



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 517, 2024

МАТЕМАТИКА

Методы искусственного интеллекта
в управлении персонализированным общим образованием

А. Л. Семенов, А. Е. Абылкасымова, Т. А. Рудченко 5

Интерполяционная формула Бернштейна–Римана
для произвольных непрерывных функций на отрезке

А. Н. Агаджанов 12

О количественной оценке хиральности: правосторонние и левосторонние
геометрические объекты

Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин 22

Применение формулы А. Г. Постникова в полях алгебраических чисел

Х. Аль-Ассад 30

Матрица Вандермонда в коммутативном случае

А. И. Перов, И. Д. Коструб 33

Сублоренцева геометрия на распределении Мартине

Ю. Л. Сачков 38

Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье

Ю. А. Басалов, Н. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков 41

Асимптотики собственных значений оператора Шрёдингера
с малым сдвигом и условием Дирихле

Д. И. Борисов, Д. М. Поляков 44

Противопоточные бикompактные схемы для гиперболических законов сохранения

М. Д. Брагин 50

Математическая модель термотоксов на основе расчета электрического сопротивления
и термоЭДС через интеграл по энергии электронов

Г. Г. Лазарева, В. А. Попов, В. А. Окишев, А. В. Бурдаков 57

Конденсация графов для больших факторных моделей

Б. Н. Четверушкин, В. А. Судаков, Ю. П. Титов 66

Нули конических функций, неподвижные точки и совпадения

Т. Н. Фоменко 74

Математическое моделирование нестационарных задач лазерной термохимии метана в присутствии каталитических наночастиц <i>Е. Е. Пескова</i>	79
Представления решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах <i>Н. А. Раутиан</i>	85
Об элементарной теории пополнения разрешимой группы Баумслага—Солитера <i>Н. С. Романовский</i>	92
О существовании и оценках обратных функций в вырожденном случае <i>А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский</i>	96
Об устойчивости решений логистического уравнения с запаздыванием, диффузией и неклассическими граничными условиями <i>И. С. Кащенко, С. А. Кащенко, И. Н. Масленников</i>	101
Обобщение теоремы Якоби о последнем множителе <i>Е. И. Кугушев, Т. В. Сальникова</i>	109
О построении искусственной нейронной сети для решения системы уравнений Навье—Стокса в случае несжимаемой жидкости <i>В. Б. Бетелин, В. А. Галкин</i>	115
Способы наблюдения за движущимся в $\mathbb{R}^3$ объектом в условиях его противодействия <i>В. И. Бердышев</i>	120

CONTENTS

Volume 517, 2024

MATHEMATICS

AI Methods in Control of Personalized General Education <i>A. L. Semenov, A. E. Abylkassymova, T. A. Rudchenko</i>	5
Bernstein–Riemann Interpolation Formula for Arbitrary Continuous Functions on a Segment <i>A. N. Agadzhanov</i>	12
On Quantitative Assessment of Chirality: Right-Sided And Left-Sided Geometric Objects <i>Yu. A. Kriksin, V. F. Tishkin</i>	22
Applying A. G. Postnikov's Formula in Algebraic Number Fields <i>H. Al-Assad</i>	30
The Vandermonde Matrix in the Commutative Case <i>A. I. Perov, I. D. Kostrub</i>	33
Sub-Lorentzian Geometry on the Martinet Distribution <i>Yu. L. Sachkov</i>	38
Multidimensional Fourier Interpolation and Fast Fourier Transforms <i>Yu. A. Basalov, N. N. Dobrovolsky, V. N. Chubarikov</i>	41
Asymptotics for Eigenvalues of Schrödinger Operator with Small Shift and Dirichlet Condition <i>D. I. Borisov, D. M. Polyakov</i>	44
Upwind Bicomact Schemes for Hyperbolic Conservation Laws <i>M. D. Bragin</i>	50
Mathematical Model of Thermocurrents Based on Calculation of Electrical Resistance and Thermopower as an Integral over Electron Energy <i>G. G. Lazareva, V. A. Popov, V. A. Okishev, A. V. Burdakov</i>	57
Graph Condensation for Large Factor Models <i>B. N. Chetverushkin, V. A. Sudakov, Yu. P. Titov</i>	66
Zeros of Conic Functions, Fixed Points and Coincidences <i>T. N. Fomenko</i>	74
Mathematical Modeling of Nonstationary Problems of Methane's Laser Thermochemistry in the Presence of Catalytic Nanoparticles <i>E. E. Peskova</i>	79

Representations of the Solutions for Volterra Integro-Differential Equations in Hilbert Spaces <i>N. A. Rautian</i>	85
On Elementary Theory of Completion of Solvable Baumslag–Solitar Group <i>N. S. Romanovskiy</i>	92
On the Existence and Estimates of Inverse Functions in the Degenerate Case <i>A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovsky</i>	96
Stability of Solutions to the Logistic Equation with Delay, Diffusion and Nonclassical Boundary Conditions <i>I. S. Kashchenko, S. A. Kashchenko, I. N. Maslenikov</i>	101
Generalization of Jacobi's Theorem on the Last Multiplier <i>E. I. Kugushev, T. V. Salnikova</i>	109
On the Construction of an Artificial Neural Network for Solving a System of Equations Navier–Stokes in the Case of Incompressible Fluid <i>V. B. Betelin, V. A. Galkin</i>	115
Methods for Observing an Object Moving in $\mathbb{R}^3$ under Conditions of its Opposition <i>V. I. Berdyshev</i>	120

УДК 372.851

МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В УПРАВЛЕНИИ ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННЫМ ОБЩИМ ОБРАЗОВАНИЕМ

© 2024 г. Академик РАН А. Л. Семенов^{1, 2, 3, *}, А. Е. Абылкасымова^{4, **}, Т. А. Рудченко^{5, ***}

Получено 20.06.2024 г.
После доработки 24.06.2024 г.
Принято к публикации 24.06.2024 г.

В работе предлагается новый подход к управлению процессом общего образования. Средства цифровых технологий используются для формирования пространств целей, задач и учебных действий, записи образовательного процесса каждого учащегося. Инструменты искусственного интеллекта применяются при выборе персональных целей учащегося и путей их достижения, для прогнозирования и рекомендаций участникам образовательного процесса. Используются большие данные всей системы образования и большие лингвистические модели. Эффекты подхода включают обеспечение успешности каждого учащегося, объективной оценки работы учителей и школ, адекватность процесса перехода к высшему образованию.

Ключевые слова: управление образованием, персонализированное обучение, большие данные в образовании, LLM

DOI: 10.31857/S2686954324030011, **EDN:** YBZKGG

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы предлагаем новую **Парадигму управления общеобразовательным процессом**. Эта Парадигма включает:

- персональное адаптивное целеполагание с участием учащегося, родителей (заказчиков образования), учителей, администрации;
- деятельностное представление содержания образования;

- персонализированное планирование учебных действий;
- погружение образовательного процесса в цифровую среду деятельности и взаимодействия;
- накопление Большой образовательной истории учащегося, учителя, класса, школы, системы образования (например, страны);
- обеспечиваемые ИИ прогнозы по целям и ресурсам и рекомендации по целям, их адаптации и действиям на основе Большой образовательной истории с учетом индивидуальных ограничений по ресурсам и действиям;
- критерии успеха и эффективности системы образования по отношению к персональным целям, ресурсам и рекомендациям.

Фактические образовательные истории отдельных людей, включая их взаимодействие с системой образования, образуют коллективный «образовательный опыт», на базе которого может работать система предсказания и рекомендации.

Строящаяся информационная система в большой степени нейтральна по отношению к философии образования, способна учитывать ограничения в организации образовательного процесса и применима в разных образовательных системах.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт образования НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия

³ Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского, Казань, Россия

⁴ Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Республика Казахстан

⁵ Институт кибернетики и образовательной информатики имени А.И. Берга ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*E-mail: alsemno@ya.ru

**E-mail: aabylkassymova@mail.ru

***E-mail: rudchenko@gmail.com

Подчеркнем, что субъектом управления образовательным процессом по-прежнему является человек. Предсказания и рекомендации будут использоваться людьми в той степени, в которой люди с ними согласны, учитывать заданные человеком ограничения, не иметь какого-то нормативного статуса. Конечно, ясно, что представляя ИИ некоторую роль в НАШЕМ процессе принятия решений, мы оказываемся зависимыми от прогнозов и рекомендаций, получаемых от ИИ. Но такова ситуация с ИИ во все более расширяющейся сфере в жизни современного общества, достаточно упомянуть медицину.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА И ПРЕДШЕСТВУЮЩИЕ ПОДХОДЫ

Система общего образования выполняет две функции:

1. Обеспечение условий, в которых происходит физиологическое, психологическое и социальное взросление человека; эти условия, очевидно, предполагают well-being учащегося во время обучения в этих трех аспектах.

2. Обеспечение образовательных результатов, прежде всего интеллектуальных, а также волевых, моральных, установочных и др. предназначенных для использования (в любом понимании слова “использование”) в будущей и текущей жизни человека.

В образовании идет, время от времени, обостряясь, дискуссия о структуре образовательных результатов: о соотношении традиционно понимаемых знаний, умений, навыков, ценностей и установок с компетентностями — способностями применять эти традиционные результаты. Одним из основателей компетентностного подхода является Spady — автор концепции Outcomes-Based Education [1, 2]. В настоящей работе мы почти на касаемся проблемы данного важного соотношения, как мы уже подчеркнули выше, предлагаемая Парадигма может использоваться в самых разных ситуациях.

Для нас, однако, важен еще один ключевой вопрос системы образования, прежде всего — общего образования. Следуя Коменскому, система общего образования, в отличие от системы профессионального образования “učit všechny všemu všestranně” — “научить всех всему универсально” [3]. В расшифровке этого принципа мы выделяем две части.

Одна из них — это достижение для каждого человека, пришедшего в систему общего обра-

зования некоторых **минимальных** результатов, скажем, для начальной школы — это 3R’s — Reading, Writing, aRithmetics. Конкретизация этой части в сегодняшнем мире не является очевидной [4, 5, 6]. Дело в том, что человек сегодня постоянно использует свое технологическое расширение — мобильный телефон с выходом в интернет, калькулятором, системой распознавания устной речи и озвучивания письменной. Использует в большей степени, чем когда-то записную книжку с ручкой, библиотеку и карту. Возникает вопрос о современном понимании результатов обучения такой расширенной личности — считаем ли мы, что человек, в том числе — школьник, умеет читать, писать и считать, если он при этом использует указанные технические средства. Но обсуждение этого вопроса, несмотря на его важность, также выходит за рамки настоящей работы?

Вторая часть расшифровки положения “научить всех всему универсально” состоит в том, что система образования предъявляет обществу “идеальный образ выпускника”, который этому “всему” научился, и учащегося, который этому учится. Это — образы традиционного для советской школы “золотого медалиста” или отличника. Современная школа явно отходит от этого образа. Наглядный пример — A-level — British system и ее реализация в разных странах, например, в Сингапуре, выделение предметов с углубленным изучением в современной российской школе и в Международном бакалавриате, Advanced Placement in the USA и т.д. Тем самым возникает персонализированная система целей для старшей школы — по существу начала профессионального образования.

Однако, даже зафиксировав персональную систему целей в школьных предметах, мы оставляем не решенными ряд проблем.

Во-первых, сведение целей только к получению отметок по школьным предметам — недостаточно. В частности, на до-профессиональном (допрофильном) уровне остается проблема ущербности для ученика, который не получает высшего балла по всем предметам, академически недостаточно успешного. Результаты конкретного ученика оцениваются путем **вычитания** из идеального “отличного” результата, предъявления учащемуся его несовершенства, “снижения отметки за...”. Это приводит к:

- психологическому состоянию неудачи, в лучшем случае игнорированию школьной оценки учеником, ощущению неадекватности роди-

телями, для хорошего учителя — и к его ощущению неудачи;

- стремлению ученика достичь манифестации результата — отметки любым, в том числе и нечестным путем.

Тем самым система образования не выполняет своей первой функции, указанной выше. Подход, основанный на достижении не внешне определенного минимального или максимального, а желаемого и планируемого участниками образовательного процесса результата в форме “уровневой дифференциации” был реализован Виктором Фирсовым и его группой на рубеже 1980—1990 гг. [7, 8]. В этой системе ученик и его родители могут заранее планировать оценку “ОК” по некоторому школьному предмету, в стандартной классификации соответствующую оценке С. Стигма С постепенно устраняется.

Полная реализация идей Фирсова, как мы покажем, становится возможной в нашей парадигме, благодаря современным технологиям анализа данных и машинного обучения.

Во-вторых, возможно большое разнообразие в путях достижения целей, связанное со стилями учения и вообще — интеллектуальной деятельности (напр. Multiple Intelligences of Howard Gardner [9]) и формами мотивации, вытекающими из Personality Adaptations of Transactional Analysis, Paul Ware. [10].

Возникла концепция Personalized, Competency-Based Learning (PCBL), в которой ученику принадлежит большая свобода в планировании и реализации своего образовательного маршрута [11].

Еще одним источником нашего подхода является концепция и практика работы Роберта Марцано. В течение ряда десятилетий Robert J. Marzano с коллегами, с одной стороны, разработал свою таксономию образовательных результатов, дополняющую таксономию Блума, методологию и технологию построения систем образовательных целей и уровней их достижения [12]. С другой стороны, Марцано построил модель управления школой, т. н. высоконадежную школу [13].

Наконец, ключевым элементом строящейся нами Парадигмы является современная практика создания и использования, в том числе — в управлении организациями Больших языковых моделей.

Управление образовательным процессом при этом становится оптимизационной задачей,

преимущественно неколичественного управления с ограниченными (в основном, количественно измеряемыми) ресурсами.

МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Состояния и цели

В каждый момент жизни учащегося (ребенка, подростка, взрослого) и других участников образовательного процесса измеряется его *состояние*. Элементом состояния может быть и суточная и недельная динамика усталости. Конечно, в образовательном контексте центральную роль играют текущие и остаточные образовательные результаты, в том числе — сформированность больших идей, обеспечивающих ориентацию в мире. Не менее существен уровень мотивации по отношению к тем или иным видам учебной деятельности (предметам, учителям), к деятельности вне школьного контекста и после завершения образования. Потенциально возможные состояния образуют *пространство состояний*.

Система образования получает от общества, формирует и развивает свое *пространство возможных целей*. Оно может быть многомерным, например, декартовым произведением пространств по разным измерениям: здоровье и продолжительность жизни, благополучное потомство, сохранение семейного достояния и самостоятельно нажитое материальное благосостояние, полученные знания, умения, навыки, компетенции, реальные и формализованные образовательные результаты (дипломы), профессиональные позиции. Цели включают достигаемые в какой-то момент в будущем состояния, или идущие в будущем процессы в сфере образования, карьеры, личной жизни человека.

Очередной отрезок образовательного процесса представляется как движение к некоторой цели. Эта цель выбирается в пространстве целей и формулируется участниками образовательного процесса: учащимся, его родителями, учителями. Она может включать формальные отметки по различным предметам, но также, например, и результаты внешкольной учебной и проектной деятельности, показатели здоровья, эмоционального состояния, отношений с другими людьми и т. д.

Удобно и естественно представлять себе, что для одного обучающегося фиксируется несколько целей, они могут достигаться параллельно,

или в некоторый момент образовать систему альтернатив, требующую выбора: “фигурное ка- тание или экспериментальная биология”.

В пространстве целей рассматривается *функ- ционал ценности* (приоритетности) цели для участников образовательного процесса.

Ресурсы

Образовательный процесс идет в условиях расходования *ресурсов* и *ресурсных ограничений*. Среди ресурсов:

- время учащегося, его психофизиологиче- ские ресурсы, степень утомления и т. д.;
- время учителей, затрачиваемое на одно- го учащегося, необходимость синхронизации образовательного процесса для разных обуча- ющихся: необходимость одновременного про- хождения одной темы всеми учениками класса; психофизиологические ресурсы, степень утом- ления, степень мотивации и т. д.;
- мотивация учащегося, принципиально за- висящая от осмысленности основной и проме- жуточных целей; от успешности в преодолении трудностей, поощрения взрослых и реакции со- учеников;
- средства, которые затрачиваются на работу с данным учащимся дополнительно к основному финансированию образовательного процесса — государством (система дополнительного образо- вания детей), родителями.

На пространстве возможных целей задается *функционал ресурсов* — априорная оценка рас- пределенных по времени затрат на достижение данной цели, начиная от заданного состояния учащегося. Можно ожидать, что предстоящие инвестиции ресурсов сокращаются, поскольку какие-то ресурсы уже затрачены.

На том же пространстве рассматривается *функционал ценности* (приоритетности) цели для участников образовательного процесса, с учетом функционала ресурсов.

Система является адаптивной, то есть в ней постоянно происходит изменение, уточнение системы целей и функционалов.

Реально, изменение происходит в дискрет- ные моменты, например, ежегодно.

При этом пространство возможных целей ме- няется относительно медленно.

Содержание

Содержание образования представлено в виде *пространства заданий*. Отдельный “чисто

информационный” фрагмент содержания, со- общающий что-то ученику, конечно, предпола- гает действие: как минимум, прочитать, посмо- треть на иллюстрацию, но в действительности мы ожидаем большего, что и должно войти в задание.

Пространство образовательных заданий вклю- чает цифровые образы всей учебной литературы системы образования.

Процесс

Процесс образования — движения к цели представляется в виде последовательных отрез- ков, на которых достигаются некоторые *проме- жуточные цели*, “под-цели”.

Между подцелями идут цепочки *образова- тельных действий*, в том числе *событий*. Среди действий:

- учителя и школы — воздействие на учени- ка в форме организации события, сообщения информации, предъявление задания или темы деятельности, мотивирующего воздействия, об- ратной связи, обсуждения;
- учащегося — выполнения задания, участия в коллективном проекте, выступления и т. д.

Для каждого из действий исходно заданы предполагаемые затраты ресурсов участников. *Прогнозируемые затраты* учитывают состояния участников, в том числе информацию о про- шлых действиях. *Реальные затраты* выявляются в процессе.

УПРАВЛЕНИЕ. РОЛЬ СИСТЕМ ИИ

Большие данные системы образования

Пространство целей

Уже сейчас наиболее значительные большие языковые модели содержат достаточно материа- ла для формирования и постоянного расшире- ния пространство целей.

Одним из источников расширения являют- ся постоянно идущие диалоги с родителями учащихся.

Иллюстративный материал, жизненные истории, адекватные мероприятия и професси- ональные пробы могут быть связаны с целями и использованы в работе со студентами.

