное неравенство  $\|u\|_{p,\mathcal{Q}_T} + \|u\|_{q,\Gamma_T} \leq T\|u\|_{V_{p,q}(\mathcal{Q}_T)}$ . При достаточно малом  $T$  это дает (8). В общем случае следует разбить  $\mathcal{Q}_T$  на цилиндры малой высоты и получить в них оценки последовательно.

**Замечание 3.** При  $p < n + 2$  условие (L3) может быть ослаблено в терминах параболических пространств Морри с помощью теоремы 4.1 из [12] следующим образом:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-\frac{n+2}{p_1}} \sup_{(x;t) \in \mathcal{Q}_T} \|b^i\|_{p_1, \mathcal{Q}_\rho(x;t) \cap \mathcal{Q}_T} = 0$$

для некоторого  $p_1 \in (p, n + 2)$ .

Аналогичным образом можно ослабить условия (L4) (при  $p < \frac{n+2}{2}$ ), (B3) (при  $q < n + 1$ ) и (B5) (при  $q < \frac{n+1}{2}$ ).

Отметим также, что условия  $a^{ij} \in VMO_x(\mathcal{Q}_T)$  и  $\alpha^{ij} \in VMO_x(\Gamma_T)$  можно заменить на условия достаточной малости величин  $(a^{ij})_R^{*(x)}$  и  $(\alpha^{ij})_R^{*(x)}$  при малых  $R$ , см. [7].

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 22-21-00027, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1959. Т. 4. № 2. С. 172–185.
2. Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. A survey of results on nonlinear Venttsel problems // Appl. Math. 2000. V. 45. № 1. P. 69–80.
3. Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G. Venttsel boundary value problems with discontinuous data // SIAM J. Math. Anal. 2021. V. 53. № 1. P. 221–252.
4. Chiarenza F., Frasca M., Longo P.  $W^{2,p}$ -solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 336. № 2. P. 841–853.
5. Maugeri A., Palagachev D.K., Softova L.G. Elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients, volume 109 of Mathematical Research. Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2000.
6. Krylov N.V. Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces, volume 96 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
7. Dong H., Kim D. On the  $L_p$ -solvability of higher order parabolic and elliptic systems with BMO coefficients // Arch. Ration. Mech. Anal. 2011. V. 199. № 3. P. 889–941.
8. Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для нелинейных параболических уравнений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 6. С. 1–29.
9. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
10. Sarason D. Functions of vanishing mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 207. P. 391–405.
11. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Наука, М., 1996. 2-е изд., перераб. и доп.
12. Krylov N.V. On parabolic Adams's, the Chiarenza-Frasca theorems, and some other results related to parabolic Morrey spaces // Math. Eng. 2023. V. 5. № 2. P. 1–20.

**NONSTATIONARY VENTTSEL PROBLEM  
WITH  $VMO_x$  LEADING COEFFICIENTS****D. E. Apushkinskaya<sup>a,b</sup>, A. I. Nazarov<sup>a,c</sup>, D. K. Palagachev<sup>d</sup>, and L. G. Softova<sup>e</sup>**<sup>a</sup> *St. Petersburg Department of V.A. Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, Russian Federation*<sup>b</sup> *Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation*<sup>c</sup> *St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*<sup>d</sup> *Polytechnic University of Bari, Bari, Italy*<sup>e</sup> *University of Salerno, Fisciano, Italy*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

We obtain some new results on strong solvability in the Sobolev spaces of the linear Venttsel initial-boundary value problems to parabolic equations with discontinuous leading coefficients.

*Keywords:* linear second-order parabolic equations, Venttsel problem, class  $VMO_x$ , a priori estimates, solvability, uniqueness

УДК 511.4

## АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЕРЕНОСА МАЛЕРА ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

© 2023 г. О. Н. Герман<sup>1,2,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семёновым

Поступило 04.01.2023 г.

После доработки 13.01.2023 г.

Принято к публикации 07.03.2023 г.

Теоремы переноса Хинчина и Дайсона можно легко вывести из теоремы переноса Малера. В мультипликативной же постановке возникает препятствие, не позволяющее получить мультипликативную теорему переноса непосредственно из теоремы Малера. Требуется некоторые дополнительные соображения, например, индукция по размерности. В данной работе мы предлагаем аналог теоремы Малера, из которого мультипликативная теорема переноса следует мгновенно.

**Ключевые слова:** мультипликативные диофантовы приближения, мультипликативные диофантовы экспоненты, принцип переноса, теорема Малера

**DOI:** 10.31857/S2686954323600015, **EDN:** XHRKPY

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}, \quad \theta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad m + n \geq 3,$$

и систему линейных уравнений

$$\Theta \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

с переменными  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Одним из основных вопросов теории диофантовых приближений является вопрос о том, насколько малым может быть вектор  $\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}$  при  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  пробегающих независимо друг от друга  $\mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  и  $\mathbb{Z}^n$  соответственно. Существует несколько классических способов измерения “величины” вектора. Можно выбрать норму, например,  $\sup$ -норму, можно ее несколько видоизменить, превратив ее в так называемую взвешенную норму, или можно рассмотреть произведение модулей координат вектора. Для каждой подобной постановки задачи существуют *теоремы переноса* – утверждения, отражающие связь аппроксимационных свойств

матрицы  $\Theta$  и матрицы  $\Theta^T$ . Они обычно формулируются в терминах *диофантовых экспонент*, которые являются, возможно, простейшими количественными характеристиками, отвечающими за аппроксимационные свойства.

Для каждого натурального  $k$  и  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$  положим

$$|\mathbf{z}| = \max_{1 \leq i \leq k} |z_i|, \quad \Pi(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} |z_i|^{1/k},$$

$$\Pi'(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i \leq k} \max(1, |z_i|)^{1/k}.$$

**Определение 1.** *Супремум вещественных чисел  $\gamma$ , таких что существует сколь угодно большое  $t$ , при котором система неравенств*

$$|\mathbf{x}| \leq t, \quad |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq t^{-\gamma} \tag{1}$$

имеет решение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$  с ненулевым  $\mathbf{x}$ , называется *диофантовой экспонентой* матрицы  $\Theta$  и обозначается  $\omega(\Theta)$ .

**Определение 2.** *Супремум вещественных чисел  $\gamma$ , таких что существует сколь угодно большое  $t$ , при котором система неравенств*

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq t, \quad \Pi(\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq t^{-\gamma} \tag{2}$$

имеет решение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$  с ненулевым  $\mathbf{x}$ , называется *мультипликативной диофантовой экспонентой* матрицы  $\Theta$  и обозначается  $\omega_x(\Theta)$ .

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\*E-mail: german.oleg@gmail.com

Для каждого  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$  справедливо

$$\Pi(\mathbf{z}) \leq |\mathbf{z}|,$$

а для каждого  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k$  справедливо

$$|\mathbf{z}|^{1/k} \leq \Pi'(\mathbf{z}) \leq |\mathbf{z}|.$$

Стало быть,

$$m/n \leq \omega(\Theta) \leq \omega_x(\Theta) \leq \begin{cases} m\omega(\Theta) & \text{при } n = 1 \\ +\infty & \text{при } n \geq 2 \end{cases}, \quad (3)$$

где первое неравенство следует из теоремы Минковского о выпуклом теле.

Неравенства (3) можно назвать тривиальными. Теоремы переноса, упомянутые выше, дают следующие нетривиальные неравенства:

$$\omega(\Theta^\top) \geq \frac{n\omega(\Theta) + n - 1}{(m - 1)\omega(\Theta) + m} \quad (4)$$

и

$$\omega_x(\Theta^\top) \geq \frac{n\omega_x(\Theta) + n - 1}{(m - 1)\omega_x(\Theta) + m}. \quad (5)$$

Неравенство (4) принадлежит Дайсону [1], неравенство (5) было доказано автором в работе [2]. Можно заметить, что эти неравенства выглядят одинаково, однако, в их доказательствах имеется существенное отличие. Неравенство Дайсона следует непосредственно из теоремы переноса Малера (см. [3, 4], а также [5, 6]), тогда как неравенство для мультипликативных экспонент, наряду с теоремой Малера, требует привлечения индукции по  $n$ . Грубо говоря, причина заключается в том, что функционалы  $\Pi(\cdot)$  и  $\Pi'(\cdot)$  отличаются друг от друга.

Цель данной работы – найти аналог теоремы переноса Малера, из которого неравенство (5) выводится столь же непосредственно, как из классической теоремы Малера выводится (4).

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В параграфе 2 мы формулируем теорему Малера и показываем, как из нее выводится неравенство Дайсона. В параграфе 3 мы формулируем и доказываем основной результат данной статьи. В параграфе 4 мы выводим из нашего результата неравенство (5).

## 2. ТЕОРЕМА МАЛЕРА И НЕРАВЕНСТВО ДАЙСОНА

Положим

$$d = m + n.$$

В своей оригинальной работе [7] Малер сформулировал свою знаменитую теорему в терминах билинейных форм с целыми коэффициентами (см. также [3] и [6]). В работе [6] теорема Малера проинтерпретирована в терминах псевдоприсо-

единенных параллелепипедов и двойственных решеток. Нам представляется, что эта интерпретация более удобна для приложений. Псевдоприсоединенный параллелепипед – понятие, предложенное в книге Шмидта [4], оно является некоторым упрощением того, что Малер в своих работах [8, 9] называет  $(d - 1)$ -м присоединенным телом для параллелепипеда.

**Определение 3.** Пусть заданы положительные вещественные числа  $\eta_1, \dots, \eta_d$ . Рассмотрим параллелепипед

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \eta_i, i = 1, \dots, d\}. \quad (6)$$

Параллелепипед

$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^d \eta_j, \right. \\ \left. i = 1, \dots, d \right\}$$

называется псевдоприсоединенным для  $\mathcal{P}$ .

Напомним, что, если  $\Lambda$  – решетка полного ранга в  $\mathbb{R}^d$ , ее двойственная решетка  $\Lambda^*$  определяется как

$$\Lambda^* = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для каждого } \mathbf{z}' \in \Lambda\},$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение.

Следующая версия теоремы переноса Малера предложена в работе [6].

**Теорема 1.** Пусть  $\Lambda$  – решетка полного ранга в  $\mathbb{R}^d$  с определителем 1. Пусть  $\mathcal{P}$  – параллелепипед с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Тогда

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\},$$

где  $c = (\sqrt{d})^{1/(d-1)}$ .

Теорема 1 на самом деле является некоторым усилением оригинальной теоремы Малера. Малер сформулировал свою теорему с константой  $d - 1$  вместо  $c$ . Отметим, однако, что с точки зрения диофантовых экспонент годится любая константа (зависящая лишь от  $d$ ).

Покажем, как неравенство (4) выводится из Теоремы 1. Напомним, что  $d = m + n$ .

Рассмотрим решетки

$$\Lambda = \Lambda(\Theta) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d, \quad \Lambda^* = \Lambda^*(\Theta) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\top \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d. \quad (7)$$

Ясно, что решетка  $\Lambda^*$  является двойственной к  $\Lambda$ . Далее, для каждого положительных  $t, \gamma, s, \delta$  определим параллелепипеды

$$\mathcal{P}(t, \gamma) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{l} |z_j| \leq t, j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq t^{-\gamma}, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}(s, \delta) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{l} |z_j| \leq s^{-\delta}, j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq s, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}. \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega(\Theta) &= \sup \left\{ \gamma \geq \frac{m}{n} \mid \forall t_0 \in \mathbb{R} \exists t > t_0: \mathcal{P}(t, \gamma) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \right\}, \\ \omega(\Theta^\top) &= \sup \left\{ \delta \geq \frac{n}{m} \mid \forall s_0 \in \mathbb{R} \exists s > s_0: \mathcal{Q}(s, \delta) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если  $t, \gamma, s, \delta$  связаны соотношениями

$$t = s^{((n-1)\delta+n)/(d-1)}, \quad \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}, \quad (11)$$

то параллелепипед  $\mathcal{Q}(s, \delta)$  является псевдоприсоединенным для  $\mathcal{P}(t, \gamma)$ , т.е.  $\mathcal{Q}(s, \delta) = \mathcal{P}(t, \gamma)^*$ . По Теореме 1 получаем, что

$$\mathcal{Q}(s, \delta) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c\mathcal{P}(t, \gamma) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Стало быть, ввиду (10),

$$\omega(\Theta^\top) \geq \delta \Rightarrow \omega(\Theta) \geq \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}.$$

Таким образом,

$$\omega(\Theta) \geq \frac{\omega(m\Theta^\top) + m - 1}{(n-1)\omega(\Theta^\top) + n}.$$

Меняя тройку  $(\Theta, m, n)$  на  $(\Theta^\top, n, m)$ , приходим к неравенству (4).

### 3. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Для каждого набора  $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$  определим параллелепипед  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$  как

$$\mathcal{P}(\lambda, \mu) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \left| \begin{array}{l} |z_j| \leq \lambda_j, j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}. \quad (12)$$

Положим также

$$\begin{aligned} \lambda_j^* &= \lambda_j^{-1} \prod_{k=1}^m \lambda_k \prod_{k=1}^n \mu_k, \quad j = 1, \dots, m, \\ \mu_i^* &= \mu_i^{-1} \prod_{k=1}^m \lambda_k \prod_{k=1}^n \mu_k, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что тогда  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)^* = \mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*)$ . Наконец, определим набор  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$  следующим

образом. Упорядочим элементы  $\lambda$  по возрастанию:  $\lambda_{j_1} \leq \dots \leq \lambda_{j_m}$ . Если  $\lambda_{j_1} \geq 1$ , положим  $\hat{\lambda} = \lambda$ . Если же  $\lambda_{j_1} < 1$ , обозначим через  $p$  наибольший индекс, такой что  $\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_p} < 1$ , и определим  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m$  как

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{j_i} &= 1, \quad i = 1, \dots, p, \\ \hat{\lambda}_{j_i} &= \lambda_{j_i} (\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k})^{1/(m-p)}, \quad i = p+1, \dots, m. \end{aligned} \quad (14)$$

Следующая теорема является главным результатом данной работы.

**Теорема 2.** Пусть решетки  $\Lambda$  и  $\Lambda^*$  заданы соотношениями (7). Рассмотрим произвольные наборы  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$  и  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Пусть

$$\Pi(\lambda) \geq 1. \quad (15)$$

Пусть наборы  $\lambda^*, \mu^*$  определены соотношениями (13), а набор  $\hat{\lambda}$  — соотношениями (14). Тогда

$$\min_{1 \leq j \leq m} \hat{\lambda}_j \geq 1, \quad \Pi(\hat{\lambda}) = \Pi(\lambda) = \Pi(\mu) \quad (16)$$

и

$$\mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_1 \mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}, \quad (17)$$

где  $c_1 = (\sqrt{n+1})^{1/n}$ .

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m.$$

Если  $\lambda_1 \geq 1$ , то  $\hat{\lambda} = \lambda$ , (16) очевидно, а (17) следует из теоремы 1 ввиду того, что  $c \leq c_1$ . Предположим, что  $\lambda_1 < 1$ . Тогда  $p$  корректно определено и  $p < m$ , поскольку справедливо (15). Отсюда немедленно следует (16).

Рассмотрим укороченные наборы

$$\begin{aligned} \lambda_\downarrow &= (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_m), \quad \lambda_\downarrow^* = (\lambda_{p+1}^*, \dots, \lambda_m^*), \\ \hat{\lambda}_\downarrow &= (\hat{\lambda}_{p+1}, \dots, \hat{\lambda}_m). \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{P}(\hat{\lambda}_\downarrow, \mu)^* = \left\{ (z_{p+1}, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^{d-p} \left| \begin{array}{l} |z_j| \leq \kappa \lambda_j^*, j = p+1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leq \mu_i^*, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\},$$

где  $\kappa = (\lambda_1 \dots \lambda_p)^{-1/(m-p)}$ . Поскольку  $\kappa > 1$ , справедливо

$$\mathcal{P}(\lambda_\downarrow^*, \mu^*) \subset \mathcal{P}(\hat{\lambda}_\downarrow, \mu)^*. \quad (18)$$

Рассмотрим также матрицу

$$\Theta_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \theta_{1p+1} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{np+1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix},$$

полученную из матрицы  $\Theta$  удалением первых  $p$  столбцов, и решетки

$$\Lambda_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-p} & \\ -\Theta_{\downarrow} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{d-p}, \quad \Lambda_{\downarrow}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-p} & \Theta_{\downarrow}^{\top} \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{d-p}.$$

Сделаем два ключевых наблюдения: во-первых, множество

$$\{(0, \dots, 0, z_{p+1}, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid (z_{p+1}, \dots, z_d) \in \Lambda_{\downarrow}\}$$

является подрешеткой решетки  $\Lambda$ ; во-вторых, множество

$$\{(0, \dots, 0, z_{p+1}, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid (z_{p+1}, \dots, z_d) \in \Lambda_{\downarrow}^*\}$$

является ортогональной проекцией решетки  $\Lambda^*$  на плоскость координат  $z_{p+1}, \dots, z_d$ . Отсюда получаем, что

$$\mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda_{\downarrow}^*, \mu^*) \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\}, \quad (19)$$

$$\mathcal{P}(\hat{\lambda}_{\downarrow}, \mu) \cap \Lambda_{\downarrow} \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Наконец, по Теореме 1

$$\mathcal{P}(\hat{\lambda}_{\downarrow}, \mu)^* \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_2 \mathcal{P}(\hat{\lambda}_{\downarrow}, \mu) \cap \Lambda_{\downarrow} \neq \{\mathbf{0}\}, \quad (20)$$

где  $c_2 = (\sqrt{d-p})^{1/(d-p-1)}$ . Собирая вместе (18)–(20) и учитывая тот факт, что  $c_2 \leq c_1$ , получаем следующую цепочку импликаций:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} &\Rightarrow \mathcal{P}(\lambda_{\downarrow}^*, \mu^*) \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(\hat{\lambda}_{\downarrow}, \mu)^* \cap \Lambda_{\downarrow}^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_2 \mathcal{P}(\hat{\lambda}_{\downarrow}, \mu) \cap \Lambda_{\downarrow} \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_2 \mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_1 \mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}, \end{aligned}$$

откуда и следует (17).