Содержание: пространство заданий

Имея в цифровом виде всю основную учеб- но-методическую литературу, можно в автома- тизированном режиме создать пространство

заданий. К этому пространству можно добавить разработанные учителем задания, включая темы проектов и т. п.

Образовательные истории

Цифровая история учения одного ученика хранит:

- контекст, предысторию ученика, информацию о родителях и родных (например, образование, профессиональные данные), о социальной среде;
- выбранные участниками образовательного процесса цели образования для этого ученика, их модификации со временем, диалоги участников процесса, относящиеся к формулированию, достижению, модификации целей;
- все выполненные им задания, в том числе — проектные, групповые, созданные им самим и т. д., и историю их выполнения — версии письменных работ и хронометраж их выполнения, реакцию (обратную связь) от учителей и других работников школы (психолог, тьютор) и от других учащихся, рефлексивные комментарии самого ученика, видеозаписи групповых занятий и других событий, в которых ученик принимает участие;
- историю жизни и карьеры выпускника, достигнутых им состояний и целей.

Цифровая история работы учителя включает:

- истории учения учеников этого учителя из одного класса;
- фиксацию элементов учения, профессионального развития самого учителя.

Цифровые истории всех учеников и учителей системы образования образуют общую *цифровую историю системы образования*.

Прогнозная и рекомендательная функции ИИ в процессе управления

Рекомендательная система (РС) на основе ИИ является принципиальным, критически важным элементом нашей Парадигмы управления.

Основные функции РС:

- диалог с участниками образовательного процесса о возможных целях, учащимся, родителями, учителями выявление ожиданий и предпочтений, рекомендации по выбору персональных целей образования и их соответствия жизненным целям. Фиксация целей и их адаптация в дальнейшем;
- диалог с участниками образовательного процесса постоянного *плана ближайшего развития* в зоне ближайшего развития и пространстве вариантов для каждого ученика, с учетом учеб-

ного планирования всего класса, индивидуальных затрат ресурсов на весь образовательный процесс. Начальные условия плана: предшествующая история. Коррекция плана. Система указывает на возможные трудности в реализации плана. Предсказание затрат, в том числе — столь значительных, что они станут препятствием для достижения цели;

- рекомендация ученику, учителю, родителям (например, режим питания, переход в другую школу);
- сбор, обработка (агрегирование, наглядное представление) и передача учителю аналитики по идущему процессу, в том числе — подтверждение выполнения заданий (в цикле необходимой коррекции — доработки), реально затраченного учеником времени на выполнение и т. п.;
- в случае отклонения ученика или группы учеников от плана РС по результатам или затратам может дать рекомендации учителю по коррекции заданий, проведения события для класса, группы учащихся, или индивидуального;
- выявление особых случаев и привлечение к ним внимания, например, перегрузка учащегося, сопровождаемая серьезными негативными изменениями состояния; устойчивое превышение результатов по какому-то предмету по сравнению с прогнозом, которое может стать сигналом для изменения цели и т. д.;
- в случае выявления особых случаев система действует про-активно на уровне учителя, выдает информацию о таких случаях в формате текущего информирования администрации;
- предложение администрации вместе с учителем согласовать с родителем и учащимся текущее уточнение и принципиальное изменение в траектории, перераспределению ресурсов; предлагается сценарий согласования — ответ на вопросы и т. д.

РС использует большие данные системы образования и большие языковые массивы вне системы.

Запуск и Bootstrapping. Дальнейшее развитие

Начав использовать цифровую образовательную среду и разместив в ней исходное, “эскизное” пространство целей и пространство заданий можно вести пилотные проекты в рамках одной системы образования

Накапливаемый при этом материал:

- диалоги с родителями;
- записи уроков;
- выполненные работы и последовательности действий, их хронометраж.

Станут приоритетным материалом для включения и учета в больших данных системы образования.

Первые прогнозы, как и в других системах машинного обучения, будут прогнозами реальных опытных, квалифицированных учителей. Затем прогнозная функция будет во все большей степени передаваться цифровой компоненте школы, как это бывает и в других системах машинного обучения.

Система ИИ становится необходимым цифровым расширением системы образования, точно так же, как мобильник расширением человеческой личности.

Можно ожидать, что такая расширенная система образования будут эволюционировать как организм, выявляющий внутри себя успешные инновационные практики и содействующий их распространению.

ИЗМЕРЕНИЕ КАЧЕСТВА РАБОТЫ УЧИТЕЛЯ, ШКОЛЫ, СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Проблема качества является одной из главных проблем образования, как и других сфер деятельности.

Естественны следующие традиционные подходы. Качество — это:

1. Обеспечение стандарта — обязательного для всех минимума.
2. Унификация и контроль процесс обучения, контроль прохождения тем, результатов промежуточных аттестаций и т. д.
3. Высокие баллы ЕГЭ, победы в олимпиадах, выпускники, поступившие в престижные вузы и т. д.

Несовершенство этих подходов общеизвестно. Они не охватывают весь спектр ситуаций, которые мы связываем с понятием “качественное образование”. Вот одна из таких ситуаций: в класс учителя пришел троечник, для которого отметка “3” является замаскированной двойкой. Через год этот ученик стабильно получает честные тройки (делает много ошибок, не разобрался со сложным материалом), иногда четверки. Безусловно, работа этого учителя с этим учеником является качественной.

В предлагаемой Парадигме предлагается принципиально новый подход к проблеме оцен-

ки качества работы и аттестации работы учителя и школы.

Одной из функции системы ИИ является прогнозирование результатов (степени достижения целей) учащихся. Сравнение реальных результатов с прогнозируемыми дает возможность получить оценку работы учителя и школы. Более тонкая оценка должна учитывать и меры, которые учитель и школа предприняли при отклонении от прогноза.

Отметим, наконец, что в традиции последних десятилетий массовая государственная школе не учитывала существенно мнение родителей о ее работе. Предлагаемая Парадигма включает необходимость постоянного информирования родителей о продвижении ребенка к целям, запланированным при их участии, обсуждения коррекции целей. При этом основным, “нормальным” случаем, является то, что запланированные цели достигаются. “Приглашение родителя в школу”, как правило будет вести к конструктивному диалогу, а не к наказанию.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИЕМУ ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ. ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ

Одним из важных, может быть, самым важным параметром личности учащегося, который может интересовать образовательную организацию, например, университет, куда приходит выпускник школы — это способность этого выпускника учиться.

Ясно, что цифровая история учения содержит много важной информации на эту тему. Эта информация может быть дополнена портфолио примеров учения, составленным учеником вместе с учителем, при условии открытия для университета всей истории.

Таким образом, прием становится больше похожим на консультацию для обеих сторон, бесприигрышный процесс, а не на конкуренцию или рынок. У нас есть естественная преемственность и непрерывность процесса обучения.

Разумеется, было бы правильно университету самому решать, в какой степени он будет руководствоваться цифровой историей и ее автоматизированным анализом, или результатами национального тестирования, или, скажем, олимпиад, Advanced Placement, исследовательской работе школьника вместе с профессорами университета и т. д.

ПРИВАТНОСТЬ

Мы не касались вопроса о приватности данных, размещаемых в цифровой среде.

Безусловно, это очень важный и мы уверены решимый вопрос, который будет возникать и в других аналогичных случаях.

РАБОТА БЫЛА ПОДДЕРЖАНА

Данная статья подготовлена при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP19680007, руководитель — А.Е. Абылкасымова).

БЛАГОДАРНОСТИ

На разработку нашего подхода большое влияние оказали совместная работа и общение с Ричардом Марретом и Коппер Столл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spady W.G., Schwahn Ch.J. Learning Communities 2.0: Educating in the Age of Empowerment. Lanham, MD // Rowman & Littlefield Education. 2010. 169 p. ISBN 978-1-60709-608-5.
2. Spady W.G. Outcome-Based Education: Critical Issues and Answers. Arlington, Va: American Association of School Administrators, 1994. 212 p. ISBN 0-87652-183-9 94. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED380910.pdf>
3. Comenius J.A. The Great Didactic. 1896. Transl. by Maurice Walter Keatinge. https://en.wikisource.org/wiki/The_Great_Didactic_of_John_Amos_Comenius/The_Great_Didactic
4. Semenov A.L. and Ziskin K.E. Expanded Personality as the Main Entity and Subject of Philosophical Analysis: Implications for Education // Doklady Mathematics. 2023. V. 108. № 4. P. 331–341. ISSN 1064-5624. <https://doi.org/10.1134/S1064562423700965>.
5. Cepp M. Девочка с пальчик. М.: Ад Маргинем Пресс, 2016. (Serres M. Petite Poucette. Paris: Éditions Le Pommier, 2012)
6. Clark A., Being There: Putting Brain, Body, and World Together Again. MIT Press, 1998. <http://www2.econ.iastate.edu/tesfatsi/BeingThere.AClark1998.Entire-Book.pdf>
7. Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е., Рудченко Т.А. Обучение математикой в XXI веке // Вопросы образования, 2024 (в печати).
8. Константинов Н.Н., Семенов А.Л. Результативное образование в математической школе // Чебышёвский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1 (77). С. 413–446. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446>
9. Gardner H. Multiple Intelligences. The Theory in Practice. New York: BasicBooks, 1993. ISBN 0-465-01821-1. https://archive.org/details/multipleintellig00gard_0/
10. Ware P. Personality Adaptations (Doors to Therapy) // Transactional Analysis Journal. 1983. № 1. P. 11–19.
11. Levine E., Patrick S. What Is Competency Based Education? An Updated Definition. Vienna, VA: Aurora Institute, 2019. <https://aurora-institute.org/wp-content/uploads/what-is-competency-based-education-an-updated-definition-web.pdf>
12. Simms J. The Critical Concepts (Final Version: English Language Arts, Mathematics, and Science). Marzano Resources. URL: <https://www.marzanoresources.com/educational-services/critical-concepts>
13. Marzano High Reliability Schools. URL: <https://www.marzanoresources.com/hrs/high-reliability-schools#conIfameworkrapp>

AI METHODS IN CONTROL OF PERSONALIZED GENERAL EDUCATION

Academician of the RAS A. L. Semenov^{a, b, c}, A. E. Abylkassymova^d, T. A. Rudchenko^e

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^bInstitute of Education, HSE University, Moscow, Russia

^cScientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russia

^dAbay University, Almaty, Republic of Kazakhstan

^eAxel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The paper proposes a new approach to control the process of general education. Digital technology tools are used to form spaces of goals, tasks and learning activities, and to record the educational process of each student. Artificial intelligence tools are used when choosing a student’s personal goals and ways to achieve them, to make forecasts and recommendations to participants in the educational process. Big data from the entire education system and big linguistic models are used. The effects of the approach include ensuring the success of each student, objective assessment of the work of teachers and schools, and the adequacy of the succession process to higher education.

Keywords: control in education, personalized learning, big data in education, LLM

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА БЕРНШТЕЙНА–РИМАНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

© 2024 г. А. Н. Агаджанов^{1, *}

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым

Поступило 13.09.2023 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принято к публикации 26.04.2024 г.

В настоящей работе получена формула интерполяции для произвольных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, при известных значениях этих функций на некоторой равномерной сетке. Никаких дополнительных предположений о функциях не требуется. Построение такой формулы связано со свойствами локальных полиномов Бернштейна и дзета-функции Римана. Приведены численные результаты интерполирования функций типа Римана, Вейерштрасса, Безиковича и Такаджи.

Ключевые слова: интерполяция, локальные полиномы Бернштейна, биномиальные коэффициенты, гамма-функции Эйлера, мультипликативная формула Гаусса, дзета-функция Римана, функции типа Римана, функции типа Вейерштрасса, функции типа Безиковича, функции типа Такаджи

DOI: 10.31857/S2686954324030026, EDN: YBWKSB

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерполяция функций является одной из важнейших задач современной вычислительной математики [1]. Формулы, связанные с именами Ньютона, Гаусса, Чебышёва, Эрмита, Бернштейна и др., отражают тот факт, что эта задача привлекала внимание крупнейших математиков. Многочисленные примеры, связанные с приложениями интерполяции функций, приведены в [2].

Как известно, особую роль в теории интерполяции играют полиномы Лагранжа [1, 2, 3]. Фундаментальное значение таких многочленов проявляется на классе непрерывных функций с ограниченной вариацией на $[-1, 1]$. Из теоремы Крылова [4] следует, что последовательность полиномов Лагранжа, интерполирующих функцию f в узлах Чебышёва $x_{k,n} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n} \cdot \pi\right)$ ($k = \overline{0, n-1}$), сходится к значению функции f в любой точке $x \in [-1, 1]$. При дополнительном предположении об абсолютной непрерывности функции f сходимость к значению $f(x)$ является равномерной.

Из результатов Рунге, Бернштейна [5] следует, что даже для некоторых бесконечно дифференцируемых функций при равномерном распределении узлов, имеет место расходимость интерполяционных процессов по Лагранжу на множествах положительной лебеговой меры. Расходимость таких интерполяционных процессов заведомо сохраняется на классе непрерывных функций с ограниченной вариацией. Особо отметим, что на классе функций с ограниченной вариацией на отрезке $[0, 1]$ существует множество второй категории по Бэру [6, 7] состоящее из функций, которые обладают “патологическими” свойствами с позиций классического дифференциального исчисления [8].

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $V_1(0, 1)$ — класс непрерывных неубывающих функций с ограниченной вариацией на отрезке $[0, 1]$. Существует множество второй категории по Бэру из $V_1(0, 1)$, состоящее из функций f для которых справедливы утверждения:

а) множества точек, в которых производные числа Дини, соответствующие функциям f , связаны равенствами $D^+ f(x) = D^- f(x) = +\infty$, $D_+ f(x) = D_- f(x) = 0$, являются множествами второй категории на $(0, 1)$ и имеют нулевую меру Лебега;

б) функции f имеют производную равную $+\infty$ на нуль-множествах мощности континуума, тип этих множеств есть $F_{\sigma\delta}$;

¹ Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: ashot_ran@mail.ru

в) функции f имеют конечные производные на множествах полной меры Лебега, содержащих всюду плотные G_δ -множества;

г) функции f не имеют ни конечных, ни бесконечных производных на нуль-множествах мощности континуума, представимых в виде объединения двух нуль-множеств типа G_δ и $G_{\delta\sigma}$ соответственно.

Существенно более сложной задачей является интерполяция по Лагранжу непрерывных функций с неограниченной вариацией на некотором конечном отрезке. В работах [11, 12, 13] показано, что существуют непрерывные функции с неограниченной вариацией на $[-1, 1]$, для которых интерполяционные процессы по Лагранжу расходятся всюду как в случаях выбора равностоящих узлов, так и в случаях выбора узлов Чебышева.

Эти факты не являются случайными, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 2. В пространстве $C_{[0,1]}$ существует множество мощности континуума, состоящее из функций, для которых при любом выборе равномерной системы узлов, множества точек расходимости интерполяционных процессов по Лагранжу совпадают (с точностью до некоторых нуль-множеств) со счетным объединением взаимно пересекающихся множеств гомеоморфных канторовому, среди которых, по крайней мере, одно имеет положительную меру Лебега.

Далее под интерполяцией будем понимать нахождение неизвестных значений произвольной непрерывной функции в неузловых точках, по имеющимся значениям в узлах равномерной сетки.

Не нарушая общности, будем рассматривать непрерывные функции только на отрезке $[0, 1]$. Отметим, что свойства этих функций могут существенно различаться. А именно, можно выделить дифференцируемые всюду функции без интервалов монотонности [14], сингулярные по Лебегу функции, также не имеющие интервалов монотонности [9, 10], и, наконец, непрерывные функции, недифференцируемые всюду на заданном отрезке [15].

Перечисленные выше классы непрерывных функций далеко не исчерпывают всё множество непрерывных функций. Например, существуют строго возрастающие дифференцируемые всюду функции, у которых на множествах положительной лебеговой меры производные f' обращаются в нуль. Интерес представляют и непрерывные

функции неограниченной вариации, у которых производные f' почти всюду (по мере Лебега) равны нулю [16].

Таким образом, актуальной является задача построения универсальной интерполяционной формулы, применимой к произвольным непрерывным функциям на $[0, 1]$. Ее структура принципиально отличается от известных интерполяционных формул и, в частности, от интерполяционной формулы Лагранжа и ее модификаций. В основе этой формулы лежат функциональные конструкции, связанные с полиномами Бернштейна и дзета-функцией Римана [17]. Отметим, что при построении такой формулы известными считаются значения произвольной непрерывной функции в равноудаленных узловых точках, лежащих на отрезке $[0, 1]$.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ЧЕРЕЗ ГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

Конструктивную версию теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении произвольной непрерывной функции из $C[0, 1]$ полиномами предложил С. Н. Бернштейн [3]. Им были введены многочлены вида

$$B_N(f; x) = \sum_{k=0}^N C_N^k \cdot f\left(\frac{k}{N}\right) \cdot x^k \cdot (1-x)^{N-k},$$

где $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Оказалась справедливой теорема [19].

Теорема 1 (Вейерштрасс–Бернштейн). Для любой функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[0, 1]$ последовательность полиномов $B_N(f, x)$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $f(x)$ во всех точках данного отрезка.

Некоторые теоретические аспекты применения полиномов Бернштейна имеются в [20].

Следует отметить, что использование полиномов Бернштейна в численном анализе наталкивается при больших значениях N на практически непреодолимые трудности, в связи с громадными значениями некоторых биномиальных коэффициентов C_N^k . Фактически это означает, что в представлениях полиномов Бернштейна присутствуют неприемлемые для практики численные значения коэффициентов таких многочленов.

В связи с этим для решения задачи интерполяции произвольных непрерывных функций

в настоящей работе используются локальные полиномы Бернштейна, позволяющие, с одной стороны, преодолевать на практике вычислительные трудности (отсутствует необходимость вычисления биномиальных коэффициентов), а с другой – обеспечивать адаптивность предлагаемой формулы интерполяции как к конкретной функции f , так и к точке $x \in (0,1)$.