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО НЕРАВЕНСТВА ПЕРЕНОСА

Покажем, как вывести неравенство (5) из Теоремы 2. Для каждого положительных  $t, \gamma, s, \delta$  определим следующие два семейства параллелепипедов:

$$\mathcal{F}(t, \gamma) = \{\mathcal{P}(\lambda, \mu) \mid \Pi(\lambda) = t, \Pi(\mu) = t^{-\gamma}, \min_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \geq 1\},$$

$$\mathcal{G}(s, \delta) = \{\mathcal{P}(\lambda, \mu) \mid \Pi(\lambda) = s^{-\delta}, \Pi(\mu) = s, \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \geq 1\}.$$

Каждый параллелепипед  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$ , удовлетворяющий условиям

$$\Pi(\lambda) \leq t, \quad \Pi(\mu) \leq t^{-\gamma}, \quad (21)$$

содержится в некотором параллелепипеде из семейства  $\mathcal{F}(t, \gamma)$ . Наоборот, каждый параллелепипед  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$  из семейства  $\mathcal{F}(t, \gamma)$  удовлетворяет условиям (21). Аналогично, каждый параллелепипед  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$ , удовлетворяющий условиям

$$\Pi(\lambda) \leq s^{-\delta}, \quad \Pi(\mu) \leq s, \quad (22)$$

содержится в некотором параллелепипеде из семейства  $\mathcal{G}(s, \delta)$ . И наоборот, каждый параллелепипед  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$  из семейства  $\mathcal{G}(s, \delta)$  удовлетворяет условиям (22). Таким образом, для мультипликативных экспонент справедлив следующий аналог равенств (10):

$$\begin{aligned} \omega_{\times}(\Theta) &= \sup \left\{ \gamma \geq \frac{m}{n} \mid \forall t_0 \in \mathbb{R} \exists t > t_0: \right. \\ &\quad \left. \exists \mathcal{P} \in \mathcal{F}(t, \gamma): \mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \right\}, \\ \omega_{\times}(\Theta^{\top}) &= \sup \left\{ \delta \geq \frac{n}{m} \mid \forall s_0 \in \mathbb{R} \exists s > s_0: \right. \\ &\quad \left. \exists \mathcal{P} \in \mathcal{G}(s, \delta): \mathcal{P} \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим опять, что  $t, \gamma, s, \delta$  связаны соотношениями (11). Рассмотрим произвольный параллелепипед  $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$ , такой что  $\mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*) \in \mathcal{G}(s, \delta)$ . Тогда

$$\Pi(\lambda) = t, \quad \Pi(\mu) = t^{-\gamma}.$$

Мы не можем гарантировать, что в наборе  $\lambda$  нет компонент, строго меньших 1, поэтому, вообще говоря, неверно, что  $\mathcal{P}(\lambda, \mu) \in \mathcal{F}(t, \gamma)$ . Тем не менее, если  $t \geq 1$ , по теореме 2 справедливо  $\mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \in \mathcal{F}(t, \gamma)$  и, более того,

$$\mathcal{P}(\lambda^*, \mu^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow c_1 \mathcal{P}(\hat{\lambda}, \mu) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Стало быть, ввиду (23)

$$\omega_{\times}(\Theta^{\top}) \geq \delta \Rightarrow \omega_{\times}(\Theta) \geq \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}.$$

Таким образом,

$$\omega_{\times}(\Theta) \geq \frac{\omega_{\times}(m\Theta^{\top}) + m - 1}{(n-1)\omega_{\times}(\Theta^{\top}) + n}.$$

Меняя тройку  $(\Theta, m, n)$  на  $(\Theta^{\top}, n, m)$ , приходим к неравенству (5).

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00079, <https://rscf.ru/project/22-21-00079/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dyson F.J. On simultaneous Diophantine approximations // Proc. London Math. Soc. 1947. V. 49. № 2. P. 409–420.*
2. *German O.N. Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents // Труды МИРАН. 2011. Т. 275. С. 227–239.*
3. *Касселс Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИИЛ, 1961.*
4. *Шмидт В. Диофантовы приближения. М.: “Мир”, 1983.*
5. *German O.N. On Diophantine exponents and Khintchine’s transference principle // Moscow J. Comb. Number Theory. 2012. V. 2. № 2. P. 22–51.*
6. *Герман О.Н., Евдокимов К.Г. Усиление теоремы переноса Малера // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 1. С. 63–76.*
7. *Mahler K. Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen // Čas. Pešt. Mat. Fys. 1939. V. 68. P. 85–92.*
8. *Mahler K. On compound convex bodies, I. Proc. London Math. Soc. 1955. V. 5. № 3. P. 358–379.*
9. *Mahler K. On compound convex bodies. II. Proc. London Math. Soc. 1955. V. 5. № 3. P. 380–384.*

## AN ANALOGUE OF MAHLER’S TRANSFERENCE THEOREM FOR MULTIPLICATIVE DIOPHANTINE APPROXIMATION

O. N. German<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Moscow Lomonosov State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Khintchine’s and Dyson’s transference theorems can be very easily deduced from Mahler’s transference theorem. In the multiplicative setting an obstacle appears, which does not allow deducing the multiplicative transference theorem immediately from Mahler’s theorem. Some extra considerations are required, for instance, induction by the dimension. In this paper we propose an analogue of Mahler’s theorem which implies the multiplicative transference theorem immediately.

*Keywords:* multiplicative Diophantine approximation, multiplicative Diophantine exponents, transference principle, Mahler’s theorem

УДК 51-77+336.051+338.1+330.4

## УТОЧНЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ ИНФЛЯЦИИ И НЕСТАБИЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

© 2023 г. Академик РАН В. А. Садовничий<sup>1,\*</sup>, иностранный член РАН А. А. Акаев<sup>2,\*\*</sup>, А. И. Звягинцев<sup>3,\*\*\*</sup>, А. И. Сарыгулов<sup>4,\*\*\*\*</sup>

Поступило 23.01.2023 г.  
После доработки 19.02.2023 г.  
Принято к публикации 20.03.2023 г.

Ранее авторами были предложены две экономико-математические модели, описывающие динамику темпов развития экономики и прогнозные темпы инфляции. События, сложившиеся после февраля 2022 г., внесли элемент существенной турбулентности в процессы макроэкономической динамики России, что потребовало некоторой коррекции предложенных ранее моделей. Это и отражено в данной статье. Смоделированные на основе уточненных моделей процессы показывают, что для восстановления экономического роста и снижения инфляции в среднесрочной перспективе требуются существенное снижение процентной ставки и равномерное увеличение денежной массы. Показано, что в происходящую эпоху геополитических перемен и крушения многих либеральных рыночных догм возрастает роль государства и планирования в управлении экономическими процессами.

**Ключевые слова:** экономическая динамика, инфляция, нестабильное развитие

**DOI:** 10.31857/S2686954323700133, **EDN:** XJABZF

В статьях [1] и [2] разработаны две экономико-математические модели:  
модель динамики темпов экономического роста (спада):

$$q_Y = q_{\bar{Y}} + \rho \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{k\mu}{d} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{d}}{d} \right) - \dot{r} \right] \quad (1)$$

и модель прогнозных темпов инфляции:

$$\pi = \mu + \frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{d}}{d} - q_Y. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha, \rho, k$  – постоянные коэффициенты;  
 $\mu = \frac{\dot{M}}{M}$  – темпы роста денежной базы,  $M$  – денежная база;  $q_Y = \frac{\dot{Y}}{Y}$  – темпы роста ВВП,  $q_{\bar{Y}}$  – равновесный потенциальный уровень темпов роста ВВП в среднесрочном периоде,  $Y$  – объем ВВП;  $d$  – дефицит госбюджета (в долях ВВП);  $r$  – реальная процентная ставка;  $\pi$  – инфляция.

**Замечание 1.** В статье [3] рассматривается модифицированная модель динамики темпов экономического роста (спада):

$$q_Y = q_{\bar{Y}} + \rho \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{k\mu}{d^\xi} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{\dot{\mu}}{\mu} - \xi \frac{\dot{d}}{d} \right) - \dot{r} - \gamma q_E^e \right]. \quad (*)$$

Здесь  $\xi, \gamma$  – постоянные коэффициенты;  
 $q_E^e = \frac{\dot{E}^e}{E^e}$  – ожидаемые темпы роста валютного курса,  $E^e$  – ожидаемый валютный курс. В случае  $\xi = 1, \gamma = 0$  формула (\*) совпадает с формулой (1).

**Замечание 2.** В работе [3] предполагается, что часть дефицита госбюджета, финансируемая за счет денежной эмиссии, равна  $d^\xi$ , а остальная часть дефицита  $d - d^\xi$  покрывается за счет резервного фонда. Поскольку отсутствуют статистические дан-

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт математических исследований сложных систем Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Михайловская военная артиллерийская академия, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Санкт-Петербургский государственный экономический университет, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: info@rector.msu.ru

\*\*E-mail: askarakaev@mai.ru

\*\*\*E-mail: azvyagintsev@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: dept.cfr@unecon.ru

ные о величине дефицита госбюджета, финансируемого за счет денежной эмиссии, то корректная оценка значения  $\xi$  весьма проблематична. Об этом свидетельствует ошибочный результат, полученный в статье [3], в которой приближенными методами найдено значение  $\xi = 0.02$ . Но поскольку дефицит госбюджета выражается в долях к ВВП, то  $d < 1$  и, следовательно,  $d^{0.98} < 1$ . Тогда получается отрицательный объем дефицита, покрываемый за счет резервного фонда

$$d - d^{0.02} = d^{0.02}(d^{0.98} - 1) < 0,$$

что является ошибкой. Поэтому полагаем  $\xi = 1$ .

**Замечание 3.** В настоящее время целесообразно считать  $\gamma = 0$ . Это обусловлено рядом объективных факторов.

Во-первых, колебания валютного курса уже учтены и включены в показателе фактической инфляции.

Во-вторых, учитывая происходящие геополитические перемены и ослабление роли глобализма, Центробанк России продолжит контролировать валютный курс и не допустит высокой волатильности национальной валюты.

В-третьих, наблюдается постепенная деолларизация российской экономики и происходит неуклонный рост импортозамещения.

В-четвертых, высока вероятность того, что через несколько лет доллар США перестанет быть мировой резервной валютой.

В-пятых, в статье [3] указано, что для динамики валютного курса существенно ослабевает зависимость от нефтяного рынка при высоких ценах на нефть. По мнению абсолютного большинства экспертов, высокие цены на энергоресурсы сохранятся в ближайшие годы.

В-шестых, нет сомнений, что в ближайшей перспективе Россия вслед за газом будет продавать за рубли и нефть, тем самым, исключая зависимость национальной валюты от нефтяных цен.

В силу перечисленных замечаний мы будем оперировать формулами (1) и (2). Параметры  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $q_Y$  вычислим на основе фактических ежеквартальных статистических данных [4, 5] за период с 2015 г. по 1-е полугодие 2022 г.

Для нахождения численных значений  $\rho$  и  $q_Y$  воспользуемся полученным в [1] и [2] уравнением

$$q_Y = q_{\bar{Y}} + \rho \pi^e,$$

где  $\pi^e$  — ожидаемая инфляция.

Поскольку в ретроспективной зоне  $\pi^e = \pi$ , то, используя идею метода наименьших квадратов для реальных статистических данных, получаем экстремальную задачу для нахождения искомых параметров  $\rho$  и  $q_{\bar{Y}}$ :

$$\sum_{i=1}^N [q_{\bar{Y}} + \rho \pi(i) - q_Y(i)]^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

В целях вычисления  $\pi$  сперва на основании поквартальных статистических данных [4] была получена кубическая аппроксимация  $\pi_{\#} = -0.0000125(t - T)^3 + 0.0166(t - T)^2 - 0.4914(t - T) + 4.1805$ , для которой наблюдается высокая корреляционная связь с фактическими значениями инфляции (коэффициент корреляции равен 0,93). Отсюда  $\pi_{\#} \cong \pi$  и  $\dot{\pi} \cong \dot{\pi}_{\#} = -0.0000375(t - T)^2 + 0.0332(t - T) - 0.4914$ , где  $T = 1$  квартал 2015 г.

Так как  $q_Y = \dot{Y}/Y$ , то на основании поквартальных статистических данных по ВВП [4] была найдена аппроксимирующая линия  $Y_{\#} = 0.0279(t - T)^4 - 1.6968(t - T)^3 + 32.961(t - T)^2 - 141.94(t - T) + 21480$ , у которой высокая корреляционная связь с фактическими значениями ВВП (коэффициент корреляции составляет 0.86). Отсюда  $Y_{\#} \cong Y$  и  $\dot{Y} \cong \dot{Y}_{\#} = 0.1116(t - T)^3 - 5.0904(t - T)^2 + 65.922(t - T) - 141.94$ .

Решив экстремальную задачу (3) на основании фактических ежеквартальных статистических данных [4] за период с 2015 г. по 1-е полугодие 2022 г., получили значения

$$\rho = 0.49661; \quad q_{\bar{Y}} = 0.00304.$$

Поскольку равновесный уровень квартальных темпов роста ВВП получился равным 0.3% ( $q_{\bar{Y}} = 0.00304$ ), то годовой равновесный уровень темпов роста ВВП равен 1.2% ( $4 * q_{\bar{Y}}$ ) и является довольно низким (отчасти это обусловлено коронавирусной пандемией), что недостаточно для эффективного развития российской экономики. Из формулы (1) видно, что для роста ВВП следует увеличивать денежную базу, а также снижать процентную ставку и дефицит госбюджета. Эти меры позволят повысить покупательную способность населения, увеличат покупательный спрос, позволят предприятиям активно кредитоваться, будут способствовать притоку внутренних инвестиций в российскую экономику. При этом в силу формулы (2) будет снижаться инфляция.

Для нахождения численных значений  $\alpha$  и  $\kappa$  воспользуемся полученным в [1] и [2] уравнением

$$\kappa \mu (r + \pi^e)^{-\alpha} = d. \quad (4)$$

Прологарифмировав это уравнение, получаем

$$\ln \kappa + \ln \mu - \alpha \ln (r + \pi^e) = \ln d.$$

Отсюда в результате дифференцирования имеем

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{d}}{d} = \alpha \frac{\dot{r} + \dot{\pi}^e}{r + \pi^e}.$$

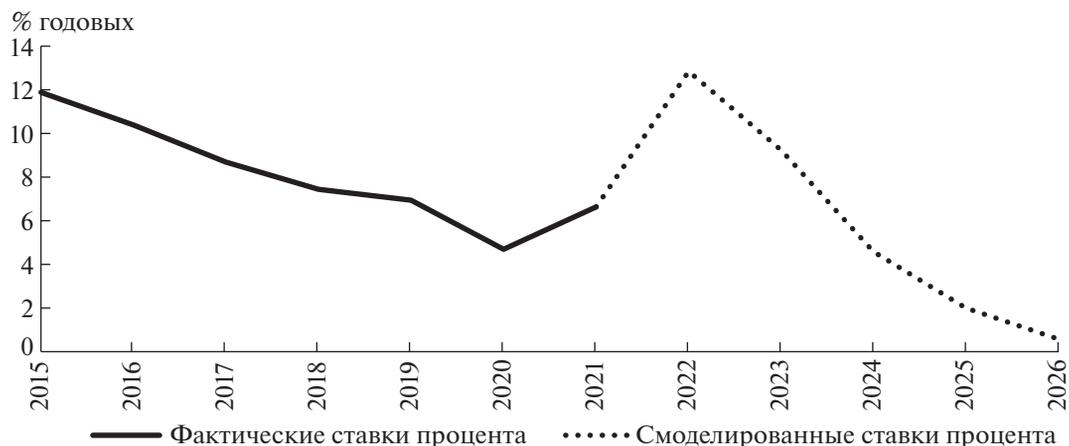


Рис. 1. Фактические и смоделированные ставки процента.

Поскольку в ретроспективной зоне  $\pi^e = \pi$  и  $\dot{\pi}^e = \dot{\pi}$ , то, используя идею метода наименьших квадратов для реальных статистических данных, получаем экстремальную задачу для нахождения искомого параметра  $\alpha$ :

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\dot{\mu}(i)}{\mu(i)} - \frac{\dot{d}(i)}{d(i)} - \alpha \frac{\dot{r}(i) + \dot{\pi}(i)}{r(i) + \pi(i)} \right]^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

В целях описания динамики денежной массы мы на основании поквартальных статистических данных [5] использовали квадратичную аппроксимацию  $M = 5.7125(t - T)^2 + 86.626(t - T) + 7877.5$ , для которой коэффициент корреляции с фактическими значениями денежной массы составил 0.98. Отсюда  $\dot{M} = 11.425(t - T) + 86.626$  и  $\ddot{M} = 11.425$ . Тогда для моделирования динамики денежной базы имеем  $\mu = \dot{M}/M$  и  $\dot{\mu} = \ddot{M}/M - \mu^2$ .

Для процентной ставки на основании поквартальных статистических данных [5] была найдена кубическая аппроксимация  $r = 0.00475(t - T)^3 - 0.0144(t - T)^2 + 0.0157(t - T) + 2.9715$ , для которой коэффициент корреляции с фактическими значениями ключевой ставки ЦБ составил 0.73. Отсюда  $\dot{r} = 0.001425(t - T)^2 - 0.0288(t - T) + 0.0157$ .

Для дефицита госбюджета на основании поквартальных статистических данных [5] была получена аппроксимирующая линия  $d = -0.00016(t - T)^4 + 0.0112(t - T)^3 - 0.2408(t - T)^2 + 1.457(t - T) + 1.6591$ , для которой коэффициент корреляции с фактическими значениями дефицита госбюджета составил 0.93. Отсюда  $\dot{d} = -0.00064(t - T)^3 + 0.0336(t - T)^2 - 0.4816(t - T) + 1.457$ .

Решив экстремальную задачу (5) на основании фактических статистических данных [4] и [5] за период с 2015 г. по 1-е полугодие 2022 г., получили значение:

$$\alpha = 0.1465.$$

В силу формулы (4), используя идею метода наименьших квадратов для реальных статистических данных, получаем экстремальную задачу для нахождения искомого параметра  $k$ :

$$\sum_{i=1}^N [k\mu(i)(r(i) + \pi(i))^{-0.1465} - d(i)]^2 \rightarrow \min.$$

Решив эту экстремальную задачу на основании фактических статистических данных [4] и [5] за период с 2015 г. по 1-е полугодие 2022 г., получили значение:

$$k = 0.1181.$$

Таблица 1

Показатели, %	2022	2023	2024
Среднегодовая инфляция	13.8–14.7	4.3–7.5	4.1–4.9
Ключевая ставка	10.5–10.8	6.5–6.8	6.0–7.0
Динамика ВВП	–6.0–4.0	–4.0–1.0	1.5–2.5
Динамика денежной массы	12–17	11–16	8–13

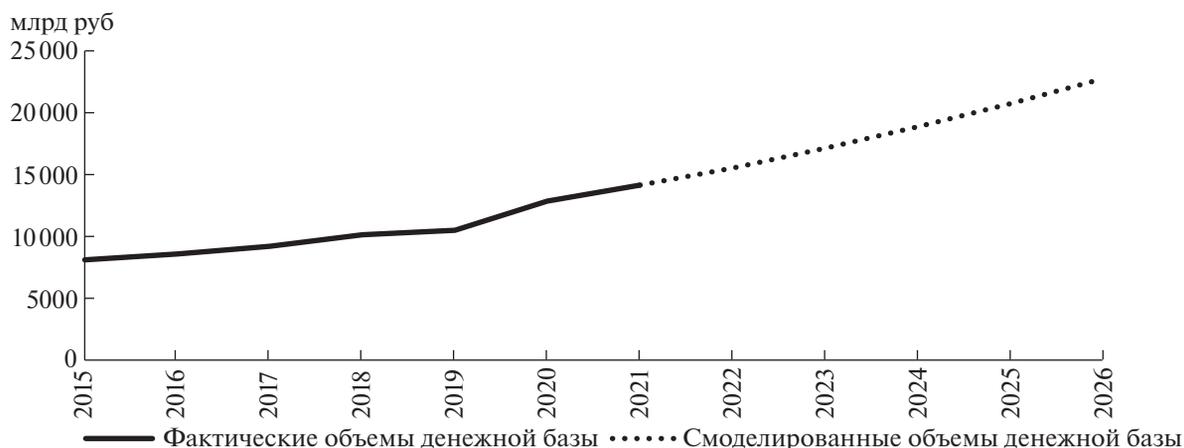


Рис. 2. Фактические и смоделированные объемы денежной базы.

Согласно прогнозу Центробанка РФ [6] на 2022–2024 гг. ожидаются следующие макроэкономические показатели:

Прогнозы Центрального банка РФ довольно пессимистичные. Очевидно, что такое развитие российской экономики является малопривлекательным.

С помощью моделей (1) и (2) построим среднесрочный сценарий снижения инфляции и восстановления экономического роста. Как видно из формул (1) и (2), этого можно добиться за счет увеличения денежной базы, а также снижения процентной ставки и дефицита госбюджета.

Сценарий снижения процентной ставки с учетом резкого ее повышения Центробанком до 20% годовых в первом полугодии 2022 г. (что было обусловлено антироссийскими санкциями западных стран) мы описали следующей функцией

$$r(t) = \begin{cases} c_1 + a_1 e^{b_1(t-t_0)}; & t_0 \leq t \leq t_1 \\ c_2 + a_2 e^{-b_2(t-t_0)}; & t > t_1 \end{cases}$$

Здесь  $a_1 = 0.01$ ,  $b_1 = 1.6094$ ,  $c_1 = -0.003$ ,  $a_2 = 0.0579$ ,  $b_2 = 0.1477$ ,  $c_2 = -0.003$ ,  $t_0$  – 1 квартал 2022 г.,  $t_1$  – 2 квартал 2022 г. Для среднегодовой ставки процента фактические и сценарные значения представлены на рис. 1.

Предполагая экспоненциальный закон для темпа роста денежной массы  $\mu = ae^{bt}$ , в силу фор-

мулы  $\mu = \frac{\dot{M}}{M}$  получаем сценарий роста денежной базы

$$M = M_0 e^{\int_{t_0}^t ae^{bt} dt} = M_0 e^{\frac{a}{b}(e^{bt} - e^{bt_0})}$$

Здесь  $a = 0.025$ ,  $b = -0.0048$ ,  $M_0 = 14947$  – денежная база 1 квартала 2022 г.,  $t_0$  – 1 квартал 2022 г. Для среднегодовой денежной базы фактические и сценарные значения представлены на рис. 2.

По оценке министра финансов А. Силуанова [7], в 2022 г. дефицит госбюджета РФ составит 2% ВВП. Федеральный бюджет на 2023 г. сверстан с дефицитом 2% ВВП [8]. Такой уровень дефицита является вполне приемлемым для развития экономики. В ближайшие годы вряд ли дефицит госбюджета будет снижаться, поскольку сложная международная обстановка потребует увеличения военных расходов. В этой связи выбор сценария постоянного дефицита  $d = 0.02$  является вполне целесообразным.

Для выбранного сценария полученные по формулам (1) и (2) результаты прогнозных расчетов динамики темпов инфляции и экономического роста (спада) показаны на рис. 3 и 4.

В табл. 2 приведены результаты сценарного моделирования.

Согласно официальным статистическим данным [4, 5], за период 2015–2021 гг. в России средне-

Таблица 2

Показатели	2022	2023	2024	2025	2026
Денежная масса (темпы роста)	10.03%	10.33%	10.13%	9.92%	9.73%
Процентная ставка	12.8%	9.2%	4.6%	2.0%	0.6%
Дефицит госбюджета (% ВВП)	2.00%	2.00%	2.00%	2.00%	2.00%
Инфляция	11.00%	5.84%	5.99%	6.00%	5.93%
ВВП (темпы роста)	-2.99%	1.98%	1.64%	1.45%	1.35%

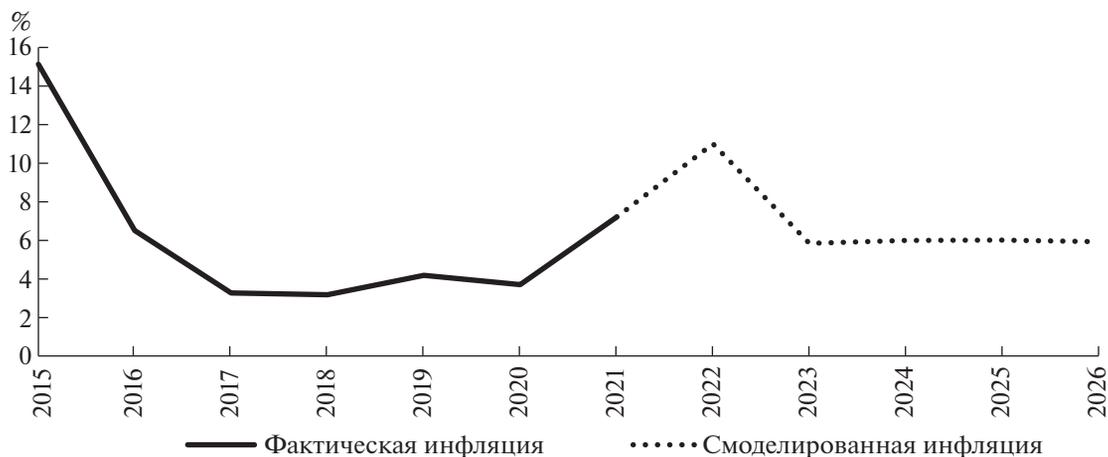


Рис. 3. Смоделированные темпы роста инфляции.

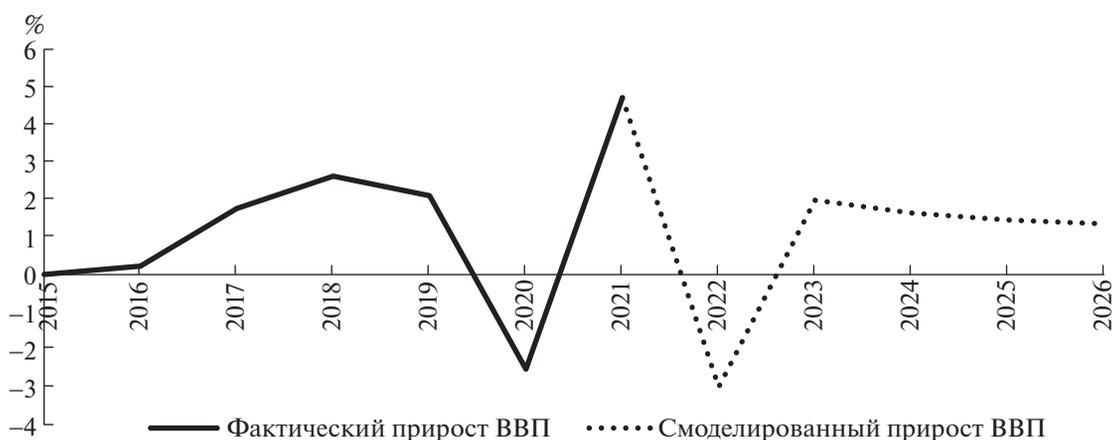


Рис. 4. Смоделированные темпы роста (спада) ВВП.

годовая инфляция составила 6.16%, а среднегодовой рост ВВП составил 1.48%. Смоделированные процессы показывают, что для восстановления экономического роста и снижения инфляции в среднесрочной перспективе требуются существенное снижение процентной ставки и равномерное увеличение денежной массы.

Модели (1) и (2) требуют тонкой настройки путем тщательного подбора параметров на основе фактических статистических данных.

В происходящую эпоху геополитических перемен и крушения многих либеральных рыночных догм возрастает роль государства и планирования в управлении экономическими процессами.

Модели (1) и (2) позволяют прогнозировать и анализировать экономические последствия различных сценариев в кредитно-денежной и бюджетной политике монетарных властей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акаев А.А., Сарыгулов А.И., Соколов В.Н. // ДАН. 2015. Т. 465. № 6. С. 643–646.
2. Акаев А.А., Зиядуллаев Н.С., Сарыгулов А.И., Соколов В.Н. Среднесрочный прогноз динамики развития экономики России // Проблемы прогнозирования. 2016. № 5. С. 37–46.
3. Акаев А.А., Зиядуллаев Н.С., Сарыгулов А.И., Соколов В.Н. // Проблемы прогнозирования. 2017. № 3. С. 34–42.
4. Росстат: <https://rosstat.gov.ru/>
5. Центральный Банк России: <https://www.cbr.ru/>
6. Банк России: [http://www.cbr.ru/Collection/Collection/File/42214/2022\\_03\\_ddcp.pdf](http://www.cbr.ru/Collection/Collection/File/42214/2022_03_ddcp.pdf)
7. ТАСС: <https://tass.ru/ekonomika/14931285>
8. ТАСС: <https://tass.ru/ekonomika/16160715>

## REFINED MATHEMATICAL MODEL OF ECONOMIC DYNAMICS UNDER HIGH INFLATION AND UNSTABLE DEVELOPMENT

Academician of the RAS **V. A. Sadovnichiy**<sup>a</sup>, Foreign member of the RAS **A. A. Akaev**<sup>b</sup>,  
**A. I. Zvyagintsev**<sup>c</sup>, and **A. I. Sarygulov**<sup>d</sup>

<sup>a</sup> *Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Moscow State University Institute of Complex Systems Mathematical Research, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Mikhailovskaya Military Artillery Academy, St. Petersburg, Russian Federation*

<sup>d</sup> *St. Petersburg State University of Economics, St. Petersburg, Russian Federation*

Previously, the authors proposed two mathematical models that describe the dynamics of economic development rates and forecasting inflation rates. The events that took place after February 2022 introduced an element of significant turbulence into the processes of macroeconomic dynamics in Russia, which required some correction of the previous models. This is reflected in this article. The processes simulated on the basis of new models show that in order to restore economic growth and reduce inflation in the medium term, a significant reduction in the interest rate and a steady increase in the money supply are required. It is shown that in the current era of geopolitical changes and the collapse of many liberal market dogmas, the role of the state and planning in managing economic processes is increasing.

*Keywords:* economic dynamics, inflation, unstable development

УДК 511.36

## ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ $p$ -АДИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 г. В. Г. Чирский<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 18.01.2023 г.

После доработки 19.03.2023 г.

Принято к публикации 25.03.2023 г.

Устанавливается, что если  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — полиадические числа Лиувилля, а число  $\xi$  — натуральное или  $\Xi$  — полиадическое число Лиувилля и если  $\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n$ ,  $\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n$ , то существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что в поле  $p$  — адических чисел хотя бы одно из чисел  $\Psi_0(\xi)$ ,  $\Psi_1(\xi)$  (соответственно,  $\Psi_0(\Xi)$ ,  $\Psi_1(\Xi)$ ) — трансцендентное.

*Ключевые слова:* полиадические числа Лиувилля, трансцендентные  $p$  — адические числа

**DOI:** 10.31857/S2686954323600039, **EDN:** XHSLUS

Рассмотрим формальные обобщенные гипергеометрические ряды

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n,$$

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_r + 1)_n}{(\beta_1 + 1)_n \dots (\beta_s + 1)_n} z^n,$$

где символ Похгаммера  $(\gamma)_n$  определяется равенствами  $(\gamma)_0 = 1$ ,  $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)$  при  $n \geq 1$ . Имеет место очевидное формальное тождество

$$F_0(z) = 1 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z F_1(z), \quad (1)$$

из которого следует, что если все числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_s$  и число  $\xi$  — алгебраические и если ряды  $F_0(\xi)$ ,  $F_1(\xi)$  — сходятся, то либо оба числа  $F_0(\xi)$ ,  $F_1(\xi)$  являются алгебраическими, либо оба они — трансцендентные числа. Если же число  $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} \xi$  является трансцендентным и  $F_1(\xi) \neq 0$ , то из соотношения (1) следует, что хотя бы одно из чисел  $F_0(\xi)$ ,  $F_1(\xi)$  — трансцендентное. Эти замечания относятся как к случаю поля комплексных чисел,

так и к любому алгебраическому расширению любого поля  $p$  — адических чисел. Таким образом, если в поле  $p$  — адических чисел удастся доказать, что  $F_1(\xi) \neq 0$ , то из соотношения (1) следует, что хотя бы одно из чисел  $F_0(\xi)$ ,  $F_1(\xi)$  — трансцендентное  $p$  — адическое число.

В работе рассматриваются ряды

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n, \quad (2)$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n$$

и с использованием результатов из [1] устанавливается, что если  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — полиадические числа Лиувилля, а число  $\xi$  — натуральное или  $\Xi$  — полиадическое число, то существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что в поле  $p$  — адических чисел хотя бы одно из чисел  $\Psi_0(\xi)$ ,  $\Psi_1(\xi)$  (соответственно,  $\Psi_0(\Xi)$ ,  $\Psi_1(\Xi)$ ) — трансцендентное.

Следует отметить, что исследование арифметической природы значений гипергеометрических рядов в комплексной области является классической задачей и в этом направлении получено большое количество результатов (см., например, [2–8]). Однако в  $p$  — адических областях ситуация иная. Ранее удавалось лишь доказать бесконечную трансцендентность или бесконечную линейную независимость значений таких рядов (см. [9–14]).

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

Бесконечная трансцендентность ряда означала, что для любого ненулевого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что при подстановке в этот многочлен значения рассматриваемого ряда в поле  $p$  – адических чисел, получится отличное от нуля  $p$  – адическое число. Это не означает даже иррациональности значения этого ряда в конкретном поле  $p$  – адических чисел. Так что доказываемые ниже теоремы, по-видимому, представляют собой первый результат о трансцендентности значений обобщенных гипергеометрических рядов в поле  $p$  – адических чисел.

Перейдем к точным формулировкам. Результат является следствием теорем, доказанных в [1] с использованием аппроксимаций Эрмита-Паде из работы [15], поэтому напомним использованные обозначения и основные определения.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых  $p$  – адических чисел по всем простым числам  $p$ . Каноническое представление элемента  $\theta$  кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда  $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}$ ,

$0 \leq a_n \leq n$ . Этот ряд сходится по всем полям  $p$  – адических чисел. Поэтому его можно рассматривать как бесконечномерный вектор, координаты которого в соответствующем кольце целых  $p$  – адических чисел обозначаем  $\theta^{(p)}$ . Основы теории полиадических чисел изложены в [16].

Будем обозначать символом  $\text{ord}_p a$  степень, в которой простое число  $p$  входит в разложение рационального числа  $a$  на простые множители и полагаем  $|a|_p = p^{-\text{ord}_p a}$ .

Будем называть полиадическое число  $\theta$  *полиадическим числом Лиувилля* (или *лиувиллевым полиадическим числом*), если для любых чисел  $n$  и  $P$  существует натуральное число  $A$  такое, что для всех простых чисел  $p$ , удовлетворяющих неравенству  $p \leq P$ , выполнено неравенство  $|\theta - A|_p < A^{-n}$ . Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля  $p$  – адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ .

Пусть  $\lambda_0$  – произвольное натуральное число. Положим  $s_0 = [\exp \lambda_0] + 1$ . Пусть  $\lambda_1$  – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа  $p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$  выполняется неравенство  $\text{ord}_p \lambda_1 \geq m s_0 \ln s_0$  и пусть  $s_1 = [\exp \lambda_1] + 1$ .

При  $k \geq 1$  пусть  $\lambda_{k+1}$  – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для

любого простого числа  $p \leq s_k + 2\lambda_k^2$  выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq m s_k \ln s_k \quad (3)$$

и пусть

$$s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1. \quad (4)$$

Пусть  $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m$  – натуральные числа. Пусть для любых  $i = 1, \dots, m, k \geq 1$ , числа  $\mu_{i,k}$  – неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству

$$\mu_{i,k} \leq \lambda_k. \quad (5)$$

Пусть  $\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l} \lambda_l, i = 1, \dots, m$ . Если при некотором  $k$  для всех  $l \geq k$  выполняются равенства  $\mu_{i,l} = 0$ , то  $\alpha_i$  – натуральное число. В любом другом случае этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля и пусть хотя бы одно из чисел  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ , является полиадическим числом Лиувилля.

Пусть  $M$  – натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по  $\text{mod}(M)$ . Как обычно, число элементов этой системы обозначается  $\varphi(M)$ , где  $\varphi(M)$  – функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны  $\rho$  различных элементов  $a_1, \dots, a_\rho$  этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho$  множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями  $a_i + Mk, k \in \mathbb{Z}$ . Используя стандартное обозначение  $\mathbf{P}$  для множества простых чисел, будем обозначать  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$  множество простых чисел, входящих в объединение множеств  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho$ . Пусть  $\varphi(M) > t + 1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $M, \rho$  – натуральные числа. Пусть  $(t + 1)\rho > \varphi(M)t$ . Тогда для любого натурального числа  $\xi$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  из множества  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  хотя бы одно из чисел  $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$  – трансцендентное.

Пусть натуральные числа  $\mu_k$  удовлетворяют при любом  $k$  неравенству  $\mu_k \leq \lambda_k$ .

$$\text{Пусть } \Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l \lambda_l.$$

**Теорема 2.** Пусть  $M, \rho$  – натуральные числа. Пусть  $(t + 1)\rho > \varphi(M)t$ . Тогда существует бесконечное множество простых чисел  $p$  из множества  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  хотя бы одно из чисел  $\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$  – трансцендентное.

**Доказательства** обеих теорем практически одинаковы. В работе [1] рассмотрены ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n,$$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_m)_n z^n,$$

$i = 1, \dots, m.$

В обозначениях (2) настоящей работы имеем:  $f_0(z) = \Psi_0(z)$ ,  $f_m(z) = \Psi_1(z)$ . Равенство (1) принимает вид

$$\Psi_0(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_m z^m \Psi_1(z).$$

Приведем формулировку теоремы 1 из [1]:

*Пусть  $M, \rho$  – натуральные числа. Пусть  $(m + 1)\rho > \varphi(M)m$ . Тогда для любых целых чисел  $h_0, \dots, h_m$ , не равных нулю одновременно и любого натурального числа  $\xi$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  из множества  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \dots + h_m f_m(\xi)|_p > 0.$$

(Теорема 2 из [1] вполне аналогична; она относится к случаю точки  $\Xi$ .)

Из теорем 1 и 2 работы [1] следует, что как для точки  $\xi$ , так и для точки  $\Xi$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполнено неравенство  $\Psi_1(\xi) \neq 0$  (соответственно,  $\Psi_1(\Xi) \neq 0$ ). Действительно, достаточно рассмотреть линейную форму  $L(\xi) = f_m(\xi)$  (соответственно,  $L(\Xi) = f_m(\Xi)$ ) и применить вышеупомянутые теоремы.