Пусть $x \in (a,b)$, причем $(a,b) \subset [0,1]$. Как известно, полиномы Бернштейна на интервале (a,b) задаются в виде [3] (в дальнейшем

будем называть их локальными полиномами Бернштейна)

$$B_n(f; x, a, b) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k}. \quad (1)$$

Лемма 1. Для локальных полиномов Бернштейна $B_n(f; x, a, b)$ при каждом $x \in (a,b)$ справедливо представление:

$$B_n(f; x, a, b) = \frac{1}{2\pi \cdot (n+1)} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot A_{l,k} \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{l+k}, \quad (2)$$

где

$$A_{l,k} = \prod_{s=2}^{n+1} \frac{2\pi \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right)},$$

причем выполняются неравенства

$$\left|\frac{k+s-n-1}{n+1}\right| < 1, \quad \left|\frac{l+s-n-1}{n+1}\right| < 1, \quad \left|\frac{s-k-l-1}{n+1}\right| < 1. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $y = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. Имеют место следующие эквивалентные представления для локальных полиномов Бернштейна:

$$\begin{aligned} B_n(f; x, a, b) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot y^k \cdot (1-y)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) y^k \sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l \cdot (-y)^l = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot C_n^k \cdot C_{n-k}^l \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot y^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \cdot y^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} \cdot y^{k+l} = \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(l+1) \cdot \Gamma(n-k-l+1)} \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{k+l}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пользуясь $(n+1)$ – мультипликативной формулой Гаусса для гамма-функций [18]

$$\Gamma(n+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right), \quad (5)$$

$$\Gamma((n+1)z) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{(n+1)z-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(z + \frac{s-1}{n+1}\right),$$

получим

$$\Gamma(k+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right). \quad (6)$$

Аналогично,

$$\Gamma(l+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{l+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right), \quad (7)$$

$$\Gamma(n-k-l+1) = (2\pi)^{\frac{1-(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n-k-l+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right). \quad (8)$$

Из тождеств (5), (6), (7) и (8) имеем

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(n-k-l+1)} = \frac{2\pi \cdot \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right)}{2\pi(n+1) \prod_{s=1}^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right)}. \quad (9)$$

Подставив (9) в правую часть (4), получим представление (2) для локальных полиномов Бернштейна. Справедливость неравенств (3) проверяется непосредственно.

Лемма 1 доказана.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ЧЕРЕЗ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Лемма 2. *Тождество (1) в эквивалентной форме может быть представлено в виде:*

$$B_n(f; x, a, b) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \exp(D_{l,k}(x, a, b)), \quad (10)$$

где

$$D_{l,k}(x, a, b) = (n+1)\ln(2\pi) + (l+k)\ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right) - \sum_{s=1}^{n+1} \ln \Gamma\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) - \sum_{s=1}^{n+1} \ln \Gamma\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) - \sum_{s=1}^{n+1} \ln \Gamma\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right). \quad (11)$$

Следствие 1. *Функция $D_{l,k}(x)$ из (11) в эквивалентной форме имеет вид*

$$D_{l,k}(x, a, b) = (n+1)\ln(2\pi) + (l+k)\ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + (1-\gamma) \cdot n + g_n(l, k) + G_n(l, k),$$

где $\gamma = 0.577\dots$ – постоянная Эйлера–Маскерони [18], $\zeta(n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$ – значения дзета-функции Римана в точках $n = 2, 3, \dots$,

$$g_n(l, k) = -\sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{k+s-n-1}{n+1}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{l+s-n-1}{n+1}\right) + \sum_{s=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{s-k-l-1}{n+1}\right),$$

$$G_n(l, k) = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{(\zeta(m)-1)}{m} \cdot \sum_{s=1}^{n+1} W_{s,m,n}(l, k),$$

$$W_{s,m,n}(l, k) = \left(\frac{s-1}{n+1}\right)^m - \left(\frac{k+s-n-1}{n+1}\right)^m - \left(\frac{l+s-n-1}{n+1}\right)^m - \left(\frac{s-k-l-1}{n+1}\right)^m.$$

4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА БЕРНШТЕЙНА-РИМАНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ [0, 1]

Локальные полиномы Бернштейна (10) могут быть записаны в виде

$$B_n(f; x, a, b) = \sum_{k=0}^n d_k(x, a, b) \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right),$$

$$\text{где } d_k(x, a, b) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \exp(D_{l,k}(x, a, b)).$$

Пусть

$$B_n^*(f; x, a, b, q) = \sum_{k=0}^n d_k^*(x; a, b, q) \cdot f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right), \quad (12)$$

$$\text{где } d_k^*(x, a, b, q) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \cdot \exp(D_{l,k}^*(x, a, b, q)).$$

$$D_{l,k}^*(x, a, b, q) = (n+1) \ln(2\pi) + (l+k) \ln\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + (1-\gamma) \cdot n + g_n(l, k) + G_n^*(l, k, q),$$

$$G_n^*(l, k, q) = \sum_{m=2}^q (-1)^m \cdot \frac{(\zeta(m) - 1)}{m} \cdot \sum_{s=1}^{n+1} W_{s,m,n}(l, k).$$

Здесь $q \geq 2$, $n \geq 2$ — некоторые натуральные параметры, определяемые ниже.

Формулу (12) будем называть интерполяционной формулой Бернштейна–Римана для произвольной непрерывной функции $f \in C_{[0,1]}$ в точке $x \in (0, 1)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $f \in C_{[0,1]}$ и значения $f(k/N)$ ($k = 0, N$) известны. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ существуют натуральные числа $q \geq 2$ и $n \geq 2$ (отрезок $[a, b]$ содержит n равностоящих узлов интерполяции с шагом $\frac{1}{N}$, причем $a = \frac{i}{N}$, $b = \frac{j}{N}$, $0 \leq i < j \leq N$, $j - i = n$), при которых справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^n \left(d_k(x, a, b, q) - d_k^*(x, a, b, q) \right) f\left(a + k \cdot \frac{(b-a)}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Имеет место поточечное отклонение функции f от полинома (12):

$$\left| f(x) - B_n^*(f; x, a, b, q) \right| \leq 2\omega\left(f; \frac{h(x, a, b)}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon,$$

где $h(x, a, b) = \frac{1}{b-a} \sqrt{(x-a)(b-x)}$; $\omega(f; h(x, a, b)) = \sup_{|y_1 - y_2| \leq h(x, a, b)} |f(y_1) - f(y_2)|$ — модуль непрерывности функции f в окрестности $[a, b]$ точки x .

5. ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ ТИПА РИМАНА, ВЕЙЕРШТРАССА, БЕЗИКОВИЧА И ТАКАДЖИ

В данном разделе приводятся результаты численной интерполяции функций типа Римана,

Вейерштрасса, Безиковича и Такаджи в произвольно выбранных точках $x_1 = 0.230964$ и $x_2 = 0.811573$, не совпадающих с узловыми и лежащих внутри отрезков $[a_1, b_1] = [0.23081, 0.23101]$ и $[a_2, b_2] = [0.81152, 0.81172]$ соответственно. Параметры q и n выбраны следующим образом: $q = 30$, $n = 20$. Шаг дискретизации равномерной сетки принят $h = 10^{-5}$.

I. Функции типа Римана

$$R_{\alpha, \beta}^K(x) = \sum_{k=1}^K \sin(\pi k^\alpha x) / k^\beta.$$

1) Пусть $\alpha = \beta = 2$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha, \beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0004493554806735,$$

где $R_{\alpha, \beta}^K(x_1) = 0.6875988147842169$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6871494593035433$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha, \beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0004493558609548,$$

где $R_{\alpha, \beta}^K(x_1) = 0.6875988135010047$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6871494576400499$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha, \beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0004493559017736,$$

где $R_{\alpha, \beta}^K(x_1) = 0.6875988133769748$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6871494574752012$.

Значения функции в граничных точках отрезка

$$R_{2,2}^{10^8}(a_1) = 0.6874335999494837 \quad \text{и} \quad R_{2,2}^{10^8}(b_1) = 0.6874997981010574.$$

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha, \beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha, \beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0002502739955572,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_2) = 0.2914566330071412$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.2912063590115839$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0002502744918981,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_2) = 0.2914566324327386$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.2912063579408404$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0002502745199656,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_2) = 0.2914566323782498$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.2912063578582841$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R_{2,2}^{10^8}(a_2) = 0.2923776773427658$ и $R_{2,2}^{10^8}(b_2) = 0.6874997981010574$.

Небольшое увеличение погрешностей интерполяций при увеличении K связано с поточечными приближениями функций $R_{2,2}^K(x)$ к классической функции Римана $R_{2,2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^2 x) / k^2$. Последняя, как известно, является недифференцируемой почти всюду на отрезке $[0, 1]$ [15, 21].

2) Пусть $\alpha = 3.7$ и $\beta = 2.5$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0002239290968647,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.5894199733188995$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.5896439024157643$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0002239290976064,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.5894199733181118$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.5896439024157183$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_1) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0002239290976109,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.5894199733181072$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.5896439024157182$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R_{3.7,2.5}^{10^8}(a_1) = 0.6079027998564065$ и $R_{3.7,2.5}^{10^8}(b_1) = 0.5850376100817113$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0018436167732948,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_2) = 0.6793914659598447$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a, b, q) = 0.6812350827331395$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0018436167733021,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_2) = 0.6793914659599178$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a, b, q) = 0.68123508273322$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| R_{\alpha,\beta}^K(x_2) - B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0018436167733095,$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_2) = 0.6793914659599112$,
 $B_{20}^*(R_{\alpha,\beta}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.6812350827332208$.

Значения функции в граничных точках отрезка $R_{3.7,2.5}^{10^8}(a_2) = 0.6922700402123946$ и $R_{3.7,2.5}^{10^8}(b_2) = 0.6802298813604979$.

Небольшое увеличение погрешностей интерполяций при увеличении K связано с поточечными приближениями функций $R_{3.7,2.5}^K(x)$ к функции $R_{3.7,2.5}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k^{3.7} x) / k^{2.5}$. Последняя, как известно, является недифференцируемой всюду на отрезке $[0, 1]$ [22].

II. Функции типа Вейерштрасса
 $W_{p,u,v}^K(x) = \sum_{k=1}^K u^k \cdot \cos^p(2\pi v^k x)$, где $0 < u < 1$,
 $u \cdot v \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

1) Пусть $p = 1$, $u = 1/2$, $v = 3$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_1) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0012192142253135,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_1) = 0.0555601106613084$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.0543408964359948.$$

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_1) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.0012192142253135,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_1) = 0.0555601106613084$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.0543408964359948.$$

Значения функции в граничных точках отрезка

$$W_{1,1/2,3}^{500}(a_1) = 0.06521890058260417 \text{ и } W_{1,1/2,3}^{500}(b_1) = 0.04935944285642762.$$

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_2) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0002976668050618,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_2) = -0.4374460833698153$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.4371484165647535.$$

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_2) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.0002976668050618,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_2) = -0.4374460833698153$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.4371484165647535.$$

Значения функции в граничных точках отрезка

$$W_{1,1/2,3}^{500}(a_2) = -0.4449366545837379 \text{ и } W_{1,1/2,3}^{500}(b_2) = -0.4355265625913345.$$

2) Пусть $p = 3$, $u = 1/2$, $v = 3$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_1) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.001524014996423,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_1) = 0.1572425801796069$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.1557185651831836.$$

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_1) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) \right| = 0.001524014996423,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_1) = 0.1572425801796069$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.1557185651831836.$$

Значения функции в граничных точках отрезка

$$W_{3,1/2,3}^{500}(a_1) = 0.1699951855272775 \text{ и } W_{3,1/2,3}^{500}(b_1) = 0.149288748112328.$$

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 100$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_2) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.000372067901735,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_2) = -0.317544604156212$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.3171725362544764.$$

При $K = 500$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\left| W_{p,u,v}^K(x_2) - B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) \right| = 0.000372067901735,$$

где $W_{p,u,v}^K(x_2) = -0.317544604156212$,

$$B_{20}^*(W_{p,u,v}^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = -0.3171725362544764.$$

Значения функции в граничных точках отрезка

$$W_{3,1/2,3}^{500}(a_2) = -0.3270075271505718 \text{ и } W_{3,1/2,3}^{500}(b_2) = -0.3148698486624725.$$

Неизменность погрешностей интерполяций при увеличении K связана с тем фактом, что значения функций $W_{p,u,v}^K(x)$ в выбранных точках

при $K = 100$, $K = 500$ и классической функции Вейерштрасса $W_{p,u,v}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \cdot \cos^p(2\pi v^k x)$ совпадают с точностью, по крайней мере, до шестнадцати знаков после запятой.

III. Функции типа Безиковича $F^K(x) = \sum_{k=1}^K \lambda_k^{s-2} \cdot \sin(\lambda_k \cdot x)$, где $1 < s < 2$, $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow \infty$.

Пусть $s = 3/2$, $\lambda_k = k$.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |F^K(x_1) - B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)| = \\ = 5.66778295407743 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6005946618604803$,
 $B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6005947185383098$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |F^K(x_1) - B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)| = \\ = 5.67076617885575 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6009105152891481$,
 $B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6009105719968099$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |F^K(x_1) - B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)| = \\ = 5.67170980181330 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

где $R_{\alpha,\beta}^K(x_1) = 0.6010103969451093$,
 $B_{20}^*(F^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.6010104536622073$.

Значения функции в граничных точках отрезка $F^{10^8}(a_1) = 0.6006127282719943$ и $F^{10^8}(b_1) = 0.601129179906992$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^6$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |F^K(x_2) - B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)| = \\ = 5.68975089265677 \cdot 10^{-10}, \end{aligned}$$

где $F^K(x_2) = 2.021090907492146$,
 $B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 2.021090908061121$.

При $K = 10^7$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |F^K(x_2) - B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)| = \\ = 5.69376545911382 \cdot 10^{-10}, \end{aligned}$$

где $F^K(x_2) = 2.022200769265691$,
 $B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 2.022200769835067$.

При $K = 10^8$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |F^K(x_2) - B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)| = \\ = 5.69503999514608 \cdot 10^{-10}, \end{aligned}$$

где $F^K(x_2) = 2.022551738486765$,
 $B_{20}^*(F^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 2.022551739056269$.

Значения функции в граничных точках отрезка $F^{10^8}(a_2) = 2.022431997064108$ и $F^{10^8}(b_2) = 2.022883839346673$.

Небольшое увеличение погрешностей интерполяций при увеличении K связано с поточечными приближениями функций $F^K(x)$ к классической функции Безиковича $F(x) = \sum_{k=1}^K \lambda_k^{s-2} \cdot \sin(\lambda_k \cdot x)$. Последняя, как известно, является непрерывной функцией, не имеющей ни конечных, ни бесконечных, даже односторонних производных [15, 23].

IV. Функция типа Такаджи $T^K(x) = \sum_{k=1}^K 1/2^k \cdot |2^k x - [2^k x + 1/2]|$. Здесь $[\cdot]$ – операция взятия целой части.

а) Для точки x_1 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^2$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |T^K(x_1) - B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)| = \\ = 2.535443849732699 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

где $T^K(x_1) = 0.3086242129068646$,
 $B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.308649567345362$.

При $K = 10^3$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$\begin{aligned} |T^K(x_1) - B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q)| = \\ = 2.535443849732699 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

где $T^K(x_1) = 0.3086242129068646$,
 $B_{20}^*(T^K(x_1), x_1, a_1, b_1, q) = 0.308649567345362$.

Значения функции в граничных точках отрезка $T^{10^3}(a_1) = 0.4609642422501693$ и $T^{10^3}(b_1) = 0.3540133006576449$.

б) Для точки x_2 имеют место следующие результаты.

При $K = 10^2$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$|T^K(x_2) - B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)| = 7.007584093721153 \cdot 10^{-6},$$

где $T^K(x_2) = 0.3173639737206789$,
 $B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.3173569661365852$.

При $K = 10^3$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$|T^K(x_2) - B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q)| = 7.007584093721153 \cdot 10^{-6},$$

где $T^K(x_2) = 0.3173639737206789$,
 $B_{20}^*(T^K(x_2), x_2, a_2, b_2, q) = 0.3173569661365852$.

Значения функции в граничных точках отрезка $T^{10^3}(a_2) = 0.3697305881919586$ и $T^{10^3}(b_2) = 0.46269038755254654$.

Неизменность погрешностей интерполяций при увеличении K связана с тем фактом, что значения функций $T^K(x)$ в выбранных точках при $K = 100$, $K = 1000$ и классической функции Такадзи $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k |2^k x - [2^k x + 1/2]|$ совпадают с точностью, по крайней мере, до шестнадцати знаков после запятой [15].

V. Об особенностях интерполяции непрерывных функций вблизи границ отрезка.

Из теоремы 3 следует, что точность интерполяции непрерывных функций с помощью формулы Бернштейна–Римана зависит как шага дискретизации сетки, так и от поведения модуля непрерывности на соответствующем отрезке $[a, b]$. В случае $a = 0$, $b = h$ и выбора точки $x \in (0, h)$ точность формулы Бернштейна–Римана может существенно снизиться. В таких случаях необходимо уменьшить параметр h .

Пример. Пусть $K = 10^6$, $q = 30$, $a = 0$, $b = 10^{-5}$, $x = 3.15 \cdot 10^{-6}$ для функции типа Римана $R_{2,2}^K(x)$.

При $h = 10^{-5}$ величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$|R_{2,2}^K(x) - B_1^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q)| = 0.0017298382920554,$$

где $R_{2,2}^K(x) = 0.0039377178046980$,
 $B_1^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q) = 0.0022078795126426$.

При $h = 5 \cdot 10^{-6}$, то величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$|R_{2,2}^K(x) - B_2^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q)| = 0.0011019844357299,$$

где $R_{2,2}^K(x) = 0.0039377178046980$,
 $B_2^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q) = 0.002835733368968$.

При $h = 10^{-6}$, то величина абсолютной погрешности интерполяции равна

$$|R_{2,2}^K(x) - B_{10}^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q)| = 0.0001446556773763,$$

где $R_{2,2}^K(x) = 0.0039377178046980$,
 $B_{10}^*(R_{2,2}^K(x), x, a, b, q) = 0.0037930621273217$.

Таким образом, уменьшение шага дискретизации h в десять раз привело к уменьшению величины погрешности интерполяции в $l = \frac{0.0017298382920554}{0.0001446556773763} \approx 11.95$ раз.

Представляет безусловный интерес распространение предложенного в статье метода интерполяции на непрерывные функции многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2020. 526 с.
2. Половко А.М., Бутусов П.Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. БХВ-Петербург, 2005. 320 с.
3. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГИТТЛ, 1954. 358 с.
4. Крылов В.И. Сходимость алгебраического интерполирования по корням многочлена Чебышева для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением // ДАН. 1956. Т. 107. № 3. С. 362–365.
5. Бернштейн С.Н. Конструктивная теория функций. Собр. соч. Т. 2. М.: АН СССР, 1954. 628 с.
6. Оксоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974. 160 с.
7. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
8. Cater F.S. On the Derivatives of Functions of Bounded Variation // Real Analysis Exchange. 2000/2001. V. 26. № 2. P. 923–932.
9. Garg K.M. On singular functions // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1969. № 14. P. 1441–1452.