Согласно сделанным выше замечаниям, осталось только доказать, что число  $\alpha_1 \dots \alpha_m \xi$  (соответственно,  $\alpha_1 \dots \alpha_m \Xi$ ) является полиадическим числом Лиувилля. Для этого рассмотрим натуральные числа

$$\alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^k \mu_{i,l} \lambda_l, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Пусть  $A = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dots \alpha_m \xi - \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi &= (\alpha_1 - \alpha_{1,k}) \alpha_2 \dots \alpha_m \xi + \\ &+ \alpha_{1,k} (\alpha_2 - \alpha_{2,k}) \alpha_3 \dots \alpha_m \xi + \\ &+ \alpha_{1,k} \alpha_{2,k} (\alpha_3 - \alpha_{3,k}) \alpha_4 \dots \alpha_m \xi + \dots + \\ &+ \alpha_{1,k} \dots (\alpha_{m-1} - \alpha_{m-1,k}) \alpha_m \xi + \alpha_{1,k} \dots (\alpha_m - \alpha_{m,k}) \xi. \end{aligned}$$

Поскольку все числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{m,k}, \xi$  – целые  $p$ -адические,

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m \xi - \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi|_p \leq \max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p. \quad (7)$$

Для заданных чисел  $n, P$  выберем число  $K_0$  так, чтобы при  $k \geq K_0$  выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} P &\leq s_k + 2\lambda_k^2, \\ n &\leq \frac{ms_k \ln s_k}{\ln 2(\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда для любого простого числа  $p$  с условием  $p \leq P$  согласно (3) имеем:

$$\max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p \leq p^{-\text{ord}_p \lambda_{k+1}} \leq p^{-ms_k \ln s_k}. \quad (9)$$

В свою очередь, из (4), (5), (6) следует, что

$$|\alpha_{i,k}| \leq k\lambda_k^2 \leq k \ln^2 s_k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |A| &= |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi| \leq |\xi| k^m \ln^{2m} s_k = \\ &= p^{\frac{\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k}{\ln p}} \leq p^{\frac{\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k}{\ln 2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (7)–(10) следует доказываемое неравенство

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m \xi - A|_p \leq A^{-n}.$$

Рассуждения для числа  $\alpha_1 \dots \alpha_m \Xi$  вполне аналогичны.

В заключение еще раз заметим, что проверка неравенства  $\Psi_1(\xi) \neq 0$  (соответственно,  $\Psi_1(\Xi) \neq 0$ ) для конкретного простого числа  $p$  позволяет утверждать, что хотя бы одно из чисел  $\Psi_0(\xi)$ ,  $\Psi_1(\xi)$  (соответственно,  $\Psi_0(\Xi)$ ,  $\Psi_1(\Xi)$ ) – трансцендентное  $p$ -адическое. Целью работы было доказательство того, что таких простых чисел бесконечное множество.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чирский В.Г.* Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // ДАН. 2022. Т. 505. С. 63–65. <https://doi.org/10.31857/S2686954322040075>
2. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа М.: Наука. 1987. 448 с.
3. *Салихов В.Х.* Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических  $E$ -функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
4. *Салихов В.Х.* Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений  $E$ -функций // Acta Arithm. 1990. V. 53. P. 453–471.
5. *Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.* Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
6. *Bombieri E.* On  $G$ -functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.

7. *Chudnovsky G.V.* On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
8. *Иванков П.Л.* О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
9. *Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
10. *Chirskii V.G.* Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.  
<https://doi.org/10.1134/S1061920821030031>
11. *Чирский В.Г.* Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // ДАН. 2020. Т. 494. № 2. С. 69–70.  
<https://doi.org/10.31857/S268695432005032X>
12. *Chirskii V.G.* Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter // Russ. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 3. P. 294–302.  
<https://doi.org/10.1134/S1061920819030051>
13. *Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L.* Euler's divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.
14. *Matala-aho T., Zudilin W.* Euler factorial series and global relations // J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210.  
<https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.09.026>
15. *Нестеренко Ю.В.* Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
16. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.

## TRANSCENDENCE OF $p$ -ADIC VALUES OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC SERIES WITH TRANSCENDENTAL POLYADIC PARAMETERS

V. G. Chirskii<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

It is established that if  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  are polyadic Liouville numbers, and the number  $\xi$  is a positive integer or  $\Xi$  is a polyadic Liouville number and if  $\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n$ ,  $\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n$ , then there are infinitely many primes  $p$  such that the at least one of the  $p$ -adic integers  $\Psi_0(\xi)$ ,  $\Psi_1(\xi)$  (respectively,  $\Psi_0(\Xi)$ ,  $\Psi_1(\Xi)$ ) is transcendental.

*Keywords:* polyadic Liouville numbers, transcendental  $p$ -adic numbers

УДК 517.958

## ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ ОДНОГО ТИПА НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. В. Г. Звягин<sup>1,\*</sup>, В. П. Орлов<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным

Поступило 05.02.2023 г.

После доработки 17.03.2023 г.

Принято к публикации 22.03.2023 г.

В работе устанавливается существование слабого решения начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости в многосвязной области с памятью вдоль траекторий поля скоростей и неоднородным граничным условием. Исследование предполагает аппроксимацию исходной задачи приближениями галеркинских типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей используется теория регулярных лагранжевых потоков.

*Ключевые слова:* вязкоупругая сплошная среда, многосвязная область, неоднородное граничное условие, априорные оценки, слабое решение, регулярный лагранжев поток

DOI: 10.31857/S2686954323600064, EDN: XHWKXX

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В  $Q_T = [0, T] \times \Omega$ , где  $\Omega \in R^N$ ,  $N = 2, 3$  – ограниченная область с гладкой многосвязной границей  $\partial\Omega$  рассматривается движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда (см. [1]), описываемое начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \sum_{i=1}^N u_i(t, x) \partial u(t, x) / \partial x_i - \mu_0 \Delta u(t, x) - \\ - \mu_1 \operatorname{Div} \int_{\tau_u(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \operatorname{grad} p(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \\ \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega, u(t, x) = \alpha(x), \\ (t, x) \in S_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in \partial\Omega\}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z(\tau; t, x) = x + \int_t^{\tau} u(s, z(s; t, x)) ds, \\ \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Относительно области  $\Omega$  предполагается, что она получается удалением из ограниченной области  $\Omega_0$  попарно непересекающихся множеств  $\bar{\Omega}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , где области  $\Omega_i \subset \Omega_0$ . Таким образом,  $\Omega = \Omega_0 \setminus (\cup_{i=1}^K \bar{\Omega}_i)$ . При этом граница  $\partial\Omega = \cup_{i=0}^K \Gamma_i$  области  $\Omega$  такова, что поверхность  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$  ограничивает область  $\Omega$  извне, а остальные связные компоненты  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , ее границы ( $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ ) заключены внутри этой поверхности.

В (1)–(4)  $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$  и  $p(t, x)$  – искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды,  $f(t, x)$  – плотность внешних сил,  $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$  – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами  $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ . Дивергенция  $\operatorname{Div} \mathcal{E}(u)$  матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк,  $\mu_0 > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$  – константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости,  $u^0$  и  $\alpha$  – заданные начальное и граничное значения функции  $u$ . Вектор-функция  $z(\tau; t, x)$  определяется как решение задачи Коши (4).

В условиях однозначной разрешимости задачи Коши (4) функция  $\tau_u(t, x)$  определяется как  $\tau_u(t, x) = \inf\{\tau : z(s; t, x) \in \Omega \text{ при } s \in [\tau, t]\}$ . Множество  $\gamma(t, x) = \{y : y = z(s; t, x), \tau_u(t, x) \leq s \leq t\}$  определяет траекторию движения по  $\Omega$  частицы жидкости, которая в момент времени  $t$  находится в

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

\*E-mail: zvg\_vsu@mail.ru

\*\*E-mail: orlov\_yp@mail.ru

точке  $x \in \Omega$ . Если  $\tau_u(t, x) = 0$ , то движение данной частицы по траектории  $\gamma(t, x)$  начинается с нулевого момента времени. Если  $\tau_u(t, x) > 0$ , то в этот момент времени частица занимает положение  $z(\tau_u(t, x); t, x) \in \partial\Omega$ , и  $\tau_u(t, x)$  означает момент вхождения данной частицы в  $\Omega$  через  $\partial\Omega$  извне. Заметим, что наличие интеграла в (1) означает (см. [2, гл. 7]) наличие памяти среды вдоль траекторий поля скоростей.

В случае односвязной границы  $\partial\Omega$  и однородного граничного условия ( $\alpha = 0$ ,  $\tau_u(t, x) = 0$ ) в (1), нелокальные теоремы существования и единственности слабых и сильных решений для систем вида (1)–(4) устанавливались в [3–6].

Уже для систем уравнений Навье–Стокса ( $\mu_1 = 0$ ) случай многосвязной границы  $\partial\Omega$  является существенно более сложным по сравнению со случаем односвязной границы и достаточно полно исследован с точки зрения разрешимости для стационарной задачи в плоском случае.

Вследствие условия  $\operatorname{div} u = 0$  функция  $\alpha$  должна удовлетворять соотношению

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(x) \cdot n(x) dx = \sum_{i=0}^K \int_{\Gamma_i} \alpha(x) \cdot n(x) dx = \sum_{i=0}^K F_i = 0, \quad (5)$$

$$\alpha(x) \cdot n(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) n_i(x).$$

Здесь  $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$  в точке  $x \in \partial\Omega$ ,  $F_i = \int_{\Gamma_i} \alpha(x) \cdot n(x) dx$ ,  $i = 0, 1, \dots, K$ . Принципиальные трудности возникают в случае, когда не все потоки  $F_i$  равны нулю (т.е. задачи протекания) (см., напр., [7–12] и имеющуюся там библиографию).

Нелокальная слабая разрешимость задаче протекания для системы уравнений Навье–Стокса (как 2- $D$ , так 3- $D$ ) в случае многосвязной границы установлена при различных условиях на граничную функцию (см., напр., [7, 10, 11] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе мы устанавливаем слабую разрешимость задачи (1)–(4) в классе функций  $u \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)^N)$  в случае многосвязной границы  $\partial\Omega$  при  $\mu_1 \neq 0$  и неравенства нулю потоков  $F_i$  (т.е. задачи протекания). При этом вопрос об однозначной разрешимости задачи Коши (4) становится нетривиальным и понимается в смысле теории регулярных лагранжевых потоков (РЛП). Чтобы избежать неоправданных сложностей в доказательствах, мы считаем границу области и граничную функцию достаточно гладкими, хотя основные результаты справедливы и при более слабых ограничениях.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Функциональные пространства

Нам понадобятся гильбертовы пространства  $V$  и  $H$  (см. [13], раздел III.1.4) соленоидальных функций. Символом  $C_0^\infty(\Omega)^N$  обозначается множество бесконечно дифференцируемых отображений  $\Omega$  в  $R^N$ ,  $N = 2, 3$ , с компактным носителем в  $\Omega$ . Пусть  $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^N, \operatorname{div} v = 0\}$ . Обозначим через  $H$  и  $V$  замыкание  $\mathcal{V}$  в нормах пространств  $L_2(\Omega)^N$  и  $W_2^1(\Omega)^N$  соответственно. Через  $V^{-1}$  обозначим пространство, сопряженное к  $V$ . Обозначим через  $\langle f, v \rangle$  действие функционала  $f$  из сопряженного к  $V$  пространства  $V^{-1}$  на функцию  $v$  из  $V$ . Отождествление гильбертова пространства  $H$  с его сопряженным  $H^{-1}$  и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям  $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$ . При этом для  $u \in V$  и  $w \in V^{-1}$  справедливо соотношение  $\langle u, w \rangle = (u, w)$  со скалярным произведением в  $H$ .

Через  $(\cdot, \cdot)$  обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах  $L_2(\Omega)$ ,  $H$ ,  $L_2(\Omega)^N$ ,  $L_2(\Omega)^{N \times N}$ , в каких именно – ясно из контекста.

### 2.2. Граничная функция

Будем предполагать, что граница  $\Omega$  задается уравнением  $\Phi(x) = 0$ , где гладкая функция  $\Phi: \Omega_0 \rightarrow R^1$  такова, что  $\Phi(x) < 0$  при  $x \in \Omega$  и  $\Phi(x) > 0$  при  $x \in \Omega_0 \setminus \bar{\Omega}$ .

Относительно граничной функции  $\alpha$  будем предполагать, что она является следом непрерывно дифференцируемой на  $\Omega_0$  функции  $a$ , соленоидальной на  $\Omega$ . При этом предполагается, что на внешней компоненте  $\Gamma_0$  границы  $\Gamma$  выполняется условие  $\alpha|_{\Gamma_0} = 0$ , так что  $F_0 = 0$ . Для внутренних компонент границы  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , предполагается, что при  $F_i > 0$  выполняется неравенство  $\alpha \cdot n|_{\Gamma_i} > 0$ , при  $F_i < 0$  выполняется неравенство  $\alpha \cdot n|_{\Gamma_i} < 0$  ( $F_i = \int_{\Gamma_i} \alpha(x) \cdot n(x) dx$ ), а при  $F_i = 0$  справедливо  $\alpha(x)|_{\Gamma_i} = 0$ . Выполнение последних условий означает, что при неравенстве нулю потоков  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , компоненты границы  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, K$  являются либо участками втекания жидкости в  $\Omega$  из  $\Omega_i$  ( $F_i < 0$ ), либо участками вытекания жидкости ( $F_i > 0$ ).

2.3. Задача Коши

В случае  $u \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)^N)$ , вообще говоря, не существует классического решения задачи Коши (4), и ее разрешимость будем понимать в следующем смысле. Положим  $u(t, x) = v(t, x) + a(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ . Очевидно, что  $v \in L_2(0, T; V)$ . Продолжив функцию  $v$  нулем из  $\Omega$  в  $\Omega_0$  и обозначив продолжение через  $v^*$ , имеем  $u^* = v^* + a$ . Тогда очевидно, что  $u^* = u$  в  $\Omega$ ,  $u = a$  в  $\Omega_0 \setminus \Omega$  и  $u^* \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ . Наряду с задачей (4) рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau (v^* + a)(s, z(s; t, x)) ds, \quad (6)$$

$$\tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0.$$

Так как  $v^* + a \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ , то существует единственный РЛП, порожденный функцией  $u^* = v^* + a$  (см. [14, 15]). В частности, это означает, что задача Коши (6) имеет абсолютно непрерывное по  $\tau$  решение  $z(\tau; t, x)$  при п.в.  $x \in \Omega_0$ . Обозначим через  $\mathcal{L}$  оператор, ставящий в соответствие функции  $v$  порожденный функцией  $u^* = v^* + a$  РЛП, так что  $\mathcal{L}(v) = z(\tau; t, x)$ . Ниже, говоря о решении  $z(\tau; t, x)$  задачи Коши (4), мы будем иметь в виду  $z(\tau; t, x) = \mathcal{L}(v)$  при п.в.  $x \in \Omega$  (сужение  $\mathcal{L}(v)$  на  $\Omega$ ).

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата нам будет удобно, полагая  $u = v + a$ , переписать задачу (1)–(4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + \sum_{i=1}^N v_i(t, x) \partial v(t, x) / \partial x_i - \mu_0 \Delta v(t, x) +$$

$$+ \text{grad } p(t, x) = f(t, x) - \sum_{i=1}^N v_i(t, x) \partial a(x) / \partial x_i -$$

$$- \sum_{i=1}^N a_i(x) \partial v(t, x) / \partial x_i - \sum_{i=1}^N a_i(x) \partial a(x) / \partial x_i + \quad (7)$$

$$+ \mu_1 \text{Div} \int_{\tau(t, x)}^t \exp((s - t) / \lambda) \mathcal{E}(v + a) \times$$

$$\times (s, \mathcal{L}(v)(s; t, x)) ds \quad (t, x) \in Q_T;$$

$$\text{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T;$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \quad (8)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega; \quad v(t, x) = 0,$$

$$t \in [0, T], \quad x \in \partial \Omega. \quad (9)$$

Здесь  $\tau(t, x) = \inf\{\tau: \mathcal{L}(v)(s; t, x) \in \Omega \text{ при } s \in [\tau, t]\}$ ,  $v^0 = u^0 - a$ .

Введем пространство  $W_1 = \{v: v \in L_2(0, T; V), v' \in L_1(0, T; V^{-1})\}$ . Здесь  $v'$  означает производную по  $t$  функции  $v(t, \cdot)$  как функции со значениями в  $V^{-1}$ .

Пусть  $b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i v_j \partial w_j / \partial x_i dx$ ,  $u, v, w \in V$ .

**Определение 1.** Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ ,  $v^0 \in H$ . Слабым решением задачи (7)–(9) называется функция  $v \in W_1$ , удовлетворяющая условиям (9) и тождеству

$$d(v, \phi) / dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) +$$

$$+ \mu_1 \left( \int_{\tau(t, \cdot)}^t \exp((s - t) / \lambda) \times \right. \quad (10)$$

$$\times \mathcal{E}(v + a)(\tau, \mathcal{L}(v)(\tau; t, \cdot)) d\tau, \mathcal{E}(\phi)(\cdot) \Big) +$$

$$+ \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\phi)) = \langle f, \phi \rangle + b(v, a, \phi) +$$

$$+ b(a, v, \phi) + b(a, a, \phi)$$

при любой  $\phi \in V$  и п.в.  $t \in [0, T]$ . Здесь  $\mathcal{L}(v) -$  РЛП, порожденный  $v^* + a$ .

**Замечание.** Так как слабое решение  $v(t, x)$  задачи (7)–(9) принадлежит пространству  $W_1$ , то (см. [13], лемма III.1.4),  $v(t, x)$  слабо непрерывна по  $t$  как функция со значениями в  $H$ , поэтому начальное условие (9) имеет смысл.

Сформулируем основной результат.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ ,  $v^0 \in H$ . Пусть для  $\alpha$  выполняются условия раздела 2.2. Тогда существует слабое решение задачи (7)–(9).

4. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Ниже для простоты изложения опускаем не принципиальный множитель  $\exp((s - t) / \lambda)$  в (10). Обозначим через  $A$  действующий в  $H$  оператор с областью определения  $D(A) = W_2^2(\Omega)^N \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)^N \cap H$ , определенный дифференциальным выражением  $Av = -\mathcal{P} \text{Div} \mathcal{E}(v)$ , где  $\mathcal{P}$  – ортопроектор  $L_2(\Omega)^N$  на  $H$ . Оператор  $A$  является положительно определенным самосопряженным оператором (см. [13, с. 40], [16, 2.4]). Ортонормированная система собственных векторов  $e_1, e_2, \dots$  с собственными значениями  $0 < \lambda_1, \lambda_2, \dots$  образует базис в  $H$ .

Зафиксируем натуральное число  $n$ . Обозначим через  $\mathcal{P}_n$  оператор ортогонального проектирова-

ния в  $H$  на подпространство  $H_n$ , порожденное элементами  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . В силу плотности множества гладких функций в  $L_2(0, T; V^{-1})$ , аппроксимируем  $f$  последовательностью гладких функций  $f^n(t, x)$ , так что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f^n\|_{L_2(0; W_2^{-1}(\Omega)^N)} = 0$ .

Будем искать галеркинские приближения  $v^n$  в виде  $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$  как решение тождества

$$d(v^n, \phi) / dt - \sum_{i=1}^3 (v_i^n v^n, \partial \phi / \partial x_i) + \mu_0 (\mathcal{E}(v^n), \mathcal{E}(\phi)) + \mu_1 \left( \int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(v^n + a)(\tau, z^n(\tau; t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) = \langle f^n, \phi \rangle + b(v^n, a, \phi) + b(a, v^n, \phi) + b(a, a, \phi) \quad (11)$$

при любой  $\phi \in H_n$  и п.в.  $t \in [0, T]$ ,  $v^n(0, x) = \sum_{k=1}^n v_k^0 e_k(x)$ ,  $v_k^0 = \sum_{k=1}^n (v^0(x), e_k(x))$ .

Здесь  $\tau^n(t, x) = \inf\{\tau : z^n(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}$ , а  $z^n$  – решение задачи Коши

$$z^n(\tau; t, x) = x + \int_{\tau}^t \left( \sum_{k=1}^n g_k(s) e_k(z^n(s; t, x)) + a(z^n(s; t, x)) \right) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \bar{\Omega}_0. \quad (12)$$

При этом мы считаем, что функции  $e_k(x)$  продолжены нулем из  $\Omega$  в  $\Omega_0$ , так что и функции  $v^n(t, x)$  считаем равными нулю при  $x \in \Omega_0 \setminus \Omega$ .

Сведем задачу нахождения функции  $v^n$  к задаче нахождения функций  $g_i$ .

Полагая в (11)  $\phi = e_i$ , получим соответствующую интегро-дифференциальную систему для определения функций  $g$  и  $z^n$ :

$$g_i'(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^n d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) = w_i(t),$$

$$w_i(t) = f_i^n(t) - k_i + \mu_1 \left( \int_{\tau^n(t, x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(e_k(x)) (z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right) + \mu_1 \left( \int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right), \quad (13)$$

$$g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$z^n(\tau; t, x) = x + \int_{\tau}^t (v^n + a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad (14)$$

$$\tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0.$$

Здесь  $f_i^n(t) = (f^n, e_i)$ ,  $\sum_{k,r=1}^n d_{kri} g_k(t) g_r(t) \equiv D_i(g)$ ,  $d_{kri} = -\sum_{j=1}^N (e_{kj} e_r, \partial e_i / \partial x_j)$ ,  $d_{ki}$  и  $k_i$  – некоторые числа.

Решение системы (13)–(14) определяется как пара функций  $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \in C[0, T]^n$  и  $z^n(\tau; t, x) \in C([0, T] \times [0, T] \times \Omega_0)^N$ , удовлетворяющих (13)–(14).

**Лемма 1.** Система (13)–(14) имеет решение.

Приведем схему доказательства Леммы 1. Пусть  $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ . Введем оператор  $Z$ , ставящий в соответствие функции  $g(t)$  определенную на  $G_0 = [0, T] \times [0, T] \times \Omega_0$  функцию  $z(\tau; t, x)$  – решение задачи Коши (14) при  $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$ , так что  $Z(g) = z$ . Пусть  $S(R) = \{g : \|g\|_{C(0, T)^n} \leq R\}$ , где  $R > 0$ , – произвольный шар в  $C(0, T)^n$ . Оператор  $Z : S(R) \rightarrow C(G_0)^N$  оказывается равномерно непрерывным на  $S(R)$ , а  $Z : S(R) \rightarrow C^1([0, T] \times [0, T] \times \Omega_0)^N$ ,  $Z : S(R) \rightarrow C^1([0, T] \times [0, T] \times (\Omega_0 \setminus \Omega))^N$  ограниченными.

Пусть  $z(\tau; t, x)$ ,  $(t, x) \in Q_T$ , является решением задачи Коши (14), а  $\tau(t, x) = \inf\{s : z(s; t, x) \in \Omega, s \leq t\}$ . Введем оператор  $\mathcal{T}$ , ставящий в соответствие функции  $g(t)$ , определяющей функцию  $z(\tau; t, x)$ , функцию  $\tau(t, x)$ , так что  $\mathcal{T}(g) = \tau(t, x)$ . Оператор  $\mathcal{T} : C[0, T]^n \rightarrow C(Q_0)$  оказывается непрерывным.

Пусть в системе (13)–(14) функция  $w = (w_1, \dots, w_n)$  считается заданной. Тогда, как и в [13], раздел III.3.2, показывается, что эта система ОДУ однозначно разрешима и справедлива оценка  $\|g\|_{C(0, T)^n} \leq M(\|w\|_{C(0, T)^n} + \|v^0\|_H)$ .

Введем оператор  $G$ , ставящий в соответствие функции  $w$  решение  $g$  системы уравнений (13), так что  $G(w) = g$ . Оператор  $G : C[0, T]^n \rightarrow C[0, T]^n$  является непрерывным на произвольном шаре  $S_w(R) = \{w : \|w\|_{C(0, T)^n} \leq R\}$ , причем множество  $B(R) = \{g : g = G(w), w \in S_w(R)\}$  компактно в  $C(0, T)^n$ .

Поставим в соответствие произвольной функции  $w \in C[0, T]^n$  функцию  $g = G(w)$ , затем поставим в соответствие  $g$  функцию  $z = Z(g) = Z(G(w))$ , затем поставим в соответствие  $z$  функцию  $\tau = \mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$ . Обозначим  $\Xi(w) = Z(G(w))$  и

$\Upsilon(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$ . Тогда из (13) подстановкой в левую часть первого уравнения  $g = G(w)$ ,  $z^n = \Xi(w)$ ,  $\tau^n = \Upsilon(w)$  получаем операторное уравнение  $w = K(w)$ . С помощью принципа Шаудера доказывается

**Лемма 2.** *Существует неподвижная точка  $w$  оператора  $\mathcal{K}$ .*

Пусть  $w$  – неподвижная точка оператора  $\mathcal{K}$ . Положим  $g = G(w)$ ,  $z^n = \Xi(w)$ ,  $\tau^n = \mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$ . Тогда пара  $g = G(w)$  и  $z^n = \Xi(w)$  является решением системы (13)–(14).

Лемма 1 доказана.

Из Леммы 1 следует

**Лемма 3.** *Пусть пара  $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ ,  $z^n(s; t, x)$  является решением системы (13)–(14). Тогда для функции  $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$  выполняется интегральное тождество (11), и справедлива равномерная по  $n$  оценка*

$$\begin{aligned} & \sup_t \|v^n(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)^N} + \|v^n\|_{L_2(0; W_2^1(\Omega)^N)} \leq \\ & \leq M(\|f\|_{L_2(0; W_2^{-1}(\Omega)^N)} + \|v^0\|_H + M_*(\alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

Из оценки (15) и того, что  $v(t, x) = 0$  при  $x \in \Omega_0 \setminus \Omega$ , следует слабая в  $L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega_0)^N)$  и сильная в  $L_2(0, T; L_2(\Omega_0)^N)$  сходимость  $v^n$  к некоторой  $v \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega_0)^N)$  (с точностью до подпоследовательности) при  $n \rightarrow +\infty$ . Отсюда следует (см. [14, 15]), что последовательность  $z^n(s; t, x)$  сходится по  $(s, x)$  мере к РЛП  $z(s; t, x)$ , порожденному  $v \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega_0)^N)$  равномерно по  $t$ . Тогда существует подпоследовательность  $z^n(s; t, x)$ , которая при п.в.  $(s, x) \in Q_T$  сходится к  $z(s; t, x)$  равномерно по  $t$ . Отсюда и из свойств  $\alpha$  выводится, что с точностью до подпоследовательности  $\tau^n(t, x)$  сходится к  $\tau(t, x)$  при  $n \rightarrow +\infty$  при п.в.  $(t, x) \in Q_T$ .

Установленные утверждения о сходимости  $v^n$ ,  $z^n$  и  $\tau^n$  позволяют перейти к пределу в (11) и получить тождество (10) и включение  $v \in W_1$ .

Таким образом,  $v$  является слабым решением задачи задачи (7)–(9). Теорема 1 доказана.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00103.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. *Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. V. 12. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 2008. 230 p.
3. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
4. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory // Nonlinear Analysis: TMA. 2018. V. 172. P. 73–98.
5. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
6. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B. 2018. V. 23. № 9. P. 3855–3877.
7. *Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // УМН. 2014. Т. 69. № 6. С. 115–176.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 81–116.
9. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53. № 4. С. 393–428.
10. *Avrin J.* Existence, uniqueness, and asymptotic stability results for the 3-*D* steady and unsteady Navier–Stokes equations on multi-connected domains with inhomogeneous boundary conditions // Asymptotic Analysis. 2022. V. Pre-press. № Pre-press. pp. 1–22, 2022. <https://doi.org/10.3233/ASY-221816>
11. *Avrin J.* The 3-*D* Spectrally-Hyperviscous Navier–Stokes Equations on Bounded Domains with Zero Boundary Conditions // arXiv:1908.11005v1 [math.AP] 29 Aug 2019.
12. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53. № 4. С. 393–428.
13. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М: Мир, 1987. 408 с.
14. *DiPerna R.J., Lions P.L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. V. 1989. 98. P. 511–547.
15. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. Reine Angew. Math. 2008. V. 616. P. 15–46.
16. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М: Наука, 1970. 204 с.

## THE PROBLEM OF THE FLOW OF ONE TYPE OF NON-NEWTONIAN FLUID THROUGH THE BOUNDARY OF A MULTI-CONNECTED DOMAIN

V. G. Zvyagin<sup>a</sup> and V. P. Orlov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

In this paper, the existence of a weak solution of the initial boundary value problem for the equations of motion of a viscoelastic non-newtonian fluid in a multi-connected domain with memory along the trajectories of a non-smooth velocity field and an inhomogeneous boundary condition. The study assumes the approximation of the original problem by Galerkin-type approximations followed by a passage to the limit based on a priori estimates. The theory of regular Lagrangian flows is used to study the behavior of trajectories of a non-smooth velocity field.

*Keywords:* viscoelastic continuous medium, multi-connected domain, inhomogeneous boundary condition, a priori estimates, weak solution, regular Lagrangian flow

УДК 517.984

## ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА И КОМПАКТНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ НЕСЕКТОРИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

© 2023 г. С. Н. Туманов<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым

Поступило 31.03.2023 г.

После доработки 23.04.2023 г.

Принято к публикации 29.04.2023 г.

Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля на полуоси, когда потенциал принимает комплексные значения в более широкой области, чем полуплоскость, мало изучены. Оператор в этом случае, вообще говоря, несекториальный – числовой образ замечает всю комплексную плоскость. В этой ситуации предложены условия, обеспечивающие дискретность спектра и компактность резольвенты.

DOI: 10.31857/S2686954323700145, EDN: XJAIKI

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля в  $L_2(\mathbb{R}_+)$ , заданный дифференциальным выражением  $l(y) = -y'' + q(x)y$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Здесь и далее  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $q = q(x)$  – комплекснозначная функция, принимающая значения при всех достаточно больших  $x \geq x_0 \geq 0$  в открытом секторе

$$\Pi_\kappa = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \arg z \in (-\pi + \kappa, \pi - \kappa)\}, \quad \kappa \geq 0.$$

Введем максимальную область:

$$D = \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) \mid y, y' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+), l(y) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}$$

и форму краевых условий: пусть  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} |\alpha_0| + |\alpha_1| &> 0, \\ U(y) &= \alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0). \end{aligned}$$

Сам оператор  $L_U$  будем рассматривать на области  $D_U$ , состоящей из таких  $y \in D$ , для которых  $U(y) = 0$ , где он действует как  $L_U y = l(y)$ .

В общем случае рассматриваемый оператор не является секториальным, а числовой образ замечает всю комплексную плоскость.

Вместе с оператором  $L_U$  введем  $L_U^0$ , определяемый на области  $D_U^0$ , состоящей из функций  $y \in D_U$  с компактным носителем (своим для каждой такой функции  $y$ ), где  $L_U^0$  действует аналогично:  $L_U^0 y = l(y)$ .

Известно [1], что  $D_U^0 \subset D_U$  плотно в  $L_2(\mathbb{R}_+)$ , исходный оператор  $L_U$  замкнут, а  $L_U^0$  допускает замыкание. При этом может оказаться, что его замыкание  $\widetilde{L}_U^0 \neq L_U$  [2].

Случай, когда  $\widetilde{L}_U^0 = L_U$  называется определенным и представляет отдельный интерес. С одной стороны, как это следует из работы [1], реализация определенного случая эквивалентна тому, что  $L_U^* = \overline{L_U}$ , где  $\overline{L_U}$  – оператор, определяющийся сопряженными краевыми условиями  $\overline{U}(y) = \overline{\alpha_0} y(0) + \overline{\alpha_1} y'(0)$  и сопряженным дифференциальным выражением  $\overline{l}(y) = -y'' + \overline{q(x)}y$  аналогично  $L_U$ . С другой стороны, реализация определенного случая позволяет записать формулу для резольвенты  $L_U$ . При вещественном  $q$  это соответствует реализации случая предельной точки Вейля [3] для однородного уравнения

$$-y'' + qy = 0. \tag{1}$$

Лидским [2] рассмотрены потенциалы с  $\operatorname{Re} q \geq \operatorname{const}$ , либо  $\pm \operatorname{Im} q \geq \operatorname{const}$ , и даны достаточные условия реализации определенного случая и

<sup>1</sup> Московский Центр фундаментальной и прикладной математики при МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
\*E-mail: sntumanov@yandex.ru

компактности резольвенты  $L_U$ . Если при  $\text{Re}q \geq \text{const}$  определенный случай реализуется всегда, то при неограниченной снизу вещественной части потенциала приходится прибегать к дополнительным условиям, например, условиям типа Сирса [2, 4].

Наличие ВКБ асимптотик решений (1) несколько упрощает исследование спектральных свойств  $L_U$ .

На этом пути были получены классические результаты Наймарка [6]. Недавно с помощью метода ВКБ были получены результаты Ишкиным [7] для несекториального оператора Штурма–Лиувилля. Стоит отметить, что случай несекториального оператора мало изучен, о чем более подробно сказано в [7].

Для существования ВКБ асимптотик достаточно, чтобы  $q, q' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  и

$$\frac{1}{q^{1/4}} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{q^{1/4}} = \frac{5}{16} \frac{(q')^2}{q^{5/2}} - \frac{1}{4} \frac{q''}{q^{3/2}} \in L_1(\mathbb{R}_+),$$

см., например, [5], что обременительно и с точки зрения гладкости потенциала, и с точки зрения оценки роста его производных. Поэтому нас заинтересовал случай менее гладких  $q$ , когда решения (1), вообще говоря, таких асимптотик не имеют.

Договоримся через  $C$  обозначать произвольные положительные константы, возможно, различные в соседних формулах.

Введем условие на потенциал  $q$ , центральное для настоящей работы. Скажем, что  $q$  удовлетворяет условию **A** при  $x \geq x_0$ , если:

- потенциал  $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ;
- образ  $q([x_0, +\infty)) \subset \Pi_\kappa$ ,  $\kappa \geq 0$ ;
- при  $x \geq x_0$  имеет место оценка

$$\text{Re}p(x) \geq C + \frac{1}{2} \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|, \quad C > 0, \quad (2)$$

где  $p(x) = \sqrt{q(x)}$ , а ветвь корня выбрана так, чтобы  $\text{Re}p(x) > 0$  при  $x \geq x_0$ .

Проясним наш интерес к (2): как легко заметить, в случаях, рассмотренных Наймарком и Ишкиным, когда  $|q| \rightarrow +\infty$ ,  $\kappa > 0$ ,  $|q'|/q^{3/2} \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow +\infty$ , выполняется не только (2), но и даже более сильная оценка при  $x \gg 1$ :

$$\text{Re}p(x) \geq C + \left( \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|, \quad C, \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Положим

$$\rho = \rho(x) = \text{Re}p(x) - \frac{1}{2} \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|.$$

В ряде наших утверждений  $\rho$ ,  $1/|q|$ ,  $\rho/|q|$  участвуют в определении весовых  $L_2$ -пространств. Отметим, что (3) дает возможность получить оценки:

$$\left| \frac{p'}{p} \right| \leq \frac{1}{1/2 + \varepsilon} \text{Re}p,$$

$$\rho \geq \text{Re}p - \frac{1/2}{1/2 + \varepsilon} \text{Re}p = \frac{\varepsilon}{1/2 + \varepsilon} \text{Re}p,$$

а в итоге:

$$C \text{Re}p(x) \leq \rho(x) \leq \text{Re}p(x),$$

что позволяет перейти от весов  $\rho$ ,  $1/|q|$ ,  $\rho/|q|$  к более понятным  $\text{Re}p$ ,  $1/|q|$ ,  $\text{Re}p/|q|$ .

Заметим, что дополнительное условие  $\kappa > 0$  безотносительно к (2) или (3) приводит к неравенству при  $x \geq x_0$ :

$$\text{Re}p \leq |p| \leq C \text{Re}p,$$

что вместе с (3) позволяет перейти уже к весам  $|q|^{1/2}$ ,  $1/|q|$ ,  $1/|q|^{1/2}$ .

Определим множество  $\mathcal{N}$  тех  $\lambda \in \mathbb{C}$ , при которых условие **A** выполнено для  $q_\lambda = q - \lambda$  при всех  $x \geq x_0(\lambda)$  (для каждого  $\lambda$  возможно свое  $x_0(\lambda)$ ).

**Лемма 1.** Пусть для  $q$  условие **A** выполнено при всех  $x \geq x_0$ . Тогда

Множество  $\mathcal{N}$  открыто [и не пусто] в  $\mathbb{C}$ .

Условия  $\mathcal{N} = \mathbb{C}$  и  $|q(x)| \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$  эквивалентны.

В формулировках результатов штрихом обозначаем дифференцирование по  $x$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{N} \neq \emptyset$ , тогда реализуется определенный случай:  $\widetilde{L}_U^0 = L_U$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathcal{N}$  — область. Существует функция  $\eta(x, \lambda)$  ( $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \Omega$ ) нетривиальная при всех  $\lambda \in \Omega$  со следующими свойствами:

- обе функции  $\eta(x, \lambda)$  и  $\eta'(x, \lambda)$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ;
- при каждом  $x \in \mathbb{R}_+$  функции  $\eta(x, \lambda)$  и  $\eta'(x, \lambda)$  однозначные аналитические в  $\Omega$  как функции  $\lambda$ ;
- при любом  $\lambda \in \Omega$  функция  $\eta(x, \lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+)$  как функция  $x$ , является единственным нетривиальным решением уравнения

$$-y'' + (q(x) - \lambda)y = 0 \quad (4)$$

в классе решений из  $L_2(\mathbb{R}_+)$  с точностью до постоянного множителя (не зависящего от  $x$ , но, возможно, зависящего от  $\lambda$ );

Спектр  $L_U$  в  $\Omega$  дискретный (собственные пространства одномерны, корневые – конечномерны), собственные значения определяются условием  ${}^qW(\lambda) = 0$ , где

$${}^qW(\lambda) = \alpha_0 \eta(0, \lambda) + \alpha_1 \eta'(0, \lambda),$$

а размерности корневых подпространств – кратностями нулей  ${}^qW(\lambda)$ .