10. *Агаджанов А.Н.* Сингулярные функции, не имеющие интервалов монотонности, в задачах финитного управления распределенными системами // ДАН. 2014. Т. 454. № 5. С. 503–506.
11. *Grunwald A.H.* Über divergenzerscheinungen der lagrangeschen interpolationspolynome stetiger funktionen // Ann. Math. 1936. V. 37. № 2. P. 908–918.
12. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Litterarum as Sci., Szeged. 1937. V. 8. P. 131–135
13. *Mills T.M., Vertesi P.* An Extension of the Grunwald-Marcinkiewicz interpolation theorem // Bull. Austral. Math. Soc. 2001. V. 63. P. 299–320.
14. *Katzenelson Y., Stromberg K.* Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions // Am. Math. Monthly. 1974. V. 81. № 4. P. 349–353.
15. *Jarnicki M., Pflug P.* Continuous Nowhere Differentiable Functions: The Monsters of Analysis. Springer, 2016. 299 p.
16. *Korner T.W.* Devil's staircases, ramps, humps and roller coasters // Colloquium Mathematicum. 1990. V. 60/61. P. 1–14.
17. *Титчмарш Э.Ч.* Дзета-функции Римана. УРСС. 2010. 152 с.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Лань, 2022. 800 с.
19. *Лузин Н.Н.* Теория функций действительного переменного. Учпедгиз, 1948. 318 с.
20. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б.* Проблема коэффициентов при явной алгебраической записи полиномов Бернштейна // Вестник ЧелГУ. 2012. № 15. С. 6–40.
21. *Johnsen J.* Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth // J. Fourier Anal. Appl. 2010. № 16. P. 17–33.
22. *Chamizo F, Ubis A.* Some Fourier series with gaps // J. Anal. Math. 2007. V. 101. P. 179–197.
23. *Liang Y.* On the fractional calculus of Besicovitch function // Chaos, Solitons and Fractals. 2009. V. 42. P. 2741–2747.

BERNSTEIN-RIEMANN INTERPOLATION FORMULA FOR ARBITRARY CONTINUOUS FUNCTIONS ON A SEGMENT

A. N. Agadzhanov^a

^a*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vasiliev

In this paper, we obtain an interpolation formula for arbitrary continuous functions on the interval $[0,1]$, with known values of these functions on some uniform grid. No additional assumptions about functions are required. The construction of such a formula is connected with the properties of local Bernstein polynomials and the Riemann zeta function. Numerical results of interpolation of functions of the Riemann, Weierstrass, Bizikovich and Takagi type are presented.

Keywords: interpolation, local Bernstein polynomials, binomial coefficients, Euler gamma functions, multiplicative Gauss formula, Riemann zeta function, Riemann type functions, Weierstrass type functions, Besicovitch type functions, Takagi type functions

О КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ХИРАЛЬНОСТИ: ПРАВСТОРОННИЕ И ЛЕВОСТОРОННИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

© 2024 г. Ю. А. Криксин^{1, *}, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1, **}

Поступило 20.02.2024 г.
После доработки 04.04.2024 г.
Принято к публикации 04.04.2024 г.

Рассмотрены два способа количественной оценки хиральности множества, первый из которых использует в качестве меры несовпадения двух множеств вычисление площади их симметрической разности, а второй — расстояние Хаусдорфа между ними. Показано, что эти способы, вообще говоря, не обеспечивают правильную количественную оценку для достаточно широкого класса множеств, такого как ограниченные борелевские множества. На примере плоских треугольников и выпуклых четырехугольников рассмотрена проблема разделения геометрических объектов на правосторонние и левосторонние. На плоскости угловых параметров для треугольников построены линии уровня двух версий меры хиральности. Для пространственной спирали найдены значения двух версий индекса хиральности, опирающихся соответственно на вычисление смешанного произведения векторов и расстояния Хаусдорфа между двумя множествами.

Ключевые слова: хиральность, мера и индекс хиральности, левосторонние и правосторонние объекты

DOI: 10.31857/S2686954324030038, EDN: YBRYDC

1. Под хиральностью множества евклидова пространства понимают невозможность его совмещения со своим зеркальным отражением с помощью трансляций и вращений. Напротив, ахиральное множество допускает такое совмещение. По-видимому, первая попытка количественной оценки хиральности была предпринята в конце XIX века в связи с потребностями химии распространить ее структурные формулы на трехмерное пространство [1]. Так как почти все биомолекулы являются хиральными, то исследование хиральности имеет ключевое значение для наук о жизни и, в частности, для фармакологии, когда синтезируются сложные соединения. С хиральностью связаны понятия “правостороннего” и “левостороннего” геометрического объекта (множества). В то время как степень или мера хиральности множества во многих случаях допускает количественную оценку с помощью различных числовых функций множества [2–13], степень “правого” или

“левого” не всегда возможно количественно оценить, так как соответствующая числовая величина не может быть корректно определена для всех хиральных объектов универсальным образом. С одной стороны она должна принимать отличные от нуля и противоположные значения на хиральном множестве и его отражении, иметь нулевое значение на ахиральных множествах, а с другой стороны в общем случае псевдоскаляр может принимать нулевые значения на хиральных множествах [14]. Однако, простейшая плоская геометрическая фигура — треугольник допускает непротиворечивое определение такой псевдоскалярной функции его геометрических параметров (индекса хиральности треугольника), которая может быть использована для измерения степени “правого” или “левого” на множестве всех плоских треугольников [11, 13]. Также как и мера хиральности, индекс хиральности может быть построен не единственным образом. В работе [15] показано, что мера хиральности треугольника как и любого хирального множества может быть выбрана таким образом, что любой разносторонний треугольник будет обладать максимальным значением меры хиральности. На наш взгляд, такие меры хиральности носят искусственный характер, в

¹ Институт прикладной математики
имени М. В. Келдыша Российской академии наук,
Москва, Россия

* E-mail: krikhsin@imamod.ru

** E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

чем-то схожий с выбором предпочитаемой системы отсчета, хотя определенный произвол в выборе меры хиральности все же остается. Так, например, некоторые версии меры хиральности треугольника имеют неправильную асимптотику в случаях, когда треугольник вырождается в одномерный отрезок [15], который, очевидно, является ахиральным множеством на плоскости, т.е. он должен иметь нулевое значение меры хиральности. В отношении выбора меры (индекса) хиральности должны выполняться некоторые естественные ограничения, в определенной степени сужающие его произвольность. В настоящей работе показано, что такие популярные способы количественной оценки хиральности, основанные на вычислении меры перекрытия общей части множества и его отражения или хаусдорфова расстояния между множеством и его отражением, имеют существенный недостаток: соответствующие оценки принимают нулевые значения на некоторых борелевских хиральных множествах. В то же время для достаточно простых геометрических объектов, таких как многоугольники, многогранники и другие множества, данные оценки хиральности можно оценить как удовлетворительные. Для плоских треугольников авторами построены линии уровня мер хиральности, использующих вычисление меры перекрытия общей части треугольников и хаусдорфова расстояния между ними. Отметим, что среди трехмерных объектов, являющихся предметом практического интереса химиков и биологов, следует выделить пространственную спираль. Различные варианты количественных оценок степени “правой” или “левой” с помощью псевдоскалярных функций неоднократно предлагались ранее для пространственной спирали в разнообразных прикладных областях [16, 17]. Авторами найдены численные значения двух версий индекса хиральности пространственной спирали, как функции ее геометрических параметров. В заключение обсуждаются условия, позволяющие корректно разделить хиральные геометрические объекты определенного класса на непересекающиеся множества правосторонних и левосторонних объектов.

2. Для двух ограниченных борелевских множеств P и Q двумерного евклидова пространства, определим степень их несовпадения друг с другом [18]

$$L(P, Q) = \text{mes}(P \Delta Q) = \text{mes}(P \cup Q) - \text{mes}(P \cap Q), \quad (1)$$

где mes обозначает меру Лебега (площадь) плоского множества.

Еще одним способом определения степени несовпадения тех же самых множеств P и Q является расстояние Хаусдорфа между ними [12]

$$H(P, Q) = \max\{\sup_{p \in P} d(p, Q), \sup_{q \in Q} d(q, P)\}, \quad (2)$$

где $d(q, P) = \inf_{p \in P} \|p - q\|$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма), q — произвольная точка двумерного евклидова пространства.

Для множества P определим его зеркальное отражение — множество P_1 , координаты которого в некоторой правой декартовой системе координат $ХОУ$ на плоскости определяются правилом: если $(x, y) \in P$, то $(-x, y) \in P_1$. Длину диаметра множества P обозначим как a . Введем меру хиральности по Китайгородскому

$$\mu_K(P) = a^{-2} \inf_{P'_1} L(P, P'_1), \quad (3)$$

и меру хиральности по Хаусдорфу

$$\mu_H(P) = a^{-1} \inf_{P'_1} H(P, P'_1), \quad (4)$$

где P'_1 — всевозможные сдвиги и вращения множества P_1 .

Замечание 1. В работах [2, 10, 13] мера хиральности, использующая меру несовпадения множеств (1) вводится несколько иным образом. В отличие от (3) в качестве нормировочного множителя используется число $[\text{mes}(P)]^{-1}$ вместо a^{-2} . При таком выборе нормировочного множителя мера хиральности в некоторых случаях имеет неправильное предельное поведение: при непрерывной трансформации исходного хирального множества в ахиральное (в смысле введенной меры (1) несовпадения множеств друг с другом) она стремится к конечному значению, а не к нулю. Именно с учетом этого обстоятельства был выбран нормировочный множитель a^{-2} в выражении (3).

Замечание 2. Для хиральных множеств n -мерного евклидова пространства мера хиральности по Китайгородскому модифицируется следующим образом: вместо нормировочного множителя a^{-2} в правой части (3) используется нормировочный множитель a^{-n} .

Меры хиральности (3) и (4) инвариантны относительно преобразования подобия, примененного к множеству P . Поэтому совокупность всех множеств, полученных применением к P преобразований трансляции, поворота и подо-

бия или их произвольных комбинаций, рассматривается в настоящей работе как один и тот же геометрический объект, относительно которого и определяется мера хиральности.

Несмотря на популярность мер хиральности (3) и (4) и близких к ним, использующих меры несовпадения множеств (1) и (2) [2, 12, 13], они не являются мерами хиральности на борелевских множествах в строгом смысле слова, так как могут обращаться в нуль на хиральных множествах. Покажем это на следующих примерах. На рис. 1а изображено множество, включающее равнобедренный треугольник ABC и изолированную точку O , располагающуюся на продолжении его основания AB . Очевидно, такое множество является хиральным, однако его мера хиральности по Китайгородскому (3) обращается в нуль, в то время как его же мера хиральности по Хаусдорфу (4) является положительной. Возможна и противоположная ситуация, когда мера (3) для хирального объекта положительна, а мера (4) для него же обращается в нуль. Соответствующий пример такого множества показан на рис. 1б, где левая закрашенная половина равнобедренного треугольника ABC — треугольник AOC состоит из точек с рациональными координатами, а правая половина — треугольник OBC содержит все точки, в нее входящие. Таким образом, проблема построения мер хиральности для достаточно широкого класса множеств все еще остается актуальной.

Замечание 3. Для рассмотренного на рис. 1 примера можно построить еще одну меру хиральности, являющуюся линейной комбинацией с положительными весами мер (3) и (4),

например, $\mu_{KH}(P) = \mu_K(P) + \mu_H(P)$. Мера хиральности $\mu_{KH}(P)$ положительна для обоих хиральных множеств, показанных на рис. 1, но она и любая сложная функция мер (3) и (4) не представляют универсальный критерий хиральности на классе борелевских множеств. В самом деле, пусть левая (серая) половина равнобедренного треугольника ABC на рис. 1б включает в себя все точки за исключением точек с рациональными координатами, а правая не закрашенная половина по-прежнему содержит все входящие в нее точки. Тогда обе меры (3) и (4) обращаются в нуль для такого хирального геометрического объекта. Следовательно, мера хиральности, представляющая собой сложную функцию мер (3) и (4), также обращается в нуль, так как в противном случае она отлична от нуля на ахиральных геометрических объектах.

Обратим внимание, что введенные меры хиральности (3) и (4) могут быть использованы для более узкого, но все же еще достаточно широкого класса ограниченных геометрических объектов, таких как геометрические фигуры и тела, ограниченные достаточно регулярной границей, и их конечные объединения и пересечения. Для такого рода объектов какая-либо из мер хиральности (3) или (4) обращается в нуль тогда и только тогда, когда соответствующий объект является ахиральным. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением плоских треугольников, выпуклых четырехугольников и пространственной спирали.

В дальнейшем в целях уменьшения вычислительных затрат для введенного выше класса геометрических объектов воспользуемся центриро-

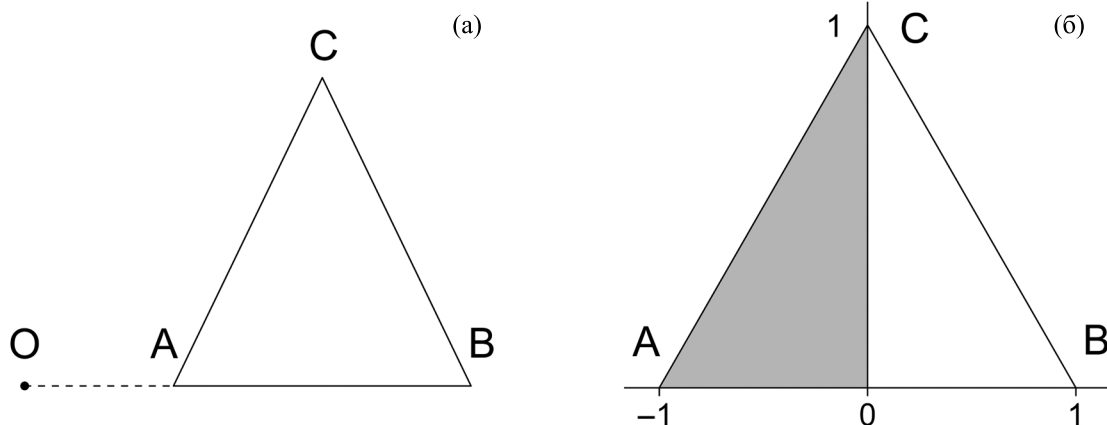


Рис. 1. Примеры хиральных множеств: а) равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$) и изолированная точка O на продолжении OA стороны AB ; б) левая половина равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) (закрашена серым цветом) состоит из точек с рациональными координатами, а правая не закрашенная половина содержит все входящие в нее точки.

ванными мерами хиральности, отличающимися от приведенных в (3) и (4) только тем, что геометрический центр множества-отражения P'_1 помещается в геометрический центр множества P – точку $O(x_O, y_O)$, а вращения происходят вокруг точки O

$$\begin{aligned} x_O &= \int_P x dx dy / \int_P dx dy, \\ y_O &= \int_P y dx dy / \int_P dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, центрированные меры хиральности принимают положительные значения на хиральных объектах выбранного выше класса и обращаются в нуль на ахиральных объектах. В дальнейшем для центрированных мер хиральности, когда это не вызывает недоразумений, сохраним прежние обозначения.

3. Помимо хиральных геометрических объектов в естественнонаучных и технических приложениях рассматривают левосторонние и правосторонние объекты. Одним из примеров таких объектов является винт с правой или левой резьбой. Очевидно, самым простым способом разделения всех хиральных объектов на правосторонние и левосторонние является произвольное отнесение объекта и его зеркального отражения к той или другой стороне. Этот способ может быть оправдан в отношении конечной совокупности разнородных и не связанных друг с другом объектов, но он вряд ли уместен для бесконечного множества в чем то сходных объектов. Для сходных объектов, использующих меры несовпадения друг с другом (1) или (2), предпочтительнее иметь другой способ разделения множеств на “правые” и “левые” версии.

В качестве такого примера рассмотрим совокупность треугольных объектов. Треугольный объект представляет собой множество треугольников, совпадающих друг с другом после соответствующих преобразований сдвигов, вращений и подобия. Для однозначного описания треугольного объекта воспользуемся рис. 2а, где в треугольнике ABC угол A равен α , угол B равен β , а угол C равен $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Треугольник $A_1B_1C_1$ является его отражением относительно оси, проходящей через общий геометрический центр O обоих треугольников перпендикулярно стороне AB . На рис. 2б отраженный треугольник $A_1B_1C_1$ повернут вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ .

В целях удобства примем, что сторона AB является наибольшей. В этом случае положительные числа α и β удовлетворяют неравенствам

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \pi / 2 - \alpha / 2 \quad (6)$$

и

$$0 < \beta < \alpha \leq \pi - 2\alpha. \quad (7)$$

Области (6) и (7) значений угловых параметров α и β исчерпывают всевозможные треугольные объекты. Прямые $\beta = \alpha$, $\beta = \pi / 2 - \alpha / 2$ и $\beta = \pi - 2\alpha$ соответствует всевозможным равнобедренным треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$, которые являются ахиральными и характеризуются нулевыми значениями мер хиральности (3) и (4), непрерывно зависящими от α и β . Любой точке (α, β) области (6), обозначающей некоторый треугольник ABC , соответствует точка (β, α) области (7), отвечающая отраженному треугольнику $A_1B_1C_1$. Такое взаимно однозначное соответствие точек областей (6) и (7) позволяет вве-

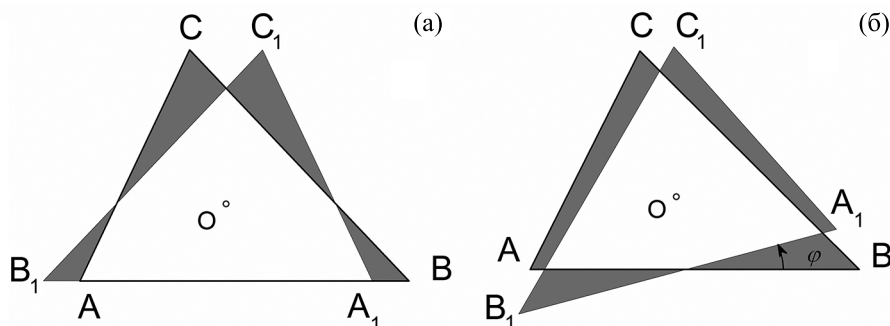


Рис. 2. Треугольник ABC и его отражение – треугольник $A_1B_1C_1$ (серым цветом покрашено множество, образующее симметрическую разность этих треугольников): а) стороны AB и A_1B_1 лежат на одной прямой, а треугольник $A_1B_1C_1$ является отражением треугольника ABC относительно перпендикуляра к стороне AB , проходящего через геометрический центр O обоих треугольников; б) отраженный треугольник $A_1B_1C_1$ повернут вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ .

сти понятие левостороннего треугольника, если его угловые параметры (α, β) лежат в области (6), и правостороннего треугольника, если они принадлежат области (7). Любая непрерывная кривая, соединяющая точку области (6) с точкой области (7) проходит через нули мер хиральности (3) и (4). Такое положение дел позволяет ввести индекс хиральности треугольника

$$\chi(\beta, \alpha) = -\chi(\alpha, \beta), \quad |\chi(\alpha, \beta)| = \mu(\alpha, \beta), \quad (8)$$

где μ обозначает одну из мер хиральности (3) или (4), считая индекс положительным ($\chi(\alpha, \beta) > 0$), например, если точка (α, β) лежит в области (7) правосторонних треугольников, и отрицательным, когда она находится в области (6) левосторонних треугольников.

Полная картина распределения значений знака индекса хиральности треугольника для всех возможных значений угловых параметров треугольника $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < \pi$ представлена на рис. 3

Обратим внимание, что подобласти “6” и “1” на рис. 3 соответствуют неравенствам (6) и (7). Для определения значений индекса во всей области, показанной на рис. 3, достаточно знать его значения в подобласти “1” и получить оставшиеся значения в остальных подобластях, воспользовавшись равенствами

$$\begin{aligned} \chi(\beta, \alpha) &= -\chi(\alpha, \beta) = \\ &= \chi(\beta, \pi - \alpha - \beta) = \chi(\pi - \alpha - \beta, \alpha), \end{aligned} \quad (9)$$

вытекающими из тождества $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

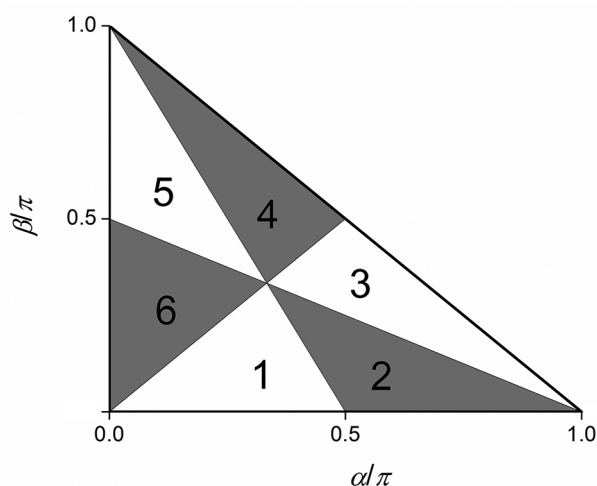


Рис. 3. Область допустимых значений угловых параметров треугольника $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < \pi$. Светлые подобласти “1”, “3” и “5” соответствуют положительным, а темные подобласти “2”, “4” и “6” отрицательным значениям индекса хиральности треугольника.

В соответствии с (9) каждому хиральному треугольному объекту в области угловых параметров на рис. 3 соответствует ровно три различных точки в нечетных подобластях для правосторонних треугольников и в четных подобластях для левосторонних треугольников.

Линии уровня численных значений центрированных мер (индексов) хиральности по Кийтагородскому $\mu_K(\alpha, \beta)$ и по Хаусдорфу $\mu_H(\alpha, \beta)$ для области (7) показаны на рис. 4

На границах области (7) (линия 1 на рис. 4а и 4б)) обе меры хиральности могут быть доопределены по непрерывности нулем. Точка максимума “о” отвечает “наиболее хиральному” треугольнику для соответствующей меры хиральности. Параметры “наиболее хиральных” треугольников для других мер хиральности приведены в работе [15].

Таким образом, треугольник является наиболее простым плоским геометрическим объектом среди многоугольников. Для него проблема выбора стороны хиральности (правой или левой) решается исчерпывающим образом.

Для сравнения со случаем треугольных объектов рассмотрим плоские выпуклые четырехугольные объекты (множество выпуклых четырехугольников на плоскости, которые можно наложить друг на друга в результате применения к ним преобразований сдвига, поворота и подобия). В отличие от двумерного пространства угловых параметров треугольника соответствующее пространство угловых параметров выпуклого четырехугольного элемента четырехмерно (см. рис. 5).

Ахиральные выпуклые четырехугольники составлены из двух равнобедренных треугольников с общим основанием AC ($\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$) или представлены всевозможными равнобокими трапециями ($\beta = \delta$, $\alpha + 2\beta + \gamma = \pi$ или $\alpha = \gamma$, $\beta + 2\gamma + \delta = \pi$).

Отметим, что множество хиральных выпуклых четырехугольных объектов является связным: любая точка четырехмерного пространства угловых параметров, соответствующая хиральному четырехугольнику, может быть соединена непрерывной кривой с точкой, описывающей отраженный четырехугольник, без пересечения с точками множества ахиральных четырехугольных объектов. Одним из мыслимых способов разделения выпуклых четырехугольников на “правые” и “левые” является построение гиперповерхностей-перегородок, запрещающих

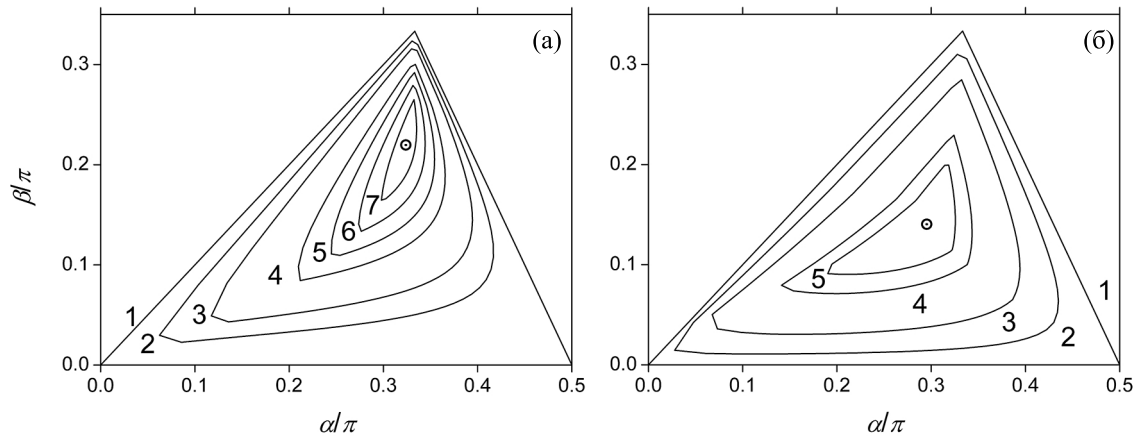


Рис. 4. Линии уровня численных значений центрированных мер (индексов) хиральности в области (7): а) по Китайгородскому $\mu_K(\alpha, \beta)$: 1 – граница области (7); 2 – $\mu_K = 0.01$; 3 – $\mu_K = 0.02$; 4 – $\mu_K = 0.020$; 5 – $\mu_K = 0.05$; 6 – $\mu_K = 0.06$; 7 – $\mu_K = 0.07$; “о” обозначает точку глобального максимума $\alpha / \pi = 0.32384$, $\beta / \pi = 0.21973$, $\mu_K = 0.079222$; б) по Хаусдорфу $\mu_H(\alpha, \beta)$: 1 – граница области (7); 2 – $\mu_H = 0.02$; 3 – $\mu_H = 0.05$; 4 – $\mu_H = 0.10$; 5 – $\mu_H = 0.12$; “о” обозначает точку глобального максимума $\alpha / \pi = 0.29528$, $\beta / \pi = 0.14043$, $\mu_H = 0.15484$.

непрерывные пути, не пересекающие точки ахиральных объектов. Однако число возникающих при этом “почти изолированных” областей в пространстве угловых параметров может достигать нескольких сотен, что очевидным образом затруднит классификацию объектов на право- и левосторонние и сделает ее неудобной для практических применений. С повышением размерности пространства параметров выбранного класса геометрических объектов ситуация с разделением последних на “левые” и “правые” еще более драматически усложняется. Тем не менее на некоторых сужениях класса выпуклых четырехугольных объектов разделение последних на “левые” и “правые” производится достаточно просто, если речь идет о классе трапеций или о классе четырехугольников, содержащих равнобедренный треугольник, основание которого является диагональю этого четырехугольника. Пространства угловых параметров указанных объектов трехмерны. В них существует двумерные поверхности, соответствующие ахиральным объектам и разделяющие хиральные объекты и их отражения, что позволяет относить такие объекты к правосторонним или левосторонним.

4. Рассмотрим пространственную спираль, описываемую винтовой линией в некоторой правой декартовой системе координат OXYZ

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = h\phi, \\ r &\in (0, +\infty), \quad h \in (-\infty, +\infty), \quad \phi \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (10)$$

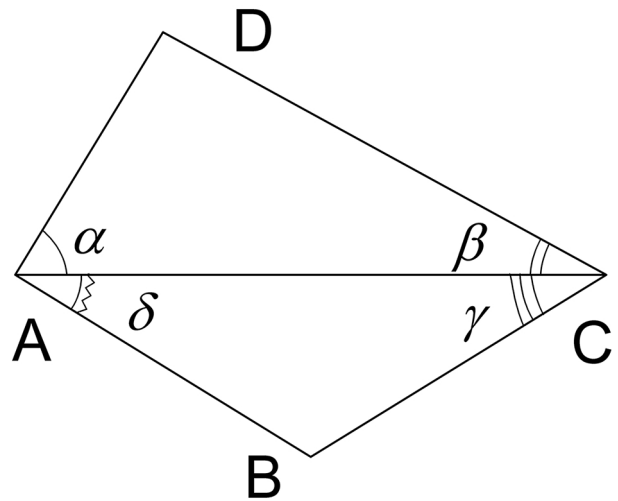


Рис. 5. Параметризация выпуклого четырехугольника с помощью четырех независимых положительных угловых параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$: $\alpha + \beta < \pi$, $\delta + \gamma < \pi$, $\beta + \gamma < \pi$, $\alpha + \delta < \pi$.

Все спирали, для которых отношение $\lambda = h/r$ имеет одно и то же численное значение, будем рассматривать как один и тот же геометрический объект. В случае $\lambda = 0$ спираль (10) вырождается в окружность радиуса r , лежащую в плоскости XOY с центром в начале координат – точке O и являющуюся плоским ахиральным объектом. Параметрическое пространство, описывающее пространственную спираль как геометрический объект, является одномерной прямой

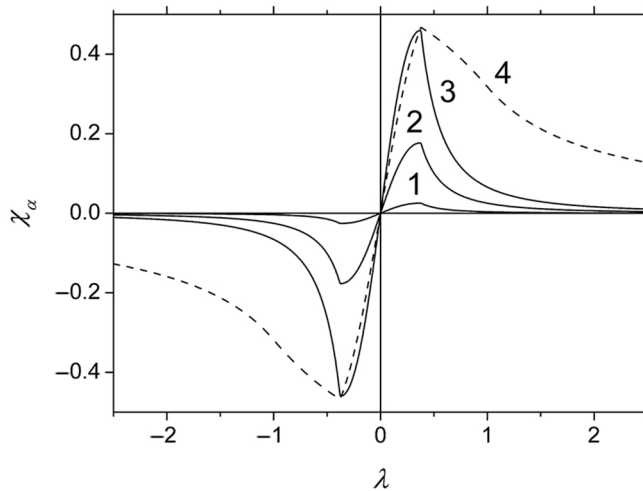


Рис. 6. Зависимости различных версий индексов хиральности пространственной спирали (10) от безразмерного параметра $\lambda = h/r$: 1 – $\chi_P(\lambda, \pi/3)$; 2 – $\chi_P(\lambda, \pi/2)$; 3 – $\chi_P(\lambda, 2\pi/3)$; 4 – $\chi_H(\lambda)$ (пунктирная линия).

$\lambda \in (-\infty, +\infty)$, на которой точка $\lambda = 0$, соответствующая окружности, разделяет правосторонние спирали ($\lambda > 0$) и левосторонние спирали ($\lambda < 0$) друг от друга. При $|\lambda| \rightarrow +\infty$ пространственная спираль непрерывно трансформируется в пределе в геометрический объект “отрезок прямой”, принадлежащий классу ахиральных множеств. Поэтому мера хиральности $\mu(\lambda)$ для спирали должна обращаться в нуль при $\lambda = 0$ и стремиться к нулю при $|\lambda| \rightarrow +\infty$. Помимо меры хиральности $\mu(\lambda)$ для спирали можно ввести индекс хиральности $\chi(\lambda)$ с помощью равенств

$$\chi(-\lambda) = -\chi(\lambda), |\chi(\lambda)| = \mu(\lambda), \quad (11)$$

который принимает положительные значения для правосторонних спиралей и отрицательные значения для левосторонних спиралей.

Существует также альтернативный способ определения индекса хиральности с использованием некоторой псевдоскалярной функции [16, 17].

Введем псевдоскалярный индекс хиральности, зависящий от двух числовых параметров λ и ϕ , как смешанное произведение

$$\chi_P(\lambda, \phi) = a^{-3} ([\mathbf{r}(\phi) - \mathbf{r}(0), \mathbf{r}(2\phi) - \mathbf{r}(\phi)], \mathbf{r}(3\phi) - \mathbf{r}(2\phi)), \quad (12)$$

где координаты радиуса вектора $\mathbf{r}(\phi)$ определяются равенствами (10), а параметр a является диаметром множества (в рассматриваемом случае спирали (10)).

Индекс хиральности по Хаусдорфу $\chi_H(\lambda)$ определим с помощью равенств (11) с использованием централизованной меры хиральности (4), т.е. полагая $\mu(\lambda) = \mu_H(P)$, где множество P состоит из точек спирали (10), а все вращения происходят относительно начала координат – точки $O(0, 0, 0)$, где расположен геометрический центр кривой (10).

На рис. 6 показаны зависимости псевдоскалярного индекса хиральности (12) от параметра λ для различных значений параметра ϕ и аналогичная зависимость индекса хиральности по Хаусдорфу $\chi_H(\lambda)$. Все представленные зависимости обращаются в нуль при $\lambda = 0$ и стремятся к нулю при $|\lambda| \rightarrow +\infty$, т.е. имеют правильное асимптотическое поведение. Псевдоскалярный индекс хиральности $\chi_P(\lambda, \phi)$ характеризуется более быстрым стремлением к нулю с ростом $|\lambda|$ по сравнению с индексом хиральности по Хаусдорфу $\chi_H(\lambda)$ из-за присутствия нормировочного множителя a^{-3} в правой части (12), а не a^{-1} , как это имеет место в правой части (4). Положения максимумов индексов хиральности находятся близко друг от друга и достигаются при $\lambda \approx 0.37$ для кривых (12) и при $\lambda \approx 0.38$ в случае индекса хиральности по Хаусдорфу (см. рис. 6). Таким образом, “наиболее хиральным” спиральям отвечают значения параметра $|\lambda| \in [0.37, 0.38]$ для используемых на рис. 6 версий индексов хиральности.

В заключение отметим, что в общем случае разделение геометрических объектов заданного класса в евклидовом пространстве, характеризуемых некоторой мерой несовпадения их друг с другом (например, (1) или (2)) на правосторонние и левосторонние возможно, если существует их непрерывное (в отношении одной из указанных выше мер несовпадения (1) или (2)) параметрическое описание, в котором каждому такому объекту отвечает некоторая точка (или несколько точек) в соответствующем метрическом пространстве числовых параметров. При этом все пространство параметров может быть разбито на четное число непересекающихся связных частей, в одной половине из которых находятся прообразы хиральных геометрических объектов, а в другой – их отражения. В качестве простейшего примера такого параметрического описания служит область угловых параметров треугольника, показанная на рис. 3.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guye P.-A.* Influence de la constitution chimique des dérivés du carbone sur le sens et les variations de leur pouvoir rotatoire // *Compt. Rend. (Paris)* 1890. V. 110. P. 714–716.
<http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3066&I=766&M=tdm>
2. *Gilat G.* Chiral coefficient—a measure of the amount of structural chirality // *J. Phys. A Math. Gen.* 1989. V. 22. P. L545–L550.
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/13/003>
3. *Gilat G.* On quantifying chirality — Obstacles and problems towards unification // *J. Math. Chem.* 1994. V. 15. P. 197–205.
<https://doi.org/10.1007/BF01277559>
4. *Zimpel Z.* A geometrical approach to the degree of chirality and asymmetry // *J. Math. Chem.* 1993. V. 14. P. 451–465.
<https://doi.org/10.1007/bf01164481>
5. *Zabrodsky H., Avnir D.* Continuous Symmetry Measures. 4. Chirality // *J. Am. Chem. Soc.* 1995. V. 117. P. 462–473.
<https://doi.org/10.1021/ja00106a053>
6. *Petitjean M.* About second kind continuous chirality measures. 1. Planar sets // *J. Math. Chem.* 1997. V. 22. P. 185–201.
<https://doi.org/10.1023/A:1019132116175>
7. *Petitjean M.* Chirality and Symmetry Measures: A Transdisciplinary Review // *Entropy* 2003. V. 5. № 3. P. 271–312.
<https://doi.org/10.3390/e5030271>
8. *Petitjean M.* Chirality in metric spaces // *Optim Lett.* 2020. V. 14. P. 329–338.
<https://doi.org/10.1007/s11590-017-1189-7>
9. *Dryzun C., Avnir D.* Chirality Measures for Vectors, Matrices, Operators and Functions // *ChemPhysChem*. 2011. V. 12. P. 197–205.
<https://dx.doi.org/10.1002/cphc.201000715>
10. *Mezey P.G.* Chirality Measures and Graph Representations // *Computers Math. Applic.* 1997. V. 34. № 11. P. 105–112.
[https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(97\)00224-1](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(97)00224-1)
11. *Buda A.B., Auf der Heyde T.P.E., Mislow K.* On Quantifying Chirality // *Angewandte Chemie*. 1992. V. 31. № 8. P. 989–1007.
<https://doi.org/10.1002/anie.199209891>
12. *Buda A.B., Mislow K.A.* Hausdorff chirality measure // *J. Am. Chem. Soc.* 1992. V. 114. № 15. P. 6006–6012.
<https://doi.org/10.1021/ja00041a016>
13. *Buda A.B., Mislow K.* On Geometric Measures of Chirality // *J. Mol. Struct.* 1991. V. 232. P. 1–12.
[https://doi.org/10.1016/0166-1280\(91\)85239-4](https://doi.org/10.1016/0166-1280(91)85239-4)
14. *Fowler P.W.* Quantification of chirality: attempting the impossible // *Symmetry: Culture and Science*. 2005. V. 16. № 4. P. 321–334.
<https://symmetry.hu/oldsite/content/fowler-05-4.pdf>
15. *Rassat A., Fowler P.W.* Any Scalene Triangle Is the Most Chiral Triangle // *Helvetica Chimica Acta*. 2003. V. 86. P. 1728–1740.
<https://doi.org/10.1002/hlca.200390143>
16. *Osipov M.A., Pickup B.T., Fehervari M., Dunmur D.A.* Chirality measure and chiral order parameter for a two-dimensional system // *Molecular Physics* 1998. V. 94. № 2. P. 283–287.
<https://dx.doi.org/10.1080/002689798168150>
17. *Kriksin Y.A., Potemkin I.I., Khalatur P.G.* Chirality in Self-Assembling Rod-Coil Copolymers: Macroscopic Homochirality Versus Local Chirality // *Polymer Science, Series C*. 2018. V. 60. Suppl. 1. P. S135–S147.
<https://dx.doi.org/10.1134/S1811238218020133>
18. *Kitaigorodskii A.I.* Organic Chemical Crystallography, NY: Consultants Bureau, 1961. 541 p.