Вне точек спектра в  $\Omega$  формула для резольвенты  $L_U$  имеет вид:

$$(R_\lambda f)(x) = \frac{\eta(x, \lambda)}{{}^qW(\lambda)} \int_0^x \chi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \frac{\chi(x, \lambda)}{{}^qW(\lambda)} \int_x^{+\infty} \eta(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

где  $\chi(x, \lambda) = \alpha_0 \varphi(x, \lambda) - \alpha_1 \psi(x, \lambda)$ , а  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  – решения задачи Коши для уравнения (4) с начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1,$$

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi'(0, \lambda) = 0.$$

Функцию  $\eta(x, \lambda)$  мы называем решением Вейля однородного уравнения (4).

**Следствие.** Пусть для  $q$  условие А выполнено при всех  $x \geq x_0$ , и  $|q(x)| \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда спектр  $\sigma(L_U)$  дискретный.

Отметим, что в условиях Следствия мы утверждаем только дискретность спектра. Более сильное условие – компактность резольвенты – дает следующую Теорему:

**Теорема 2.** Пусть для  $q$  условие А выполнено при всех  $x \geq x_0$ , и  $\rho \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда резольвента  $R_\lambda$  оператора  $L_U$  – вполне непрерывный оператор при  $\lambda \notin \sigma(L_U)$ .

Следующая Теорема может быть полезной при исследовании полноты системы СПФ оператора  $L_U$  (см., например, [8]).

**Теорема 3.** Пусть  $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $|q(x)| \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ , пусть  $\kappa > 0$  и для некоторого  $0 < \delta < 1$  при всех  $x \geq x_0$ :

$$q(x) \in \Pi_\kappa,$$

$$\left| \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} \right| < 4\delta \tan^{3/2} \kappa \sin \frac{\kappa}{2}.$$

Тогда

- спектр  $\sigma(L_U)$  дискретный, а резольвента  $R_\lambda$  оператора  $L_U$  – вполне непрерывный оператор при  $\lambda \notin \sigma(L_U)$ .

- функция  $\eta(x, \lambda)$ , доставляемая Теоремой 1, целая по  $\lambda$  при каждом  $x \geq 0$ , и является замкнутым ядром в смысле Левина [9], т.е. если для некоторой  $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$  при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_0^{+\infty} \eta(x, \lambda) f(x) dx \equiv 0,$$

то  $f \equiv 0$ .

При (2) справедливо вложение весовых пространств:  $L_2(\rho) \subset L_2 \subset L_2(1/|q|)$ , в этой связи интеграл представляет следующая

**Теорема 4.** Пусть для  $q$  условие А выполнено при всех  $x \geq 0$ , тогда  $R_0 = L_U^{-1}$  – ограниченный оператор из  $L_2(\mathbb{R}_+, 1/|q|)$  в  $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ , а  $dR_0/dx$  (действующий как  $d[(R_0 f)(x)]/dx$ ) – ограниченный оператор из  $L_2(\mathbb{R}_+, 1/|q|)$  в  $L_2(\mathbb{R}_+, \rho/|q|)$ .

**Следствие.** Пусть для  $q$  условие А выполнено при всех  $x \geq 0$ , тогда для любой  $y \in D$  следует, что  $y \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ ,  $y' \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho/|q|)$ .

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за внимание к работе и поддержку.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при содействии РНФ, грант 20-11-20261.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М.А. // Тр. ММО 1954. Т. 3. С. 181–270.
2. Лидский В.Б. // Тр. ММО 1960. Т. 9. С. 45–79.
3. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Oxford, 1946. “Издательство иностранной литературы”, Москва, 1960.
4. Sears D.B. // Canadian Journ. math. 1950. V. 2. № 3. P. 314–325.
5. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. Academic Press, 1974. “Наука”, Физматлит, 1990.
6. Наймарк М.А. ДАН 1952. Т. 85. С. 41–44.
7. Ишкин Х.К. // Мат. заметки 2023. Т. 113.
8. Tumanov S.N. // JDE 2022. V. 319. P. 80–99.
9. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., Москва, 1956.

**ON ONE CONDITION FOR THE DISCRETENESS OF THE SPECTRUM  
AND THE COMPACTNESS OF THE RESOLVENT OF A NONSECTORIAL  
STURM–LIOUVILLE OPERATOR ON THE SEMIAXIS**

**S. N. Tumanov<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

The spectral properties of the Sturm–Liouville operator on the semi-axis with the complex-valued potential with the range exceeding the half-plane, has been little studied. The operator in this case can be non-sectorial, the numerical range can coincide with the entire complex plane. In this situation we propose the conditions ensuring the discreteness of the spectrum and the compactness of the resolvent.

УДК 519.63, 532.3

## О ТОЧНОСТИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ПРИ РАСЧЕТЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2023 г. М. Е. Ладонкина<sup>1,2,\*</sup>, О. А. Неклюдова<sup>1,2</sup>, В. В. Остапенко<sup>2</sup>,  
член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин<sup>1,2</sup>

Поступило 15.02.2023 г.  
После доработки 27.03.2023 г.  
Принято к публикации 11.04.2023 г.

Приведены результаты расчета газодинамических ударных волн, возникающих при решении задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными, по трем вариантам DG (Discontinuous Galerkin) метода, в котором решение ищется в виде кусочно-линейной разрывной функции. Показано, что DG методы, для монотонизации которых используется ограничитель Кокбуерна, имеют приблизительно одинаковую точность в областях влияния ударных волн, в то время как немонотонный DG метод, в котором этот ограничитель не применяется, имеет в этих областях существенно более высокую точность, что позволяет использовать его в качестве базисного метода при построении комбинированной схемы, которая монотонно локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния.

*Ключевые слова:* уравнения газовой динамики, ударные волны, разрывный метод Галеркина

DOI: 10.31857/S268695432360009X, EDN: XITZOQ

1. Поскольку в классической работе [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории схем сквозного счета для квазилинейных гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на разработку численных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем при аппроксимации линейных гиперболических систем. Следующие работы лежат в основе целых классов NFC (Nonlinear Flux Correction) схем: MUSCL [2], TVD [3], WENO [4], DG [5], CABARET [6]. К NFC схемам относятся также гибридные схемы [7], в которых численное ре-

шение монотонизируется с помощью специального численного алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. Различные методы построения NFC схем и результаты их применения при решении прикладных задач приводятся в [8–13]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций.

В [14] для исследования точности численных схем сквозного счета, аппроксимирующих систему законов сохранения теории мелкой воды [15], была предложена специальная задача Коши с гладкими периодическими начальными данными, в которых один инвариант аппроксимируемой системы является постоянным, а другой инвариант представляет собой синусоидальную функцию пространственной координаты; для этой задачи будем использовать аббревиатуру PCPW (Periodic Cauchy Problem for shallow Water). В точном решении задачи PCPW в некоторый момент времени формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями, в силу чего расстояние между соседними ударными волнами остается постоянным и равным длине периода. Выбор такой тестовой задачи

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

\*E-mail: ladonkina@imamod.ru

был обусловлен тем, чтобы на первом этапе изучения сходимости схем сквозного счета избежать проблем, связанных с сохранением повышенной точности этих схем при взаимодействии ударных волн, а также при аппроксимации разрывных начальных и граничных условий.

В [14, 16–21] приводятся результаты численного решения задачи PCPW по различным схемам сквозного счета и изучается сходимость этих схем в негативной интегральной норме на интервалах, одна или обе границы которых находятся в областях влияния ударных волн; для такой сходимости будем использовать аббревиатуру NINSID (Negative Integral Norm Shock Influence Domain). Показано, что при расчете задачи PCPW по NFC схемам повышенной точности эти схемы, независимо от порядка аппроксимации на гладких решениях, имеют лишь первый порядок NINSID сходимости, что приводит к соответствующему снижению точности NFC схем в областях влияния ударных волн.

2. Схемы, которые не относятся к классу NFC и являются линейными при аппроксимации линейного приближения квазилинейной гиперболической системы, будем называть QL (Quasi-Linear) схемами. В [14, 17–19] показано, что некоторые QL схемы повышенного порядка аппроксимации, в частности, схемы Русанова из [22], CWA (Compact Weak Approximation) из [23] и DG1 из [5], при численном решении задачи PCPW имеют второй порядок NINSID сходимости, и, как следствие, в отличие от NFC схем, сохраняют повышенную точность в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах. В обзорной работе [24] для таких QL схем введена специальная аббревиатура HASIA (High Accuracy Shock Influence Area) схемы. Обусловлено это тем, что при расчете задачи PCPW некоторые QL схемы повышенного порядка аппроксимации, в частности, схема Лакса-Вендроффа [25], а также QL схемы, получаемые при единичных весовых параметрах из схем WENO3 и WENO5 [4], подобно NFC схемам, имеют первый порядок NINSID сходимости, в силу чего теряют повышенную точность в областях влияния ударных волн.

Существование HASIA схем предопределило возможность построения для системы уравнений мелкой воды комбинированных схем сквозного счета [17–19, 24], которые монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. В комбинированной схеме применяется базисная немонотонная HASIA схема, по которой разностное решение строится во всей расчетной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внут-

ренних начально-краевых задач по одной из NFC схем. Причем внутренняя NFC схема (в отличие от случая гибридных схем [7]) не влияет на решение, получаемое по базисной схеме, что позволяет комбинированной схеме сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн.

При построении первых комбинированных схем [17, 18] в качестве базисных HASIA схем применялись CWA схема [23] и схема Русанова [22], а в качестве внутренней NFC схемы – монотонная модификация схемы CABARET [6]. В дальнейшем были разработаны согласованные комбинированные схемы, в которых базисная HASIA схема и внутренняя NFC схема являются однотипными, в частности, DG схемами [5]. Предложенная в [19] комбинированная DG схема, для которой введена аббревиатура CDG (Combined Discontinuous Galerkin), построена на основе метода Галеркина, в котором численное решение ищется в виде кусочно-линейной разрывной функции; в качестве базисной схемы DG1 применяется алгоритм этого метода без ограничителя Кокбурна [5], а в качестве внутренней схемы DG1A1 используется алгоритм этого метода с ограничителем Кокбурна, в котором параметр монотонизации  $A = 1$ .

3. В настоящей работе изучается точность разрывного метода Галеркина при численном моделировании разрывных решений системы законов сохранения неизоэнтропической газовой динамики [8], которая, в отличие от системы уравнений теории мелкой воды, имеет вырожденное характеристическое поле, приводящее к формированию контактных разрывов, и в общем случае не допускает записи в форме инвариантов. Проведен сравнительный анализ точности HASIA схемы DG1 с двумя NFC схемами DG1A1 и DG1A2 (алгоритмы этих схем приведены в [19]) при расчете специальной задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. При решении этой задачи (так же, как при решении задачи PCPW) внутри расчетной области формируется последовательность изолированных ударных волн, распространяющихся с постоянными скоростями на одинаковом расстоянии друг от друга. Для такой газодинамической задачи Коши будем использовать аббревиатуру PCPG (Periodic Cauchy Problem for Gas dynamics).

Численные расчеты показали, что при расчете задачи PCPG в гладких частях точного решения вне областей влияния ударных волн схема DG1A1 (в которой схемная вязкость больше, чем в схеме DG1A2) является существенно менее точной, чем схемы DG1 и DG1A2. В то же время внутри областей влияния ударных волн точность NFC схем DG1A1 и DG1A2 становится сравнимой и существенно более низкой, чем точность HASIA схемы DG1, имеющей заметные нефизические осцилляции за фронтами ударных волн. Это служит

основанием для эффективного применения при расчете задачи PCPG комбинированной схемы CDG.

4. Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения [8]

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(x, t)$  – искомая, а  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  – заданная гладкие вектор-функции. Поставим для системы (1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \equiv \mathbf{u}_0(x + X). \quad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) при  $t > 0$  имеет единственное ограниченное обобщенное решение  $\mathbf{u}(x, t)$ , в котором с течением времени формируются последовательность изолированных ударных волн.

Численные схемы разрывного метода Галеркина, аппроксимирующие задачу (1), (2), будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (3)$$

где  $h = X/M$  – шаг сетки по пространству,  $M$  – заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (4)$$

– шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором  $z \in (0, 1)$  – коэффициент запаса,  $\lambda_k(\mathbf{u})$  – собственные значения матрицы Якоби  $\mathbf{f}_u(\mathbf{u})$  системы (1),  $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$  – значение численного решения  $\mathbf{v}_h(x, t_n)$  в полужелезном пространственном узле  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$ .

Детальное описание схем DG1, DG1A1 и DG1A2, тестируемых в данной работе, приведено в [19]. Приводимые далее расчеты задачи PCPG на равномерной сетке (3) проводились при соотношении  $\tau/h = 0.0012$ , что гарантирует выполнение условия устойчивости (4).

5. Поскольку в рассматриваемой тестовой задаче Коши (1), (2) точное решение  $\mathbf{u}(x, t)$  заранее неизвестно, то для приближенного вычисления ошибки численного решения  $\mathbf{v}_h(x, t_n)$  этой задачи мы применим метод Рунге [24]. Для этого зафиксируем на сетке (3) некоторый узел  $(x_{j+1/2}, t_n)$ , где  $n \geq 1$ , и введем для него обозначение  $(\tilde{x}, \tilde{t})$ , где  $\tilde{x} = (j + 1/2)h$  и  $\tilde{t} = n\tau > 0$ . Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток

$$S_i = \{(x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i, n \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $h_i = h/3^{i-1}$ ,  $\tau_i = \tau/3^{i-1}$ , получаемых путем сжатия базисной сетки (3), численное решение

$\mathbf{v}_{h_i}(x, t_n^i)$  в точке  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  сходится к точному решению  $\mathbf{u}(x, t)$  с порядком  $r$ . Это означает, что в точке  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  с точностью  $o(h_i^r)$  выполнено условие

$$\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{u} = \mathbf{B}h_i^r, \quad (5)$$

где  $\mathbf{B}$  – векторная величина, не зависящая от  $h_i$  и такая, что  $|\mathbf{B}| > 0$ .

Вычитая из формулы (5) эту же формулу, в которой индекс  $i$  заменен на  $i + 1$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{v}_{h_{i+1}} &= \mathbf{B}(h_i^r - h_{i+1}^r) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{v}_{h_{i+1}}| &= |\mathbf{B}|h_i^r(1 - 3^{-r}). \end{aligned} \quad (6)$$

Из отношения

$$\frac{|\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{v}_{h_{i+1}}|}{|\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{v}_{h_{i+2}}|} = \left(\frac{h_i}{h_{i+2}}\right)^r = 3^r$$

вторых равенств (6) при  $i = 1, 2$  следует формула Рунге

$$r = \log_3 \frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|} = \log_{1/3} \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}, \quad (7)$$

для приближенного определения порядков локальной сходимости численного решения к точному.

Поскольку первое уравнение (6) при  $i = 1$  записывается в виде

$$\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2} = \mathbf{B}(h_1^r - h_2^r) = \mathbf{B}h_1^r(1 - 3^{-r}),$$

то входящий в него вектор  $\mathbf{B}$  можно представить следующим образом

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}}{h_1^r(1 - 3^{-r})}. \quad (8)$$

Подставляя значение (8) в формулу (5), при  $i = 1$  получаем

$$\mathbf{v}_h - \mathbf{u} = \mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}}{1 - 3^{-r}}.$$

Отсюда с учетом (7) имеем приближенную оценку

$$\delta \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h - \mathbf{u} = (\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}\right)^{-1}$$

для вектора ошибок численного решения на базисной сетке (3). Далее мы будем приводить относительные погрешности численного решения, определяемые по формуле

$$\Delta \mathbf{v}_h = \lg \frac{|\delta \mathbf{v}_h|}{|\mathbf{v}_h|} = \lg \frac{|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}_h|}. \quad (9)$$

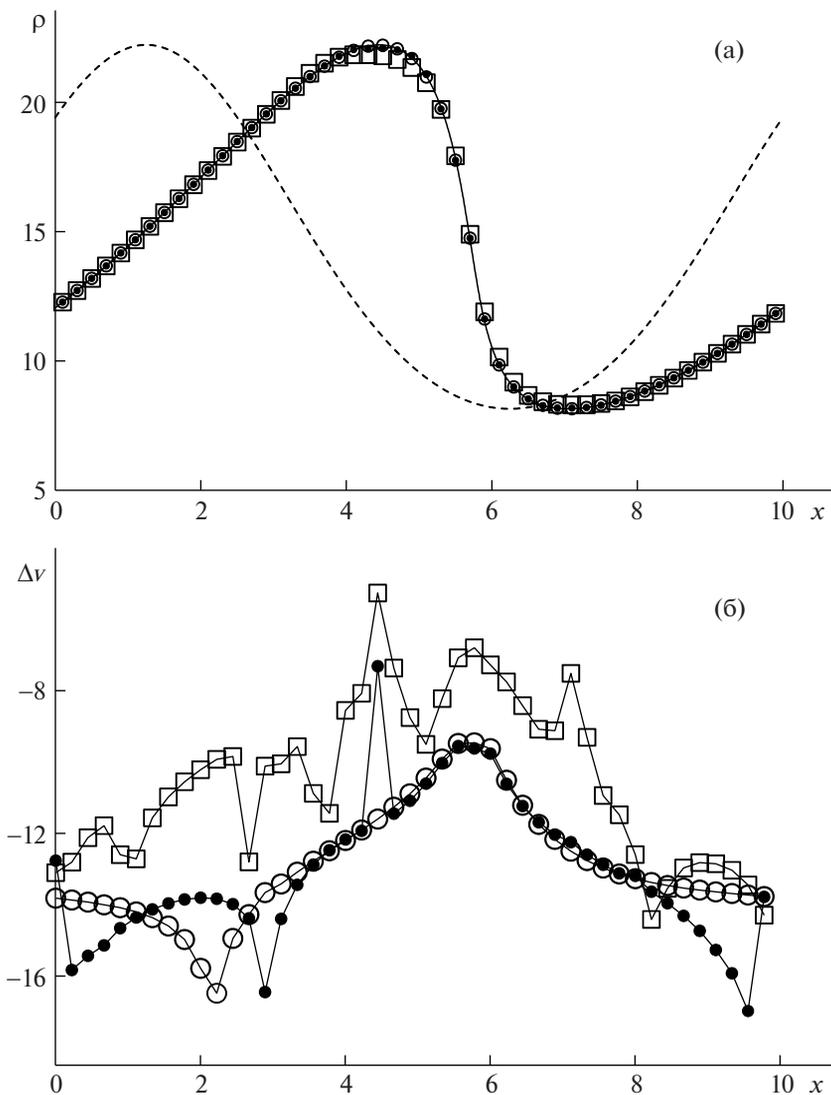


Рис. 1. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени  $t = 1$  при численном решении задачи PCPG.