ON QUANTITATIVE ASSESSMENT OF CHIRALITY: RIGHT-SIDED AND LEFT-SIDED GEOMETRIC OBJECTS

Yu. A. Kriksin^a and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Two methods for quantitatively assessing the chirality of a set are considered, the first of which uses the calculation of the area of their symmetric difference of two sets as a measure of the discrepancy between them, and the second uses the Hausdorff distance between them. It is shown that these methods, generally speaking, do not provide a correct quantitative estimate for a fairly wide class of sets, such as bounded Borel sets. Using the example of flat triangles and convex quadrangles, the problem of dividing geometric objects into right-handed and left-handed is considered. For triangles, level lines of two versions of the chirality measure were calculated on the plane of the angular parameters. For a spatial spiral, the values of two versions of the chirality index are found, based respectively on the calculation of the mixed product of vectors and the Hausdorff distance between two sets.

Keywords: chirality, measure and index of chirality, left-handed and right-handed objects

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ А. Г. ПОСТНИКОВА В ПОЛЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

© 2024 г. Х. Аль-Ассад^{1, *}

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим

Получено 19.04.2024 г.

После доработки 04.05.2024 г.

Принято к публикации 18.05.2024 г.

Получен новый результат, обобщающий формулу А.Г. Постникова об индексах на случай степени числа 2. Исследована мультипликативная структура приведённых систем вычетов по модулю степени простого идеала. Установлены оценки некоторых сумм характеров в полях алгебраических чисел.

Ключевые слова: формула Постникова, поля алгебраических чисел, суммы характеров, кольца вычетов по модулю степени простого идеала

DOI: 10.31857/S2686954324030048, EDN: YBNQFB

1. ФОРМУЛА А.Г. ПОСТНИКОВА ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ НЕЧЕТНЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Пусть q — нечетное простое число, $n \geq 1$ — целое число, и пусть g — примитивный корень в $(\mathbb{Z} / q^n \mathbb{Z})^\times$. Обозначим через $\text{ind}_g(\cdot)$ соответствующую функцию индекса.

Если n представляется в виде $n = \alpha \tilde{f} - \mu(\tilde{f})$, где $\tilde{f}, \mu(\tilde{f})$ — целые, и $0 \leq \mu(\tilde{f}) \leq \tilde{f} - 1$ и $(\alpha, q) = 1$, тогда положим f , равному максимальному значению среди таких $\tilde{f}$. Определим $\mu = \mu(f)$ если $n = \alpha q^f - \mu(\tilde{f})$, и $\mu = -1$ в противном случае.

Теорема 1. Существует многочлен $f(u) = a_{n+\mu} u^{n+\mu} + \dots + a_1 u$ степени $n + \mu$ с целыми коэффициентами такой, что при любом целом и справедливо сравнение

$$\frac{\text{ind}_g(1 + qu)}{q - 1} \equiv \Lambda f(u) \pmod{q^{n-1}}.$$

Пусть $k = k' q^\tau$, где $\tau, k' \in \mathbb{Z}$, и $(k', q) = 1$. Тогда $a_k = (-1)^{k+1} q^{k-1-\tau} x_k$, где x_k есть решение сравнения $k' x_k \equiv 1 \pmod{q^{n-k+\tau}}$. Более того, Λ — решение сравнения $\frac{\text{ind}_g(1 + qu)}{q - 1} \equiv \Lambda f(1) \pmod{q^{n-1}}$ и $(\Lambda, q) = 1$.

Кроме того, при любом целом и справедливо сравнение

$$\begin{aligned} \text{ind}_g(a + qu) &\equiv \text{ind}_g(a) + \Lambda(q - 1)f(a'u) \pmod{q^{n-1}}; \\ aa' &\equiv 1 \pmod{q}. \end{aligned}$$

2. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ А. Г. ПОСТНИКОВА НА СТЕПЕНИ ПРОСТОГО ЧИСЛА 2

Пусть $n \geq 3$ — целое число, и g порождающий элемент подгруппы $(\mathbb{Z} / 2^n \mathbb{Z})_1^\times \subset (\mathbb{Z} / 2^n \mathbb{Z})^\times$ вычетов, сравнимых с 1 по модулю 4.

Пусть $d = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Положим $\varepsilon(n) = 1$, если n четное, и $\varepsilon(n) = 0$, если n нечетное. Если d представляется в виде $d = \alpha 2^{\tilde{f}} - \mu(\tilde{f})$, где $\tilde{f}, \mu(\tilde{f})$ — целые, и $0 \leq \mu(\tilde{f}) \leq \frac{\tilde{f} + \varepsilon(n)}{2}$ и α нечетное, тогда положим f , равному максимальному значению среди таких $\tilde{f}$. Определим $\mu = \mu(f)$ если $d = \alpha 2^{\tilde{f}} - \mu(\tilde{f})$, и $\mu = 0$ в противном случае.

Теорема 2. Существует многочлен $f(u) = a_{d+\mu} u^{d+\mu} + \dots + a_2 u^2 + a_1 u$ степени $d + \mu$ с целыми коэффициентами такой, что при любом целом и справедливо сравнение

$$\text{ind}_g(1 + 4u) \equiv \Lambda f(u) \pmod{2^{n-2}}.$$

Пусть $k = 4^\tau k'$, где $\tau, k' \in \mathbb{Z}$, и $(k', 4) \leq 2$. Тогда $a_k = (-1)^{k+1} 4^{k-1-\tau} x_k$ если $(k', 4) = 1$, и

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: lhbrh0@gmail.com

$a_k = (-1)^{k+1} \frac{4^{k-1-\tau}}{2} x_k$ если $(k', 4) = 2$, где x_k есть решение сравнения $k'x_k \equiv 1 \pmod{2^{n-2}}$ если $(k', 4) = 1$, и $\frac{k'}{2}x_k \equiv 1 \pmod{2^{n-2}}$ если $(k', 4) = 2$. Более того, Λ — решение сравнения $\text{ind}_g(5) \equiv \Lambda f(1) \pmod{2^{n-2}}$ и Λ нечетное.

3. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА ПРИВЕДЕННЫХ СИСТЕМ ВЫЧЕТОВ ПО МОДУЛЮ СТЕПЕНИ ПРОСТОГО ИДЕАЛА

В оставшейся части данной работы пусть $\mathbb{K}$ — поле алгебраических чисел с дискриминантом Δ , а R — кольцо целых чисел в нем. Пусть P — простой идеал с $N(P) = q^r$ для некоторого рационального простого q и рациональное целое $r \geq 1$. Пусть $n \geq 1$, если $q \neq 2$, или $n \geq 2$, если $q = 2$ — рациональное целое. Рассматриваем мультипликативную группу приведенных вычетов по модулю P^n , обозначаемую $(R/P^n)^\times$. Пусть $(R/P^n)_1^\times \subset (R/P^n)^\times$ — подгруппа вычетов, сравнимых с 1 по модулю P .

Теорема 3. *Имеет место изоморфизм*

$$(R/P^n)^\times \cong (R/P^n)_1^\times \oplus (R/P)^\times.$$

Более того, структура $(R/P^n)_1^\times$, имеет вид

$$(R/P^n)_1^\times \cong \bigoplus_{j=1}^L \mathbb{Z} / q^{k_j} \mathbb{Z},$$

где подгруппы справа аддитивные, а целые числа L, k_j зависят от n и q (в частности, они зависят от того, четно или нет q , и $q \mid \Delta$ или нет (разветвляется ли q или нет), а если $q \mid \Delta$, то от того, насколько велик n по сравнению с индексом ветвления) [3], [4].

Следствие 1. *Каждый $u \in (R/P^n)^\times$ представляется в виде $u = (a, u_1, \dots, u_L)$, где $a \in (R/P)^\times$ и $u_j \in \mathbb{Z} / q^{k_j} \mathbb{Z}$.*

4. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СУММ ХАРАКТЕРОВ

Следствие 2. *Пусть q — нечетное рациональное простое число, $n \geq 1$ — рациональное целое и χ — мультипликативный характер по модулю q^n . Тогда в терминах теоремы 1*

$$\chi(u) = \theta e^{\frac{2\pi i m \Lambda f(u)}{q^{n-1}}}; \quad |\theta| = 1,$$

где m — рациональное целое, а θ зависит только от вычета u по модулю q .

Следствие 3. *Пусть $n \geq 3$ — рациональное целое и χ — мультипликативный характер по модулю 2^n . Тогда в терминах теоремы 2*

$$\chi(u) = \pm e^{\frac{2\pi i m \Lambda f(u)}{2^{n-2}}}; \quad |\theta| = 1,$$

где m — рациональное целое, и знак зависит только от вычета u по модулю 4.

Теорема 4 (И. М. Виноградов).

Пусть $m, L \in \mathbb{Z}$ с $m, L > 0$ и $f(u)$ — многочлен степени $D+1$ с вещественными коэффициентами такой, что некоторый коэффициент $b_{d'}$ удовлетворяет $b_{d'} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$; $(a, q) = 1$, $|\theta| < 1$.

Полагая $\tau = \frac{\ln q}{\ln L}$ если $1 < q \leq L$, $\tau = 1$ если $L < q \leq L^{d'-1}$ и $\tau = d' - \frac{\ln q}{\ln L}$ если $L^{d'-1} < q < L^{d'}$, а $\tilde{l} = \ln\left(\frac{12(d+\mu-1)(d+\mu)}{\tau}\right)$, $\rho = \frac{1}{3D^2\tilde{l}}$, то имеет место оценка

$$\left| \sum_{u=1}^L e^{2\pi i m f(u)} \right| < (8D)^{D\tilde{l}/2} m^{2\rho} L^{1-\tau\rho}.$$

Используя теорему 4, следствия 2 и 3 с известным изоморфизмом $\mathbb{Z} / q^{k_j} \mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z} / q^{k_j-1} \mathbb{Z})_1^\times$, где группа справа — мультипликативная подгруппа вычетов по модулю q^n , сравнимых с 1 по модулю q если $q \neq 2$, а сравнимых с 1 по модулю 4 если $q = 2$, получим основной результат данной работы.

Теорема 5. *Пусть $1 \leq h \leq L$ — рациональное целое, и $\{k_{j_1}, \dots, k_{j_h}\} \subseteq \{k_1, \dots, k_L\}$, так, что $k_{j_i} \geq 4$, если $q = 2$, и $k_{j_i} \geq 3$ если $q \neq 2$. Пусть $A \subseteq (R/P)^\times$, $A' \subseteq \bigoplus_{i=1}^h \mathbb{Z} / q^{k_{j_i}} \mathbb{Z}$ — некоторые подмножества, и пусть, для $j \notin \{j_1, \dots, j_h\}$, b_j, c_j — рациональные целые такие, что $0 \leq b_j \leq c_j < q^{k_j}$. Пусть*

$$S = \{u \in (R/P^n)^\times; a \in A, (u_{j_1}, \dots, u_{j_h}) \in A', b_j \leq u_j \leq c_j \leq q^{k_j}; j \notin \{j_1, \dots, j_h\}\}.$$

Пусть $l = n - 1 + \mu$, тогда, полагая и l удовлетворяет неравенствам $n - 2 \leq l \leq n - 2 + \frac{\ln(\frac{9n}{8})}{\ln q}$.
 $K_1 = \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_h\}} k_j, K_2 = \sum_{t=1}^h k_{j_t}$, справедлива
 общая оценка

$$\left| \sum_S \chi(u) \right| \leq 2^{L-h} (8l)^{\frac{(L-h)l}{2} \ln(12l(l+1)(n-2))} \times \\ \times (q^r - 1) q^{\left(1 - \frac{1}{3l^2(n-2) \ln(12l(l+1)(n-2))} \right) K_1 + K_2},$$

Кроме того, полагая $\tau(x) = 1$ если $q^{1+\frac{1}{n-2}} \leq x \leq q^2$, и $\tau(x) = \frac{\ln q}{\ln \frac{x}{q}}$ если $x \geq q^2$, а

$$w(x) = \frac{\tau(x)}{3l^2 \ln\left(\frac{12l(l+1)}{\tau(x)}\right)}, \text{ то справедлива конкрет-}$$

ная оценка

$$\left| \sum_S \chi(u) \right| \leq |A||A'| \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_h\}} \left((8l)^{\frac{\tau(b_j)}{6lw(b_j)}} b_j^{1-w(b_j)} + (8l)^{\frac{\tau(c_j)}{6lw(c_j)}} c_j^{1-w(c_j)} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равного степени простого числа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 1. С. 11–16.
2. Аль-Ассад Х. О сумме характеров по модулю, равного степени простого числа 2 // Чебышевский сб. 2022. Т. 23. № 2. С. 201–208.
3. Elia M.J., Interlando C., Rosenbaum R. On the Structure of Residue Rings of Prime Ideals in Algebraic Number Fields. Part I: Unramified Primes // International Mathematical Forum. 2010. V. 5. № 56. С. 2795–2808.
4. Elia M.J., Interlando C., Rosenbaum R. On the Structure of Residue Rings of Prime Ideals in Algebraic Number Fields. Part II: Ramified Primes // International Mathematical Forum. 2011. V. 6. № 12. С. 565–589.
5. Виноградов И.М. Избранные труды. М.: Издательство Академии наук СССР, 1952. 428 с.
6. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука; Физматлит, 1987. 368 с.

APPLYING A. G. POSTNIKOV'S FORMULA IN ALGEBRAIC NUMBER FIELDS

Н. Al-Assad^a

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichiy

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

A new result has been obtained generalizing A.G. Postnikov's formula on indices for the case of a power of 2. The multiplicative structure of the reduced residue systems modulo the degree of a prime ideal is investigated. Estimates of some sums of characters in the fields of algebraic numbers are established.

Keywords: Postnikov's formula, algebraic number fields, character sums, residue rings modulo prime-power ideals

МАТРИЦА ВАНДЕРМОНДА В КОММУТАТИВНОМ СЛУЧАЕ

© 2024 г. А. И. Перов^{1, *}, И. Д. Коструб^{1, **}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 24.12.2023 г.

После доработки 04.05.2024 г.

Принято к публикации 12.05.2024 г.

В комплексной банаховой алгебре при условии разделенности и спектральной разделенности сформулированы и доказаны условия обратимости матрицы Вандермонда. Приводятся необходимые и достаточные признаки обратимости матрицы Вандермонда. Формулируются аналоги теоремы Сильвестра.

Ключевые слова: коммутативная банахова алгебра, матрица Вандермонда, теорема Сильвестра, теорема об отображении спектров

DOI: 10.31857/S2686954324030057, **EDN:** YBLKBC

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении алгебраических и дифференциальных уравнений в произвольных банаховых алгебрах естественно возникают матрицы Вандермонда, составленные из корней рассматриваемого алгебраического (характеристического) уравнения обратимость которых влечет за собой многие важные свойства упомянутых уравнений.

2. БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО Γ^n И БАНАХОВА АЛГЕБРА $\Gamma^{n \times n}$

Пусть Γ — коммутативная комплексная банахова алгебра [1], [2], которую мы иногда будем называть *гельфандовой* в честь ученого, внесшего решающий вклад в теорию таких алгебр. Пусть n — фиксированное натуральное число.

Обозначим через Γ^n банахово пространство, являющееся прямым произведением (прямой суммой) $\Gamma^n = \Gamma \times \dots \times \Gamma$ (n раз) и состоящее из столбцов X с компонентами $x_1, \dots, x_n$ из Γ . Алгебраические операции сложения и умножения на комплексные числа, а также на элементы алгебры Γ , определим покомпонентно. Норму в Γ^n введем по правилу $\|X\| = \max\{\|x_j\|, 1 \leq j \leq n\}$.

Обозначим через $\Gamma^{n \times n}$ — алгебру $n \times n$ -матриц $A = (a_{jk})$, где a_{jk} из Γ , $1 \leq j \leq n$. Алгебраические операции сложения и умножения на комплексные числа, а также на элементы алгебры Γ , определим покомпонентно. Каждая матрица A определяет линейный ограниченный оператор в $\Gamma^{n \times n}$. $Y = AX$, обозначается той же буквой и действует по правилу $y_j = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$ при $1 \leq j \leq n$. Произведение AB матриц A и B из $\Gamma^{n \times n}$ определим как произведение линейных операторов в Γ^n . Норма матрицы вводится как операторная $\|A\| = \sup\{\|AX\|, X \in \Gamma^n, \|X\| \leq 1\}$.

3. ОБРАТИМОСТЬ

Напомним, что матрица A из $\Gamma^{n \times n}$ называется *обратимой*, если существует такая матрица B из $\Gamma^{n \times n}$, для которой

$$AB = E \quad (1)$$

и

$$BA = E, \quad (2)$$

где E есть единичная матрица в $\Gamma^{n \times n}$. Если это условие выполнено, то матрица B определяется единственным образом и обозначается A^{-1} .

В рассматриваемом случае каждой матрице A из $\Gamma^{n \times n}$ может быть сопоставлен ее *детерминант* — алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы со своими знаками. Каждый член определителя

¹ Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия

*E-mail: anperov@mail.ru

**E-mail: ikostrub@yandex.ru

снабдим знаком плюс или минус, в зависимости от четности или нечетности перестановки вторых индексов. Это можно сделать с помощью множителя $(-1)^{\pi(\sigma)}$, который равен 1, если перестановка σ четная и тогда число инверсий $\pi(\sigma)$ есть четное число и равен -1 , если перестановка σ нечетная и тогда число инверсий $\pi(\sigma)$ есть нечетное число.

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{\pi(\sigma)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad (3)$$

где суммирование распространяется на все перестановки σ из n элементов. Для нас важно, что матрица A обратима тогда и только тогда, когда обратим ее детерминант. При этом

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}. \quad (4)$$

Теорема 1. Если выполнено условие (1) или (2), то матрица A обратима.