6. В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему законов сохранения неизэнтропической газовой динамики [8], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$  и  $e = \varepsilon + u^2/2$  – плотность, скорость, давление и удельная полная энергия,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , в ко-

тором  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты двухатомного газа.

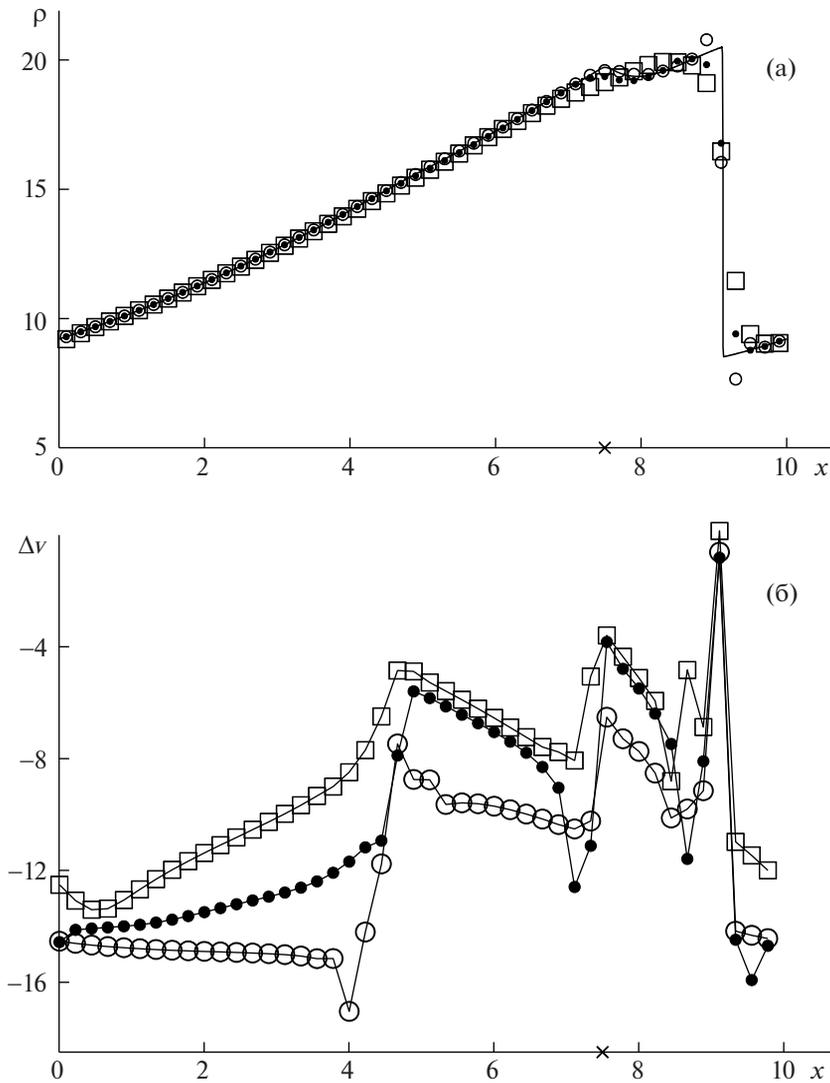
Рассмотрим для системы (1), (10) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными (задача PCPG)

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (11)$$

$$\rho(x, 0) = \left(\frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}(u(x, 0) + 10)\right)^{2/(\gamma - 1)}, \quad (12)$$

$$p(x, 0) = (\rho(x, 0))^\gamma,$$

где  $X = 10$  – длина периода. Начальная плотность газа, задаваемая первой формулой (12), показана



**Рис. 2.** Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени  $t = 2.5$  при численном решении задачи PCPG.

на рис. 1а пунктирной линией. Из формул (11) и (12) следует, что энтропия газа

$$s = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (13)$$

представляющая собой инвариант  $w_2$  системы (1), (10), и изоэнтропические квазиинварианты [12] этой системы

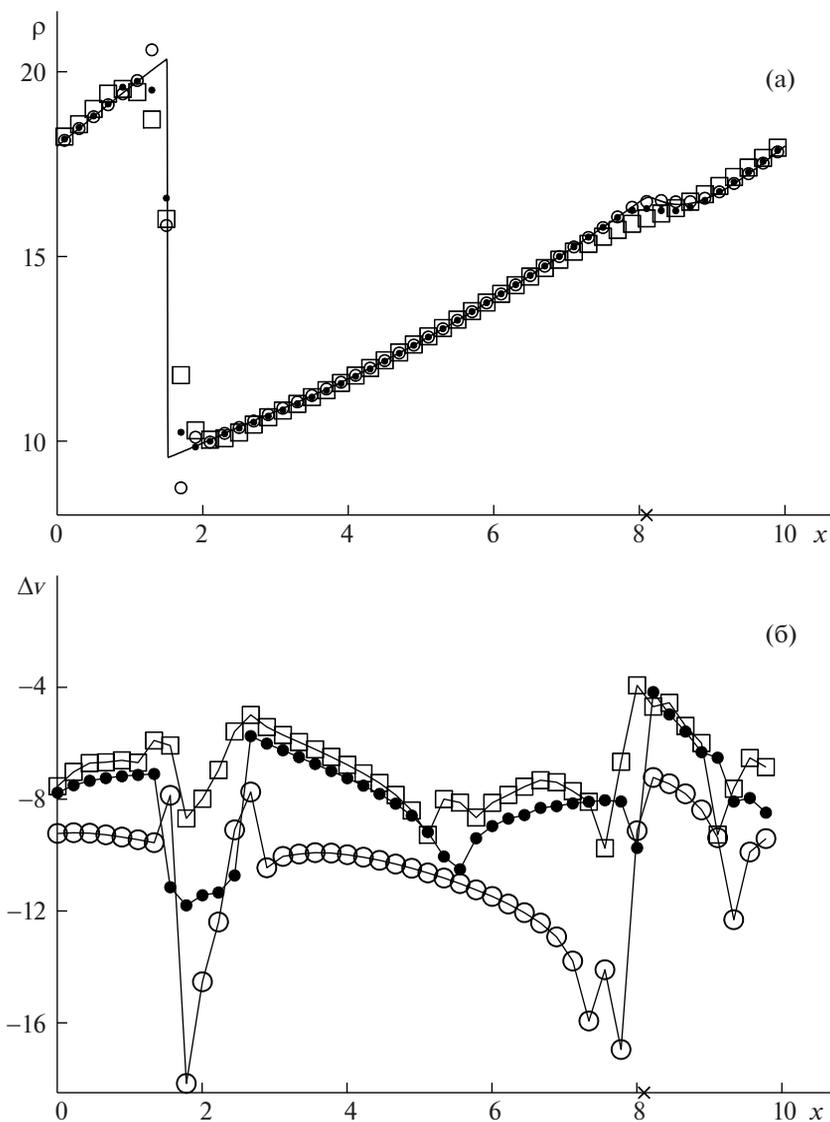
$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad w_3 = u + \frac{2c}{\gamma - 1} \quad (14)$$

имеют следующие начальные значения

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) &= -10, & s(x, 0) &= 0, \\ w_3(x, 0) &= 2 \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим. Отметим, что с учетом формул (15) задача PCPG аналогична задаче PCPW, которая изучалась в [14, 16–21].

7. В точном решении задачи PCPG в момент времени  $t_* \approx 1.35$  формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси  $x$ . На рис. 1а, 2а, 3а и 4а в моменты времени  $t = 1, 2.5, 3.5, 5$ , сплошными линиями изображены квазиточные профили плотности, получаемые при расчете по схеме DG1A1 на мелкой сетке (3), в которой  $h = 1/1215$ . К моменту времени  $t = 1$  в точ-



**Рис. 3.** Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени  $t = 3.5$  при численном решении задачи PCPG.

ном решении начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким (рис. 1а). В момент времени  $t = 2.5$  ударные волны уже сформировались, но их области влияния еще не заполняют всю расчетную область (рис. 2а). К моменту времени  $t = 3.5$  ударные волны проходят расстояние, большее длины периода  $X = 10$ , и вся расчетная область становится их областью влияния. С учетом этого сильные разрывы, расположенные на линиях, приведенных на рис. 3а и 4а, соответствуют ударной волне, которая сформировалась в момент времени  $t_*$  внутри интервала  $[-X, 0]$ .

На рис. 1–4 приведены результаты расчетов задачи PCPG по схемам DG1 (кружки), DG1A1

(квадратики) и DG1A2 (точки) на равномерной сетке (3). На верхних рисунках с индексом (а) показаны значения плотности газа, получаемые при расчете, в котором  $h = 0.2$ . Из этих рисунков видно, что, в отличие от NFC схем DG1A1 и DG1A2, HASIA схема DG1 имеет заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн. На нижних рисунках с индексом (б) приведены относительные локальные дисбалансы (9), получаемые при расчете на базисной сетке (3), где  $h = 1/135$ . Значения этих дисбалансов показаны для каждого 30-го полуцелого пространственного узла разностной сетки.

Из рис. 1б и 2б следует, что вне областей влияния ударных волн схема DG1A1 имеет существенно более низкую точность, чем схемы DG1 и

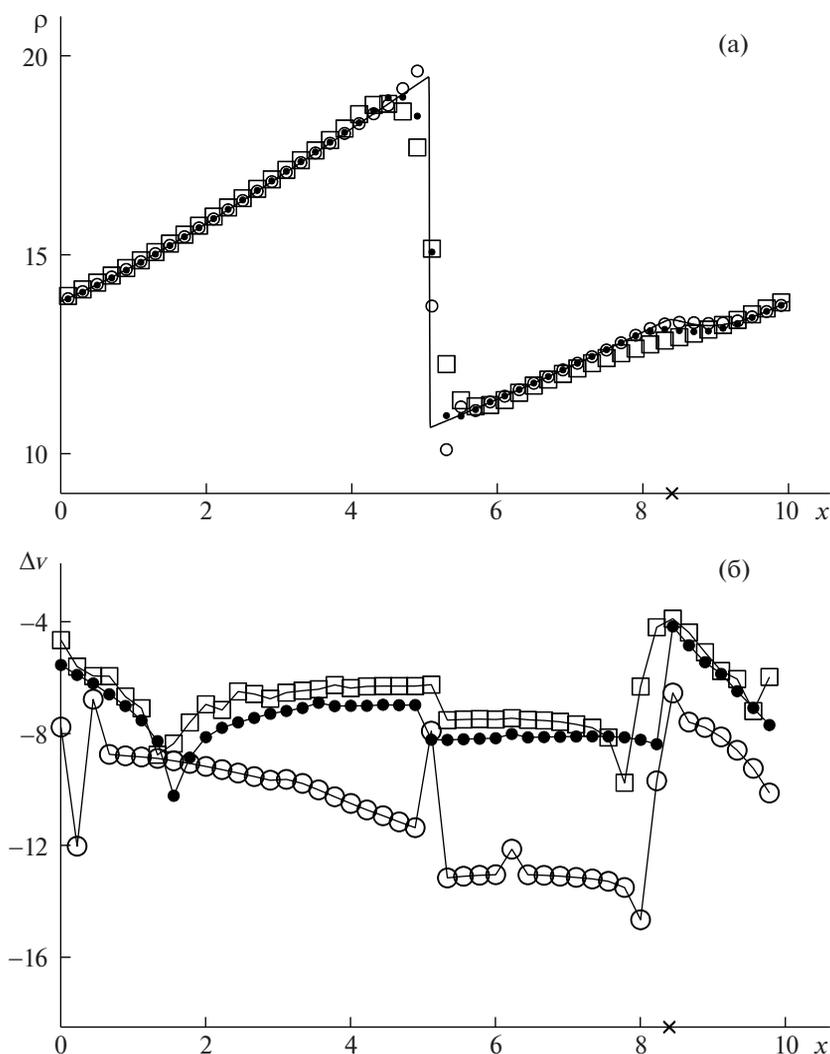


Рис. 4. Плотность газа (а) и относительные локальные дисбалансы (б), получаемые в момент времени  $t = 5$  при численном решении задачи PCPG.

DG1A2, точность которых в некоторых частях этих областей приблизительно одинаковая. Внутри областей влияния ударных волн точность схемы DG1A2 резко падает (рис. 2б, 3б и 4б), становится сравнимой с точностью схемы DG1A1 и существенно более низкой, чем точность схемы DG1. С течением времени преимущество в точности HASIA схемы DG1 по сравнению с NFC схемами DG1A1 и DG1A2 заметно возрастает, достигая к моменту времени  $t = 5$  (рис. 4б) почти пяти порядков на интервале (5, 8) в области гладкости точного решения. В результате газодинамическая комбинированная схема CDG при расчете задачи PCPG монотонно (без заметных нефизических осцилляций) локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях их влияния. При

этом необходимо отметить, что точность всех схем (включая схему CDG) резко падает не только в окрестности фронта ударной волны, но и в окрестности слабого контактного разрыва, положение которого на рис. 2–4 отмечено крестиком на оси  $x$ .

Численные расчеты задачи PCPG так же показали, что схема DG1 (также как схемы DG1A1 и DG1A2) имеет лишь первый порядок NINSID сходимости, в чем заключается принципиальное отличие от аналогичной задачи PCPW, при расчете которой схема DG1 (в отличие от схем DG1A1 и DG1A2) сохраняет второй порядок NINSID сходимости [19]. Несмотря на это в областях влияния ударных волн преимущество в точности схемы DG1 по сравнению со схемами DG1A1 и DG1A2 при переходе от задачи PCPW к задаче

PCPG не уменьшается (что можно было ожидать), а возрастает. При расчете задачи PCPW это преимущество составляет приблизительно три порядка, а при расчете задачи PCPG оно в некоторых подобластях возрастает до пяти порядков. В дальнейшем данные численные результаты требуют детального теоретического обоснования.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00060 (разделы 1–4) и проект № 21-11-00198 (разделы 5–7).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
4. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
5. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection – dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
6. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
7. Karni S., Kurganov A., Petrova, G. A smoothness indicator for adaptive algorithms for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2002. V. 178. P. 323–341.
8. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. V. 16. № 3. P. 173–261.
10. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
11. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
12. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Изд. МГУ, 2013.
13. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. P. 701–762.
14. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
15. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. Stoker J.J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications, Wiley-Interscience, 1957.
16. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
17. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
18. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.
19. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
20. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О точности схем типа MUSCL при расчете ударных волн // Докл. РАН. Матем., информ., процессы управл. 2020. Т. 492. С. 43–48.
21. Брагин М.Д., Rogov B.V. О точности бикомпактных схем при расчете нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 5. С. 884–899.
22. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
23. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
24. Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А. Комбинированные численные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1763–1803.
25. Lax P., Wendroff B. Systems of conservation laws // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 217–237. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130205>

## ON THE ACCURACY OF DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD CALCULATING GAS-DYNAMIC SHOCK WAVES

**M. E. Ladonkina<sup>a,b</sup>, O. A. Nekliudova<sup>a,b</sup>, V. V. Ostapenko<sup>b</sup>,  
and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>b</sup> *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

The results of a numerical calculation of gas-dynamic shock waves that arise when solving the Cauchy problem with smooth periodic initial data are presented using three variants of the DG (Discontinuous Galerkin) method, in which the solution is sought in the form of a piecewise linear discontinuous function. It is shown that the methods DG1A1 and DG1A2, for which the Cockburn limiter with parameters  $A1 = 1$  and  $A2 = 2$  are used for monotization, have approximately the same accuracy in the influence areas of shocks (arising as a result of gradient catastrophes within the computational domain), while the nonmonotonic DG1 method, in which this limiter is not used, has a significantly higher accuracy in these areas, despite noticeable non-physical oscillations on shocks. With this in mind, the combined scheme obtained by the joint application of the DG1 and DG1A1 methods monotonously localizes the shocks and maintains increased accuracy in the areas of their influence.

*Keywords:* gas dynamic equations, shock waves, discontinuous Galerkin method

УДК 519.63

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА В ТРИАНГУЛЯЦИИ

© 2023 г. Ю. А. Криксин<sup>1,\*</sup>, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин<sup>1,\*\*</sup>

Поступило 14.02.2023 г.  
После доработки 19.04.2023 г.  
Принято к публикации 20.04.2023 г.

Предложена количественная оценка качества треугольного элемента – индекс вырождения треугольника. Для применения данной оценки строится простейшая модельная триангуляция, в которой координаты узлов формируются как сумма соответствующих координат узлов некоторой заданной регулярной сетки и случайных приращений к ним. Для различных значений параметров вычисляется эмпирическая функция распределения индекса вырождения треугольного элемента, которая рассматривается как количественная характеристика качества треугольных элементов в построенной триангуляции.

*Ключевые слова:* регулярная сетка, случайный вектор, триангуляция, индекс вырождения, эмпирическая функция распределения

**DOI:** 10.31857/S2686954323600088, **EDN:** XHXMGF

1. Триангуляция используется для многих целей, включая геодезию, навигацию, метрологию, астрометрию, бинокулярное зрение и т.д. В геометрии триангуляция рассматривается как разбиение некоторой геометрической области  $n$ -мерного евклидова пространства на  $n$ -мерные симплексы. В настоящей работе рассматривается классическая триангуляция на плоскости. Одним из широко используемых методов является триангуляция Делоне, задача построения которой была впервые поставлена в 1934 г. в работе [1]. В вычислительном аспекте необходимость триангуляции обусловлена потребностью решения многих задач вычислительной математики и математической физики, сводящихся к решению дифференциальных уравнений в частных производных в нерегулярных областях и на нерегулярных сетках [2]. В частности, отметим разрывный метод Галеркина [3], для которого благодаря его универсальности и применимости к сложным геометрическим областям задача построения триангуляции является весьма актуальной. К настоящему времени в отечественных и зарубежных журналах и изданиях опубликовано большое число статей и монографий, посвященных методам построения триангуляций, включающих различные аспекты

[4–11]. Обратим внимание, что точность вычислений может в значительной мере зависеть от того, насколько близки к вырождению присутствующие в триангуляции треугольные элементы. Поэтому помимо триангуляции, использующей заданные узлы [7–11], представляется актуальным построение некоторой модельной триангуляции с контролируемым качеством треугольных элементов, предназначенной для тестирования алгоритмов решения различных задач. В последнем случае узлы триангуляции могут не задаваться априори, а генерироваться по мере необходимости. Для генерации треугольных элементов заданного качества, например, имеющих углы в определенном диапазоне значений, может оказаться полезным вычисление некоторого скалярного показателя, характеризующего рассматриваемый элемент. В связи с этим в настоящей работе предлагается количественная оценка качества треугольного элемента – индекс вырождения треугольника. В процессе модельной триангуляции этот количественный показатель может быть использован таким образом, чтобы генерируемые треугольные элементы имели значение индекса вырождения не более некоторой заданной величины.