Доказательство теоремы 1. Так как для произведения матриц A и B из $\Gamma^{n \times n}$ имеем

$$\det AB = \det A \det B.$$

То из (1) вытекает

$$\det A \det B = 1,$$

где 1 — это единичный элемент алгебры Γ . В коммутативной алгебре из обратимости произведения вытекает обратимость его сомножителей. Поэтому $\det A$ и $\det B$ обратимы. Поэтому матрица A обратима.

Аналогичные рассуждения проводятся, если выполнено условие (2). Теорема доказана.

4. МАТРИЦА ВАНДЕРМОНДА

Рассмотрим набор, состоящий из n элементов алгебры Γ

$$z_1, z_2, \dots, z_n. \quad (5)$$

Поставим ему в соответствие матрицу $V = (v_{jk})$ из $\Gamma^{n \times n}$, где $v_{jk} = z_k^{j-1}$, при $1 \leq j, k \leq n$, которую естественно назвать *матрицей Вандермонда* порядка n . В развернутой записи она выглядит следующим образом

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для нас важно знать, когда матрица Вандермонда обратима, т. е. существует такая матрица W из $\Gamma^{n \times n}$, для которой

$$VW = E \quad (7)$$

и

$$WV = E. \quad (8)$$

Согласно теореме 1, достаточно проверить одно из них.

Будем говорить, что система (5) лежит в *общем положении*, если матрица Вандермонда (6) обратима.

Отметим полезную формулу

$$\det V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{n \geq j > k \geq 1} (z_j - z_k). \quad (9)$$

Для обратимости матрицы Вандермонда V необходимо и достаточно, чтобы $\det V$ был обратим.

5. ПЕРВЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 2. Матрица Вандермонда $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обратима тогда и только тогда, когда выполнено условие *разделенности*: существует обратная

$$(z_j - z_k)^{-1} \quad \text{при } j \neq k \quad (1 \leq j, k \leq n). \quad (10)$$

Доказательство теоремы 2. Доказательство основано на формуле

$$\det V^{-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{n \geq j > k \geq 1} (z_j - z_k)^{-1}. \quad (11)$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3 (*достаточное условие обратимости*). Если выполнено условие *спектральной разделенности*

$$S(z_j) \cap S(z_k) = \emptyset \quad \text{при } j \neq k \quad (1 \leq j, k \leq n), \quad (12)$$

то матрица Вандермонда $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обратима.

Доказательство теоремы 3. Так как в коммутативном случае $S(a - b) \subseteq S(a) - S(b)$, то из $S(a) \cap S(b) = \emptyset$ вытекает обратимость разности $a - b$. Поэтому теорема 3 вытекает из теоремы 2. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. Если матрица Вандермонда $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обратима, то все элементы $c_1, c_2, \dots, c_n$ последнего столбца обратной матрицы $V^{-1}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обратимы, более определенно

$$\mathbf{c}_j = (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_1)^{-1} \dots (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{j-1})^{-1} \times \\ \times (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{j+1})^{-1} \dots (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_n)^{-1} \quad (13)$$

при $1 < j < n$, аналогично при $j = 1$ и $j = n$.

Доказательство теоремы 4. Доказательство основано на формуле вычисления обратной матрицы через алгебраические дополнения, при этом соответствующее дополнение для j -го элемента последнего столбца обратной матрицы — определитель Вандермонда порядка $n-1$ с параметрами $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_{j+1}, \dots, \mathbf{z}_n$. $\square$

6. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Следующая группа теорем относится к алгебраическому уравнению. Рассмотрим *алгебраическое уравнение* n -й степени, имеющее следующий вид (приведенное уравнение)

$$\mathbf{x}^n + \mathbf{p}_1 \mathbf{x}^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{x} + \mathbf{p}_n = \mathbf{0}. \quad (14)$$

С ним тесно связаны пучок и сопровождающая матрица Фробениуса, которая будет определена в следующем разделе. *Пучок* имеет следующий вид

$$I_n(\lambda) = \lambda^n + \mathbf{p}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1} \lambda + \mathbf{p}_n : \mathbb{C} \rightarrow \Gamma, \quad (15)$$

т. е. является многочленом от некоторого λ степени n с коэффициентами из рассматриваемой алгебры, коэффициенты уравнения $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ принадлежат алгебре Γ .

Мы записываем скалярные величины (комплексные числа) обычным шрифтом, а величины, связанные с алгеброй Γ , — полужирным шрифтом. Выражение $\lambda 1$, где λ — комплексное число, а 1 — единица рассматриваемой алгебры, следуя Т. Като [3], записываем в виде λ .

Те λ из $\mathbb{C}$, для которых $I_n(\lambda)$ не имеет обратного, образуют, по определению, *спектр* S пучка. Это есть непустое ограниченное замкнутое множество. Те λ из $\mathbb{C}$, для которых $I_n(\lambda)$ обратим, образуют, по определению, *резольвентное множество* R пучка. Это непустое неограниченное открытое множество. Возникающая при этом функция

$$\mathbf{r}_n(\lambda) \equiv (\lambda^n + \mathbf{p}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_n)^{-1} : R \rightarrow \Gamma \quad (16)$$

называется *резольвентой* n -го порядка [4].

7. ТЕОРЕМА СИЛЬВЕСТРА

Теорема 5. Пусть $\mathbf{z}$ — корень алгебраического уравнения (14). Тогда справедливо включение

$$S(\mathbf{z}) \subseteq S. \quad (17)$$

Доказательство теоремы 5. Пусть λ из R . Тогда обратима разность

$$\begin{aligned} \lambda^n + \mathbf{p}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_n - (\mathbf{z}^n + \mathbf{p}_1 \mathbf{z}^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_n) = \\ = \lambda^n - \mathbf{z}^n + \mathbf{p}_1 (\lambda^{n-1} - \mathbf{z}^{n-1}) + \dots + \mathbf{p}_{n-1} (\lambda - \mathbf{z}) = \\ = (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \mathbf{z} + \dots + \lambda \mathbf{z}^{n-2} + \mathbf{z}^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1}) (\lambda - \mathbf{z}). \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{y}^{k+1} = \\ = (\mathbf{x}^k + \mathbf{x}^{k-1} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{x} \mathbf{y}^{k-1} + \mathbf{y}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (18)$$

Произведение $(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \mathbf{z} + \dots + \lambda \mathbf{z}^{n-2} + \mathbf{z}^{n-1} + \dots + \mathbf{p}_{n-1}) (\lambda - \mathbf{z})$ обратимо. Поэтому обратима разность $\lambda - \mathbf{z}$. Это означает, что

$$R \subseteq R(\mathbf{z}). \quad (19)$$

Из (19) немедленно вытекает включение (17). Теорема доказана. $\square$

Для матричного уравнения в общем случае эта теорема впервые была доказана Сильвестром. В статье [5] утверждалось, что теорема 5 справедлива без предположения коммутативности соответствующей алгебры. Однако, дальнейший анализ доказательства этой теоремы обнаружил пробел. Некоторое достаточное условие справедливости теоремы Сильвестра в общем случае приведено в статье [6].

8. СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА ФРОБЕНИУСА

Все утверждения данного раздела приводятся без доказательства.

Для алгебраического уравнения (14) матрица Фробениуса имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\mathbf{p}_n & -\mathbf{p}_{n-1} & \dots & \dots & -\mathbf{p}_1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Теорема 6. Пусть алгебраическое уравнение (14) имеет n корней

$$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n, \quad (21)$$

лежащих в общем положении. Тогда справедлива формула

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \operatorname{diag} \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \mathbf{V}^{-1}, \quad (22)$$

где $\mathbf{V}$ — матрица Вандермонда.

Теорема 7. В условиях теоремы 6 справедливо равенство

$$S = \bigcup_{j=1}^n S(z_j). \quad (23)$$

Последняя формула показывает, что спектром алгебраического уравнения (14) естественно назвать спектр ассоциированного с ним пучка. Тогда спектр алгебраического уравнения равняется теоретико-множественной сумме спектров его корней при условии, что они лежат в общем положении.

Теорема 8. Матрица $\mathbf{A}$ обратима тогда и только тогда, когда обратим коэффициент p_n . При выполнении этого условия, обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \square_{p_{n-1}} & \square_{p_{n-2}} & \dots & \square_{p_1} & \square_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где $\square = (-p_k)^{-1}$.

Теорема 9 ([7]). Матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет теореме Гамильтона-Кэли

$$\mathbf{A}^n + p_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + p_{n-1} \mathbf{A} + p_n \mathbf{E} = 0.$$

Теорема 10 ([7]). Для резольвенты матрицы $\mathbf{A}$ справедлива формула

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_k \lambda^k \quad (\lambda \in R(\mathbf{A}) = R), \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_k = \sum_{j=0}^{n-1-k} p_{n-1-k-j} \mathbf{A}^j, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (26)$$

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕЛЬФАНДА

Пусть $\mathbf{M}$ — множество всех ненулевых комплексных гомоморфизмов алгебры Γ [2]. Последнее означает, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из Γ , λ из $\mathbb{C}$, а $\mathbf{m}$ из $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{m}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{m}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{m}(\mathbf{x}\mathbf{y}) &= \mathbf{m}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{y}), \quad \|\mathbf{m}\| = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Отметим, что $\mathbf{M}$ компактное хаусдорфово топологическое пространство. Преобразование Гельфанда имеет вид

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{m}), \quad (28)$$

где $\mathbf{x}(\mathbf{m})$ — комплексная непрерывная функция, определенная на $\mathbf{M}$, причем

$$\mathbf{x}(\mathbf{M}) = S(\mathbf{x}). \quad (29)$$

10. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим контурный интеграл

$$\square = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda) \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda, \quad (30)$$

где $f(\lambda) : G \rightarrow \mathbb{C}$ — (кусочно) аналитическая функция, заданная на открытом множестве G , содержащем весь спектр S пучка, $\mathbf{r}_n(\lambda) \equiv (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n)^{-1}$ — резольвента n -го порядка, а контур $\partial\sigma$ лежит в пересечении $G \cap R$ и окружает спектр S .

Пусть $\Gamma(G)$ — совокупность всех тех $\mathbf{x}$ из Γ , спектр $S(\mathbf{x})$ которых содержится в G . Это множество непусто и открыто. Положим

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tau} f(\lambda) (\lambda - \mathbf{x})^{-1} d\lambda, \quad (31)$$

где контур $\partial\tau$ лежит в пересечении $G \cap R(\mathbf{x})$ и окружает $S(\mathbf{x})$.

Рассмотрим алгебраическое уравнение n -й степени (14) и предположим, что оно имеет n корней $z_1, z_2, \dots, z_n$, лежащих в общем положении. Обозначим через $\mathbf{c}_j$ элементы последнего столбца матрицы $\mathbf{V}^{-1}(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $1 \leq j \leq n$.

При сделанных выше предположениях имеет место формула [8]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda) (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n)^{-1} d\lambda = \sum_{j=1}^n f(z_j) \mathbf{c}_j. \quad (32)$$

11. ТЕОРЕМА ДАНФОРДА

При $n = 1$, положим $z_j = z$ по теореме отображения спектров можно написать

$$S[f(z)] = f[S(z)] \quad (33)$$

(см. формулу (31)).

Теорема 11. *Имеет место включение*

$$S(\square) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{f(\lambda_j)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} : \lambda_j \in S(\mathbf{z}_j), 1 \leq j \leq n \right\}. \quad (34)$$

При этом дополнительно предполагается, что выполнено условие спектральной разделенности (12).

Доказательство теоремы 11. Пусть m из $\mathbf{M}$. Тогда по формуле (32)

$$m \sum_{j=1}^n f(\mathbf{z}_j) \mathbf{c}_j = \sum_{j=1}^n m[f(\mathbf{z}_j) \mathbf{c}_j] = \sum_{j=1}^n m[f(\mathbf{z}_j)] m \mathbf{c}_j. \quad (35)$$

По формуле (31)

$$\begin{aligned} m[f(\mathbf{z})] &= m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda) (\lambda - \mathbf{z})^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda) m(\lambda - \mathbf{z})^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda) (\lambda - m\mathbf{z})^{-1} d\lambda = f(m\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно формуле (13)

$$\begin{aligned} m \mathbf{c}_j &= m \prod_{k \neq j} (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1} = \\ &= \prod_{k \neq j} m(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1} = \prod_{k \neq j} (m\mathbf{z}_j - m\mathbf{z}_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Мы воспользовались тем, что если элемент обратим, то

$$m\mathbf{x}^{-1} = \frac{1}{m\mathbf{x}}. \quad (38)$$

Из (35)–(37), полагая $\lambda_j = m\mathbf{z}_j$, $1 \leq j \leq n$, получаем

$$\begin{aligned} mS &= \sum_{j=1}^n f[m\mathbf{z}_j] \prod_{k \neq j} (m\mathbf{z}_j - m\mathbf{z}_k)^{-1} = \\ &= \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Мы видим, что $\lambda_j \in S(\mathbf{z}_j)$, $1 \leq j \leq n$ и включение (34) установлено. Теорема доказана. $\square$

12. ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Разделенной разностью порядка $n-1$ функции $f(\mathbf{x})$ отвечающей системе узлов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ лежащей в общем положении называется выражение (слева обозначение) [9]

$$\Delta^{n-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n) = \sum_{j=1}^n f(\mathbf{z}_j) \prod_{k \neq j} (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1}.$$

Формулу (32) при этом можно трактовать как интегральное представление разделенной разности $\Delta^{n-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)$, где $f(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле (31). В принятых обозначениях теорема 12 выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} S(\Delta^{n-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)) &\subseteq \\ &\subseteq \left\{ \Delta^{n-1} f(\lambda)(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \lambda_j \in S(\mathbf{z}_j), 1 \leq j \leq n \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
2. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилев Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматлит, 2011.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. Курбатов В.Г., Курбатова И.В. Вычислительные методы спектральной теории. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019.
5. Перов А.И., Коструб И.Д. Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 491. С. 73–77.
6. Крейн М.Г., Лангер Г.К. О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой алгебрах // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 1. С. 39–42.
7. Коструб И.Д. Теорема Гамильтона–Кэли и представление резольвенты // Функци. анализ и его прил. 2023. Т. 57. Вып. 4. С. 130–132.
8. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
9. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.

THE VANDERMONDE MATRIX IN THE COMMUTATIVE CASE

A. I. Perov^a, I. D. Kostруб^a

^aVoronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov

In complex Banach algebra, under the condition of separateness and spectral separateness, the conditions for the reversibility of the Vandermonde matrix are formulated and proved. The necessary and sufficient signs of reversibility of the Vandermonde matrix are given. Analogs of Sylvester's theorem are formulated.

Keywords: commutative Banach algebra, Vandermonde matrix, Sylvester's theorem, spectrum mapping theorem

СУБЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАРТИНЕ

© 2024 г. Ю. Л. Сачков^{1, *}

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе

Поступило 27.02.2024 г.

После доработки 28.03.2024 г.

Принято к публикации 10.04.2024 г.

Исследуются две задачи сублоренцевой геометрии на распределении Мартине. Для первой множество достижимости имеет нетривиальное пересечение с плоскостью Мартине, а для второй нет. Описаны множества достижимости, оптимальные траектории, сублоренцевы расстояния и сферы.

Ключевые слова: сублоренцева геометрия, геометрическая теория управления, распределение Мартине

DOI: 10.31857/S2686954324030068, **EDN:** YBFLEK

1. ВВЕДЕНИЕ

Субриманова геометрия изучает многообразия M , в которых расстояние между точками $q_0, q_1 \in M$ есть инфимум длин всех кривых, касающихся заданного распределения и соединяющих q_0 с q_1 [18, 19]. Детальнее, для распределения $\Delta \subset TM$ в каждом пространстве $\Delta_q \subset T_q M$ задано скалярное произведение g_q , и длина кривой $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, касающейся Δ , измеряется как в римановой геометрии. Если в каждом пространстве $\Delta_q \subset T_q M$ задать невырожденную квадратичную форму g_q индекса 1, то на многообразии M будет определена сублоренцева структура (Δ, g) . Здесь естественной является задача отыскания длиннейшей относительно g кривой, соединяющей заданные точки. Сублоренцева геометрия стремится построить теорию, подобную богатой теории субримановой геометрии, и находится в начале своего развития. Основы сублоренцевой геометрии заложены в работах М. Гроховского [20–25], см. также [26–29].

Простейшие задачи субримановой геометрии возникают на левоинвариантном контактном распределении в группе Гейзенберга и на распределении Мартине [18, 19, 33, 34].

Так же как и в субримановой геометрии, простейшая сублоренцева задача возникает на группе Гейзенберга, она полностью исследована [24, 30]. Цель данной работы — рассмотреть две

сублоренцевы задачи на распределении Мартине: описать оптимальный синтез, расстояние и сферы. В первой задаче конус будущего имеет нетривиальное пересечение с касательным пространством к поверхности Мартине; во втором случае это пересечение тривиально. Соответственно в первом случае сублоренцева геометрия существенно сложнее, см. заключение.

2. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА

Пусть $M = \mathbb{R}^3_{x,y,z}$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}$.

Распределение $\Delta = \text{span}(X_1, X_2) \subset TM$ называется распределением Мартине [18, 19, 33, 34]. Плоскость $\Pi = \{x = 0\} \subset M$ называется поверхностью Мартине.

Первая сублоренцева задача на распределении Мартине ставится как следующая задача оптимального управления [31, 32]:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad (1)$$

$$u = (u_1, u_2) \in U_1 = \{u_2 \geq |u_1|\}, \quad (2)$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \quad (3)$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_2^2 - u_1^2} dt \rightarrow \max. \quad (4)$$

Теорема 1. Множество достижимости системы (1), (2) из точки q_0 за произвольное неотрицательное время (каузальное будущее точки q_0) есть

$$\mathcal{A}_1 = \begin{cases} \varphi_3(\xi) \leq \eta \leq \varphi_1(\xi), & \xi \geq 0, \\ \varphi_4(\xi) \leq \eta \leq \varphi_2(\xi), & \xi \leq 0, \end{cases}$$

¹ Институт программных систем
имени А. К. Айламазяна РАН

*E-mail: yusachkov@gmail.com

где $\xi = x / y$, $\eta = (24z - 3x^2y - y^3) / (24y^3)$,
 $\varphi_1(\xi) = \xi(1 - \xi^2) / 8$, $\varphi_2(\xi) = \xi(\xi^2 - 1) / 8$,
 $\varphi_3(\xi) = \xi^3 / 6 - (3\xi^2 + 1) / 24$, $\varphi_4(\xi) = -\xi^3 / 6 - (3\xi^2 + 1) / 24$.

Теорема 2.