2. Для треугольника с углами  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta < \pi$ ) рассмотрим функцию

$$G(\alpha, \beta) = 2SP^{-2} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{[\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)]^2}, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: krikxin@imamod.ru

\*\*E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

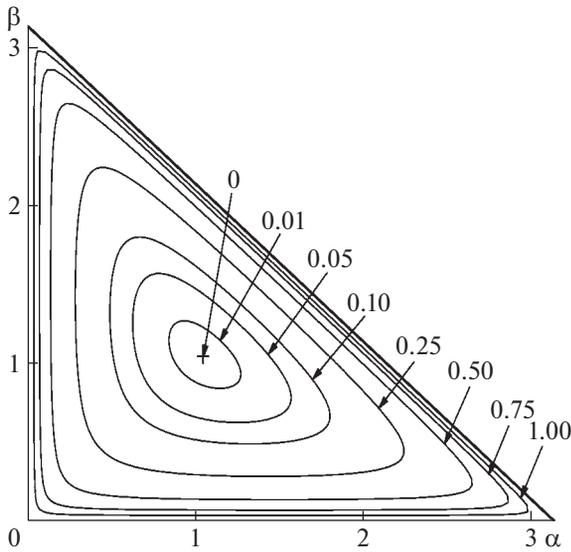


Рис. 1. Линии уровня  $I(\alpha, \beta) = c$ , где  $c = 0, 0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ .

где  $S$  и  $P$  – площадь и периметр этого треугольника соответственно. Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$G(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{4} \min[\sin \alpha, \sin \beta, \sin(\alpha + \beta)] \quad (2)$$

и асимптотического неравенства при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\frac{1}{8} \alpha + O(\alpha^4) \leq G(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{4} \alpha + O(\alpha^3). \quad (3)$$

Следовательно, согласно неравенству (3) значение функции  $G(\alpha, \beta)$ , когда угол  $\alpha$  предполагается достаточно малым и наименьшим в треугольнике, является оценкой порядка малости этого наименьшего угла.

В области определения ( $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < \pi$ ) функция (1) является строго выпуклой вверх и достигает своего единственного максимума, равного  $\sqrt{3}/18$ , в точке  $\alpha = \pi/3, \beta = \pi/3$ . Таким образом, наибольшее значение функции (1) реализуется в случае правильного треугольника. Отмеченные выше свойства функции  $G(\alpha, \beta)$  позволяют ввести на ее основе характеристику вырожденности рассматриваемого треугольника

$$I(\alpha, \beta) = -\lg[6\sqrt{3}G(\alpha, \beta)], \quad (4)$$

которую назовем индексом вырождения треугольника с углами  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Замечание 1.* Выбор основания логарифма 10 в (4) обусловлен тем удобством интерпретации, что при таком выборе значение индекса вырождения характеризует порядок малости по крайней мере одного угла треугольника. Например, значение индекса (4), равное 2, означает, что в рассматри-

ваемом треугольнике есть острый угол с величиной порядка  $10^{-2}$  радиан.

*Замечание 2.* Вместо функции (1) можно было бы выбрать другую функцию, например,

$$\tilde{G}(\alpha, \beta) = r(2R)^{-1} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}, \quad (5)$$

где  $r$  и  $R$  есть радиусы вписанной и описанной окружности соответственно для рассматриваемого треугольника. Область определения функции (5) совпадает с областью определения функции (1). Хотя функция (5) также достигает максимума в той же самой точке  $\alpha = \pi/3, \beta = \pi/3$ , что и функция (1), она не сохраняет направление выпуклости в своей области определения. Поэтому топология линий уровня функций (1) и (4) является более простой по сравнению с функцией (5).

*Замечание 3.* В качестве естественной меры вырождения треугольной ячейки можно было бы рассмотреть число обусловленности  $cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ , где  $\|A\|$  – спектральная норма матрицы  $A$  перехода от локальных координат, связанных с треугольным элементом, к декартовым координатам. Однако выбор локального базиса в треугольной ячейке может быть выполнен тремя способами, что приводит к трем, вообще говоря, различным значениям этого числа. Разумеется, можно выбрать минимальное значение из трех для такой меры, но данная мера неудобна в использовании из-за недостаточной гладкости и своих экстремальных свойств. Тем не менее для малых углов  $\alpha$   $[cond(A)]^{-1}$  имеет первый порядок малости по  $\alpha$ , что согласуется с неравенством (3). Таким образом, меры вырождения, основанные на выражении (1) и обратной величине к числу обусловленности, характеризуются тем же самым порядком малости при  $\alpha \rightarrow 0$  и в этом смысле эквивалентны.

Согласно выражению (4) правильный треугольник среди всех треугольников является наименее вырожденным (что соответствует интуитивным представлениям) и имеет минимальный индекс вырождения, равный нулю. В частности, достаточно малые значения индекса вырождения гарантируют отсутствие в рассматриваемом треугольнике малых и тупых углов (см. рис. 1).

Так, неравенство  $I(\alpha, \beta) \leq 0.0498$  обеспечивает принадлежность любого из углов треугольника интервалу  $(\pi/5, \pi/2)$ , т.е. все такие треугольники являются остроугольными. Как это видно из рис. 1, на котором изображены линии уровня индекса вырождения (4) треугольника  $I(\alpha, \beta) = c$ , с увеличением значений  $c$  соответствующая линия уровня стремится приблизиться изнутри к границе треугольника, задаваемого неравенствами  $\alpha > 0, \beta > 0$  и  $\alpha + \beta < \pi$ .

Следовательно, соблюдение в алгоритмах триангуляции условия не превышения заданного верхнего порога  $\varepsilon$  индекса вырождения обеспечит требуемое качество генерируемых треугольных элементов.

3. В тех случаях, когда необходимо протестировать какой-либо численный метод, предполагающий его применение в триангулированной области, естественно воспользоваться некоторым экономичным способом триангуляции, в котором контролируется качество производимых треугольников. С этой целью удобно воспользоваться регулярной сеткой на плоскости вида

$$\mathbf{r}_{mn} = (x_{mn}, y_n) : \begin{cases} x_{mn} = h(2m + n) \cos \varphi, \\ y_n = h n \sin \varphi \end{cases} \quad (m, n \in Z), \quad (6)$$

где  $h > 0$  – шаг сетки,  $\varphi \in (0, \pi/2)$  – угловой параметр,  $Z$  – множество целых чисел.

Соединяя точки сетки (6), находящиеся на расстоянии  $h$  или  $2h \cos \varphi$  друг от друга, отрезками прямых, получаем некоторую триангуляцию, состоящую из равнобедренных треугольников с боковыми сторонами  $h$ , основанием  $2h \cos \varphi$  и углом  $\varphi$  между боковой стороной и основанием (см. рис. 2а). Точки, соединенные отрезками, назовем соседними точками. Далее, в положения узлов исходной сетки (6) внесем сдвиги и получим новую возмущенную, вообще говоря, нерегулярную сетку с узлами

$$\tilde{\mathbf{r}}_{mn} = (x_{mn} + \xi_{mn}, y_n + \eta_{mn}) : \xi_{mn}^2 + \eta_{mn}^2 \leq \varepsilon^2 h^2. \quad (7)$$

Сохраним в новой сетке (7) отношения соседства в том смысле, что если точки  $\mathbf{r}_{mn}$  и  $\mathbf{r}_{ij}$  являются соседями, то новые точки  $\tilde{\mathbf{r}}_{mn}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$  также будут соседями, т.е. они по-прежнему считаются соединенными между собой отрезком прямой (см. рис. 2б). Нетрудно проверить, что при

$$0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2} \min(\sin \varphi, \sin 2\varphi) \quad (8)$$

построенные выше отрезки не будут иметь общих внутренних точек друг с другом и в совокупности образуют новую триангуляцию, состоящую, вообще говоря, из неправильных и не равных друг другу треугольников. Отметим, что максимально возможное значение правой части двойного неравенства (8) достигается при  $\varphi = \pi/3$  и составляет  $\sqrt{3}/4$ . Триангуляцию, полученную на основе сетки (7), естественно назвать унаследованной от триангуляции порожденной сеткой (6) при указанном выше выборе соседних точек. В случае нарушения первого неравенства (8) возможно возникновение у различных отрезков общих внутренних точек, что, вообще говоря, допускает появление вырожденных треугольников.

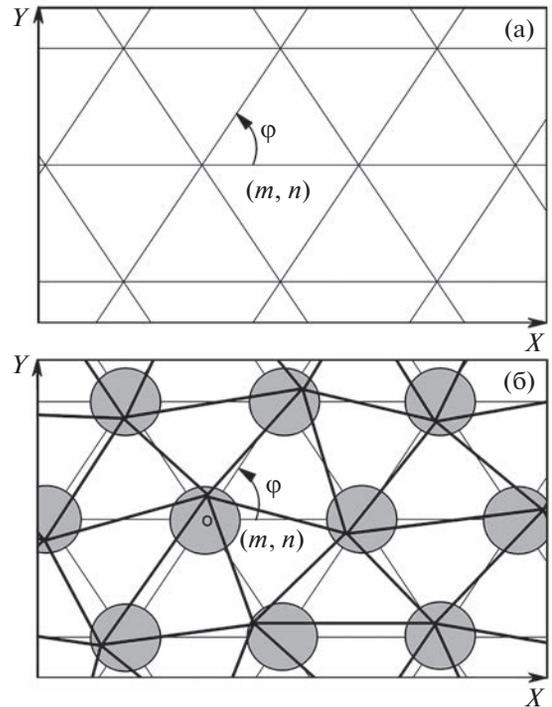


Рис. 2. Регулярная и нерегулярная триангуляции: (а) триангуляция, порождаемая регулярной сеткой (6); (б) триангуляция, порождаемая сеткой (7) (узел, соответствующий паре индексов  $m$  и  $n$ , помечен кружком). Треугольные элементы сетки (7) очерчены жирными линиями. Тонкие линии соединяют соседей сетки (6).

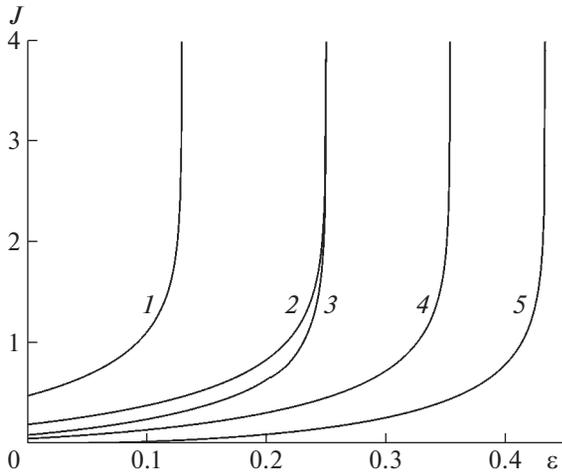
Рассмотрим максимальное значение индекса вырождения треугольного элемента в унаследованной триангуляции

$$J(\varepsilon, \varphi) = \max I(\alpha, \beta), \quad (9)$$

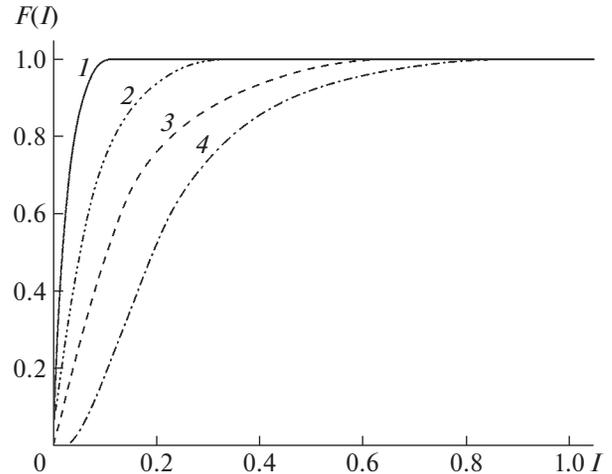
где максимум определяется на множестве всевозможных положений вершин рассматриваемого треугольника, определяемых правым неравенством (7). Очевидно, что величина (9) соответствует случаю максимально вырожденного треугольника в смысле критерия (4), допускаемого унаследованной триангуляцией. На рис. 3 показаны зависимости максимального индекса вырождения (9) от  $\varepsilon$  для различных значений углового параметра  $\varphi$  в (6). Каждая из представленных зависимостей определена в полуоткрытом интервале (8) и имеет вертикальную асимптоту

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(\sin \varphi, \sin 2\varphi). \quad (10)$$

Обратим внимание, что для значений  $\varphi = \pi/6$  и  $\varphi = 5\pi/12$  (кривые 2 и 3 соответственно) вертикальные асимптоты совпадают и имеют уравнение  $\varepsilon = 1/4$ . Кривая 2 лежит выше кривой 3, что свидетельствует о большей вырожденности соответствующего треугольного элемента в случае



**Рис. 3.** Максимальный индекс вырождения (9) как функция параметра  $\epsilon$  для фиксированных значений  $\varphi$ : 1 –  $\varphi = \pi/12$ ; 2 –  $\varphi = \pi/6$ ; 3 –  $\varphi = 5\pi/12$ ; 4 –  $\varphi = \pi/4$ ; 5 –  $\varphi = \pi/3$ .



**Рис. 4.** Эмпирические функции распределения (11) при  $\epsilon = 0.2$  и различных значениях углового параметра  $\varphi$ : 1 –  $\varphi = \pi/3$ ; 2 –  $\varphi = \pi/4$ ; 3 –  $\varphi = 5\pi/12$ ; 4 –  $\varphi = \pi/6$ .

$\varphi = \pi/6$  по сравнению со случаем  $\varphi = 5\pi/12$ . Отметим, что наименее вырожденными при одном и том же значении  $\epsilon$  являются треугольные элементы при  $\varphi = \pi/3$ , когда исходная триангуляция, порождаяемая сеткой (6), состоит из правильных треугольников.

4. Для оценки качества триангуляции, основанной на применении индекса вырождения (4), построим эмпирическую функцию распределения  $F(I)$  значений (4) на треугольных элементах уже существующей триангуляции, сформированной тем или иным способом. Пусть некоторая триангуляция всего содержит  $N$  треугольников,  $N_I$  из которых имеют значение индекса (4), меньшее  $I$ . Тогда

$$F(I) = N^{-1}N_I. \tag{11}$$

Для иллюстрации предлагаемого подхода воспользуемся сеткой (7), выбрав значения параметров в (6) и (7) равными

$$h = 0.001, \quad \epsilon = 0.2, \quad \varphi = \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12. \tag{12}$$

Сдвиги в (7)  $\Delta \mathbf{r}_{mn} = (\xi_{mn}, \eta_{mn})$  будем считать случайными векторами, равномерно распределенными в круге, определяемом правым неравенством (7). Формирование соответствующей псевдослучайной последовательности координат  $(\xi_{mn}, \eta_{mn})$  осуществляется методом, описанным в монографии [12], позволяющим генерировать псевдослучайные числа с произвольным распределением. Для вычисления эмпирической функции распределения  $F(I)$  ограничимся рассмотрением только тех узлов сетки (7), которые располагаются в единичном круге  $(x_{mn} + \xi_{mn})^2 + (y_n + \eta_{mn})^2 \leq 1$ . Указан-

ный круг содержит  $N$  треугольных элементов, где  $N > 6 \times 10^6$  для любой триангуляции, порожденной сетками (6) и (7) описанным выше способом со значениями параметров (12). Шаг дискретизации по  $I$  составляет  $\Delta I = 0.01$ . Результат вычисления представлен на рис. 4.

Наименее вырожденными являются треугольники для значения углового параметра  $\varphi = \pi/3$ . Соответствующая функция распределения имеет наиболее крутой фронт по сравнению со всеми другими представленными функциями. Второе место по качеству треугольников занимает триангуляция, отвечающая значению  $\varphi = \pi/4$ . Третье место соответствует случаю  $\varphi = 5\pi/12$ . И, наконец, последнее четвертое место относится к значению  $\varphi = \pi/6$ , что вполне понятно, так как соответствующие треугольные элементы являются преимущественно тупоугольными.

В заключение подчеркнем, что для любой иной триангуляции эмпирическая функция распределения (11) может быть легко построена, если известны узлы триангуляции. Таким образом, качество произвольной триангуляции допускает количественную оценку на основе индекса вырождения (4) с помощью вычисления соответствующей эмпирической функции распределения (11).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ

имени М.В. Ломоносова. Авторы также благодарят центр информационных технологий Гронингенского университета (Нидерланды) за предоставленную возможность проведения расчетов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Делоне Б.Н.* О пустоте сферы // Изв. АН СССР. ОМОН. 1934. № 4. С. 793–800.
2. *Gallagher R.H.* Finite Element Analysis: Fundamentals. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1976. 396 с.
3. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin methods. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio: Springer-Verlag, 1984. 309 с.
4. *Preparata F.P., Shamos M.I.* Computational Geometry: An introduction. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio: Springer-Verlag, 1985. 400 с.
5. *Edelsbrunner H., Seidel R.* Voronoi diagrams and arrangements // Discrete and Computational Geometry. 1986. V. 8. № 1. С. 25–44.  
<https://doi.org/10.1007/BF02187681>
6. *Lee D.T., Lin A.K.* Generalized Delaunay triangulation for planar graphs // Discrete and Computational Geometry. 1986. № 1. С. 201–217.  
<https://doi.org/10.1007/BF02187695>
7. *Paul Chew L.* Constrained Delaunay triangulations // Algorithmica. 1989. V. 4. № 1. С. 97–108.  
<https://doi.org/10.1007/BF01553881>
8. *Скворцов А.В., Мирза Н.С.* Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск: Изд-во Томского университета, 2006. 167 с.
9. *Pournin L., Liebling Th.M.* Constrained paths in the flip-graph of regular triangulations // Computational Geometry. 2007. V. 37. С. 134–140.  
<https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2006.07.001>
10. *Hjelle Ø., Dæhlen M.* Triangulations and Applications. Berlin: Heidelberg: Springer, 2006. 240 с.
11. *De Loera J.A., Rambau J., Santos F.* Triangulations: Structures for Algorithms and Applications (Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 25) 1st Edition. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, 548 с.
12. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. Москва: Наука, 1973. 312 с.

## ON ONE APPROACH TO THE ASSESSMENT OF A TRIANGULAR ELEMENT DEGENERATION IN A TRIANGULATION

**Yu. A. Kriksin<sup>a</sup> and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

A quantitative estimate of a triangular element quality is proposed - the triangle degeneration index. To apply this estimate, the simplest model triangulation is constructed, in which the coordinates of the nodes are formed as the sum of the corresponding coordinates of the nodes of some given regular grid and random increments to them. For different values of the parameters, the empirical distribution function of the triangle degeneration index is calculated, which is considered as a quantitative characteristic of the quality of triangular elements in the constructed triangulation.

*Keywords:* regular grid, random vector, triangulation, degeneracy index, empirical distribution function