• Для любой точки $q_1 \in A_1$ в задаче (1)–(4) существует оптимальная траектория.

• Если $q_1 \notin \Pi$, то оптимальная траектория единственна (с точностью до параметризации); в противном случае существуют ровно две оптимальные траектории, симметричные относительно плоскости Π .

• Экстремальные траектории параметризуются эллиптическими функциями Якоби. Они оптимальны вплоть до первого пересечения с плоскостью Π .

• Анормальные траектории, начинающиеся с дуги на плоскости Π , меняют каузальный тип: сначала они времениподобные, затем светоподобные. Остальные экстремальные траектории сохраняют каузальный тип.

Сублоренцево расстояние $d(q_0, q_1)$ между точками $q_0, q_1 \in M$ определяется как супремум длины (4) для всех траекторий системы (1), (2), соединяющих q_0 с q_1 , если такая траектория существует; в противном случае $d(q_0, q_1) := 0$.

Теорема 3.

• Сужение сублоренцева расстояния $q \mapsto d(q_0, q)$ на A_1 непрерывно, вещественно аналитично на $(\text{int} A_1) \setminus \Pi$, и однородно порядка 1 относительно дилатаций

$$\delta_k : (x, y, z) \mapsto (kx, ky, k^3 z), \quad k > 0, \quad (x, y, z) \in M. \quad (5)$$

• Существуют точки множества ∂A_1 , в которых сублоренцево расстояние $q \mapsto d(q_0, q)$ имеет разрыв первого порядка.

Сублоренцева сфера с центром q_0 радиуса $R > 0$ есть $S_{q_0}(R) := \{q \in M \mid d(q_0, q) = R\}$. В силу равенства $\delta_k(S_{q_0}(R)) = S_{q_0}(kR)$, $k, R > 0$, достаточно описать единичную сферу $S := S_{q_0}(1)$. Обозначим $S_n = S \cap \text{int} A_1$, $S_a = S \cap \partial A_1$.

Теорема 4.

• Множество S_n (соотв. S_a) заполнено концами оптимальных нормальных (соотв. анормальных) траекторий длины 1, начинающихся в q_0 .

• Сфера S есть топологическое многообразие с краем S_a , гомеоморфное замкнутой полуплоскости $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$.

• Сфера S есть стратифицированное пространство с вещественно-аналитическими стратами $S_n^\pm := S_n \cap \{x \gtrless 0\}$, $S_n^0 := S \cap \Pi$, $S_a^\pm := S_a \cap \{x \gtrless 0\}$, $S_a^0 := S_a \cap \Pi = \{(0, 1, 0)\}$. При этом существуют диффеоморфизмы $S_n^\pm \rightarrow \mathbb{R}^2$; $S_n^0, S_a^\pm \rightarrow \mathbb{R}$.

• При гомеоморфном вложении сферы S в полуплоскость $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$ указанные страты отображаются следующим образом: $S_n^\pm \rightarrow \{a \gtrless 0, b > 0\}$, $S_n^0 \rightarrow \{a = 0, b > 0\}$, $S_a^\pm \rightarrow \{a \gtrless 0, b = 0\}$, $S_a^0 \rightarrow \{a = b = 0\}$.

3. ВТОРАЯ ЗАДАЧА

Вторая сублоренцева задача на распределении Мартине ставится как задача оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad (6)$$

$$u = (u_1, u_2) \in U_2 = \{u_1 \geq |u_2|\}, \quad (7)$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \quad (8)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max. \quad (9)$$

Теорема 5. Множество достижимости системы (6), (7) из точки q_0 за произвольное неотрицательное время (каузальное будущее точки q_0) есть

$$A_2 = \{(x, y, z) \in M \mid x \geq |y|, z^1(x, y) \leq z \leq z^2(x, y)\},$$

где $z^1(x, y) = ((x + y)^3 - 4x^3) / 24$, $z^2(x, y) = (4x^3 - (x - y)^3) / 24$.

Теорема 6. Для любой точки $q_1 \in A_2$ в задаче (6) – (9) существует единственная оптимальная траектория (с точностью до параметризации). Экстремальные траектории параметризуются эллиптическими функциями Якоби, оптимальны на всей своей области определения, и сохраняют каузальный тип.

Теорема 7. Сублоренцево расстояние $q \mapsto d(q_0, q)$ непрерывно на M , вещественно аналитично на $\text{int} A_2$, и однородно порядка 1 относительно дилатаций (5).

Теорема 8.

• Сфера S заполнена концами оптимальных нормальных траекторий длины 1, начинающихся в q_0 .

• Сфера S диффеоморфна $\mathbb{R}^2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первая задача принципиально отличается от второй следующими особенностями оптимального синтеза:

- некоторые оптимальные траектории меняют каузальный тип;
- экстремальные траектории имеют точки разреза на поверхности Мартине Π ;
- оптимальный синтез двузначен на Π ;
- сублоренцево расстояние негладко на Π и терпит разрыв первого рода в некоторых точках границы множества достижимости $\partial\mathcal{A}_1$;
- сублоренцева сфера есть многообразие с краем.

Эти особенности связаны с нетривиальным пересечением множества достижимости $\mathcal{A}_1$ (каузального будущего начальной точки q_0) и поверхности Мартине Π .

Оптимальный синтез во второй задаче качественно не отличается от синтеза в сублоренцевой задаче на группе Гейзенберга [30].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications // Amer. Math. Soc. 2002.
2. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019.
3. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 2002. V. 50.
4. *Grochowski M.* Normal forms of germs of contact sub-Lorentzian structures on $\mathbb{R}^3$. Differentiability of the sub-Lorentzian distance // J. Dynam. Control Systems. 2003. V. 9. № 4.
5. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 57. № 9. P. 885–900.
6. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. (N.Y.) 2011. V. 177. № 3. P. 383–394.
7. *Grochowski M.* On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ // Geometric Singularity Theory. Banach Center Publications, Institute of Mathematics. Warsaw: Polish Academy of Sciences, 2004. V. 65.
8. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // Journal of Dynamical and Control Systems. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
9. *Chang D.-C., Markina I. and Vasil'ev A.* Sub-Lorentzian geometry on anti-de Sitter space // J. Math. Pures Appl. 2008. V. 90. P. 82–110.
10. *Korolko A. and Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19. P. 864–889.
11. *Grong E., Vasil'ev A.* Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1, 1)$ and on its universal cover // J. Geom. Mech. 2011. V. 3. № 2. P. 225–260.
12. *Grochowski M., Medvedev A., Warhurst B.* 3-dimensional left-invariant sub-Lorentzian contact structures // Differential Geometry and its Applications. 2016. V. 49. P. 142–166.
13. *Sachkov Yu. L., Sachkova E. F.* Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group // Journal of Dynamical and Control Systems. 2023. V. 29. P. 1129–1159.
14. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Геометрическая теория управления. Физматлит, 2005. Перевод: Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer, 2004.
15. *Сачков Ю. Л.* Введение в геометрическую теорию управления. М.: URSS, 2021. Расширенный перевод: Sachkov Yu. Introduction to geometric control. Springer, 2022.
16. *Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I.* Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case // J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 1997. V. 2. P. 377–448.
17. *Сачков Ю. Л.* Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях // УМН. 2023. Т. 78. № 1 (469). С. 67–166.

SUB-LORENTZIAN GEOMETRY ON THE MARTINET DISTRIBUTION

Yu. L. Sachkov^a

^aA. K. Ailamazyan Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences

Two problems of sub-Lorentzian geometry on the Martinet distribution are studied. For the first, the reachability set has a nontrivial intersection with the Martinet plane, but for the second it does not. Reachable sets, optimal trajectories, sub-Lorentzian distances and spheres are described.

Keywords: Sub-Lorentzian geometry, geometric control theory, Martinet distribution

МНОГОМЕРНАЯ ФУРЬЕ-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БЫСТРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

© 2024 г. Ю. А. Басалов^{1, *}, Н. Н. Добровольский^{1, 2, **}, В. Н. Чубариков^{2, ***}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 26.04.2024 г.

После доработки 26.04.2024 г.

Принято к публикации 22.05.2024 г.

Доказано равенство коэффициентов интерполяционного многочлена по параллелепипедальной сетке для многомерной функции коэффициентам интерполяционного многочлена по равномерной сетке для одномерной функции, для получения которых можно применить быстрое преобразование Фурье по различным схемам.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, решётка линейного сравнения, интерполяционный многочлен, быстрое преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S2686954324030074, **EDN:** YBFCBW

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача интерполяции функций многих переменных является одной из классических задач теории приближений, а построение эффективных алгоритмов вычисления коэффициентов интерполяционных многочленов классической задачей численного анализа. Применение теоретико-числовых подходов позволяет получить в этой области новые результаты.

Параллелепипедальная сетка $M(\vec{a}, N)$, введенная Н.М. Коробовым в 1959 г. [1], состоит из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где $\vec{a}$ набор оптимальных коэффициентов.

Перевод теории оптимальных коэффициентов на язык решёток, сделанный Э. Главкой в 1962 г. [2], позволяет для решётки $\Lambda(\vec{a}, N)$ решить линейного сравнения

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N},$$

¹ Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого, Тула, Россия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: basalov_yurij@mail.ru

**E-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

***E-mail: chubarik2020@mail.ru

рассмотреть параллелепипедальную сетку, как пересечение взаимной решётки с единичным s -мерным кубом

$$\Lambda^*(\vec{a}, N) = \{\vec{x} | \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\},$$

$$M(\vec{a}, N) = \Lambda^*(\vec{a}, N) \cap G_s, \quad G_s = \{\vec{x} | 0 \leq x_v < 1, v = 1, 2, \dots, s\}.$$

Определения и основные свойства параллелепипедальных сеток изложены в [3].

Впервые для приближения функций эти сетки были применены В.С. Рябенским в 1960 г. [4]. О применении параллелепипедальных сеток с точки зрения теории приближений дано подробное изложение в [5].

2. СВЕДЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ФУРЬЕ-ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНОЙ СЕТКЕ К ОДНОМЕРНОЙ

Рассмотрим теоретико-числовые конструкции раскрывающие красоту объекта открытого Н.М. Коробовым.

В соответствии с работами [6], [7] рассмотрим $\mathbb{Z}^s / \Lambda(\vec{a}, N)$. Взяв по одному представителю из каждого класса, получаем полную систему вычетов $M^*(\Lambda)$.

Введем следующее определение:

Определение 1. Пронумерованной полной системой вычетов будем называть

$$M^{**}(\Lambda) = \left\{ \vec{m}_t \mid \vec{m}_t \in M^*(\Lambda), t \equiv m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \pmod{N}, 0 \leq t < N \right\}.$$

В соответствии с работой [8] сформулируем теорему, позволяющую перейти к одномерной Фурье интерполяции.

Теорема 1. Для интерполяционного многочлена функции $f(\vec{x})$ в узлах параллелепипедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ по пронумерованной системы вычетов $M^{**}(\Lambda)$

$$S_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}_t \in M^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) e^{2\pi i(\vec{m}_t, \vec{x})},$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_t, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \times \\ &\times e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s)k}{N}} \end{aligned}$$

справедливо равенство коэффициентов Фурье с одномерным интерполяционным многочленом для функции $f^*(x) = f(x, \{a_2 x\}, \dots, \{a_s x\})$ по равномерной сетке на отрезке $[0, 1]$:

$$S(f^*(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x},$$

где

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^*\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k},$$

$$c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) = c_t.$$

Доказательство. Рассмотрим полную пронумерованную систему вычетов

$$M_1^{**}(\Lambda) = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (N-1, 0, \dots, 0)\}.$$

Интерполяционный многочлен функции $f(x)$ в узлах параллелепипедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ по пронумерованной системы вычетов $M_1^{**}(\Lambda)$ будет

$$\begin{aligned} S_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) &= \\ &= \sum_{\vec{m}_{1,t} \in M_1^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) e^{2\pi i(\vec{m}_{1,t}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) e^{2\pi i k x_1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,k}, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^*\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}. \end{aligned}$$

Легко заметить, что системы вычетов $M_1^{**}(\Lambda)$ и $M^{**}(\Lambda)$ различаются на сдвиги по решётке Λ , а значит и коэффициенты Фурье при соответствующих гармониках совпадают.

Действительно,

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a}, N), M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,t}, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{t}{N} k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \times \\ &\times e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s)k}{N}} = \\ &= c_{M(\vec{a}, N), M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t). \end{aligned}$$

3. О БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Задача интерполяции сводится к получению коэффициентов тригонометрического многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x}$$

в точках $x_j = \frac{j}{N}, j = 0 \dots N-1$. Одним из эффективных способов получения коэффициентов c_k является алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.

Как известно [9], дискретным преобразованием Фурье называется вычисление значений многочлена в комплексных корнях из единицы:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i \frac{kj}{N}},$$

а обратным дискретным преобразованием Фурье называется операция — интерполяция коэффициентов по значениям y_j

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i \frac{kj}{N}},$$

Известно, что с помощью схему Кули-Тьюки [9] для составного $N = \prod_{i=1}^n p_i$ можно получить асимптотическую сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O\left(N \sum_{i=1}^n p_i\right)$ операций.

В работах [10, 11, 12] были предложены алгоритмы построения оптимальных коэффициентов для $N = 2^n$. При использовании таких коэффициентов, можно достичь асимптотической сложности вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \ln N)$ операций.

Для произвольного N использование схемы Радера [13] для простых p_i , также позволяет получить асимптотической сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \ln N)$ операций.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Н.М. Добровольскому за полезные обсуждения данной темы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н.М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 19–25.
2. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte für Mathematik. 1962. V. 66. P. 140–151.
3. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2004.
4. Рябенский В.С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1025–1027.
5. Temlyakov V. Multivariate approximation // Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. V. 32. 550 p.
6. Быковский В.А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 1988. Т. 136 (178). № 4 (8). С. 451–467.
7. Добровольский Н.М., Есаян А.Р., Андреева О.В., Зайцева Н.В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышёвский сборник. 2004. Т. 5. Вып. 1(9). Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. С. 122–143.
8. Родионов А.В., Добровольский М.Н., Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышёвский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 95–121.
9. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки. М.: Радиосвязь, 1985.
10. Добровольский Н.М., Клепикова Н.Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // Препринты ИПФ АН СССР. 1990. № 63. 29 с.
11. Коробов Н.М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 289–292.
12. Бочарова Л.П., Ванькова В.С., Добровольский Н.М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 2. С. 23–28.
13. Rader C. Discrete Fourier Transforms when the Number of DataPoints is Prime // Proc. IEEE. 1968. V. 56. P. 1107–1108.

MULTIDIMENSIONAL FOURIER INTERPOLATION AND FAST FOURIER TRANSFORMS

Yu. A. Basalov^a, N. N. Dobrovolsky^{a, b}, V. N. Chubarikov^b

^aTula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, Russia

^bLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS A.L. Senenov

The equality of the coefficients of the interpolation polynomial over a parallelepipedal grid for a multidimensional function to the coefficients of the interpolation polynomial over a uniform grid for a one-dimensional function is proved, for which the fast Fourier transform can be applied according to various schemes.

Keywords: parallelepipedal grid, linear comparison lattice, interpolation polynomial, fast Fourier transform

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С МАЛЫМ СДВИГОМ И УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

© 2024 г. Д. И. Борисов^{1,*}, Д. М. Поляков^{1,2,**}

Представлено академиком РАН Н.Ю. Лукояновым

Получено 20.02.2024 г.

После доработки 15.05.2024 г.

Принято к публикации 15.05.2024 г.

Рассматривается несамосопряженный оператор Шрёдингера на единичном отрезке с краевыми условиями Дирихле, возмущённый оператором малого сдвига. Основной результат — трехчленная асимптотика собственных значений по номеру, равномерная по малому сдвигу. Также показано, что система собственных и присоединенных функций рассматриваемого оператора образует базис Бари в пространстве функций, квадратично интегрируемых на рассматриваемом единичном отрезке.

Ключевые слова: малый сдвиг, нелокальный оператор, краевое условие Дирихле, спектральная асимптотика

DOI: 10.31857/S2686954324030089, **EDN:** YBDOJJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики собственных значений по номеру для дифференциально-разностного оператора Шрёдингера на единичном отрезке с условиями Дирихле. Основная особенность данного оператора — наличие малого сдвига в свободном члене, который мы рассматриваем как возмущение классического дифференциального оператора Шрёдингера на отрезке.

Краевые задачи для дифференциально-разностных и функционально-дифференциальных уравнений — предмет изучения большого количества работ, мы упомянем только книги [1] и [2] и отдельные статьи [3], [4], [5], а также цитируемую там литературу. Имеющиеся результаты посвящены вопросам существования, единственности, а также гладкости решений. Отметим также исследования по эволюционным дифференциально-разностным уравнениям [6] и [7]. Спектральные вопросы для дифференци-

ально-разностных операторов рассматривались крайне мало, нам известна лишь одна работа [3].

Асимптотические разложения собственных значений по номеру для одномерных дифференциальных операторов Шрёдингера, или кратко спектральные асимптотики — это классическая и очень хорошо исследованная тематика, которая рассматривалась в различных постановках во многих задачах, см., например, книги [8], [9]. Вместе с тем, данные асимптотики выписываются для заданных операторов и оценки остаточных членов в них неявно зависят от выбора оператора, например, от коэффициентов его дифференциального выражения. Если же рассматриваемые операторы зависят от какого-то параметра, то при изменении данного параметра упомянутые асимптотики могут существенно меняться, а оценки остаточных членов могут даже разрушаться. Поэтому для дифференциальных операторов, зависящих от параметра, естественно возникает гораздо более сложная задача о получении спектральных асимптотик, равномерных по малому параметру. Нам известны лишь отдельные работы, см. [10], [11] и содержащиеся там ссылки, в которых такая задача была решена для классического дифференциального оператора Шрёдингера с малым параметром при старшей производной и конкретным потенциалом.

В настоящей работе рассматривается спектральная задача для одномерного оператора

¹ Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, Россия

² Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия

*E-mail: borisovdi@yandex.ru

**E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Шрёдингера на единичном отрезке $[0,1]$ с малым сдвигом в свободном члене. На концах промежутка ставятся краевые условия Дирихле. При определенных условиях гладкости на коэффициенты выписывается трехчленная асимптотика собственных значений по номеру, равномерная по малому сдвигу. Данная асимптотика содержит дополнительные члены по сравнению с классическими асимптотиками из книг [8], [9]. Кроме того, доказывается свойство базисности системы собственных и присоединённых функций. Отметим ещё, что вопросы равномерной резольвентной сходимости для общих многомерных дифференциально-разностных операторов произвольного порядка с малыми сдвигами в младших членах были изучены в недавней статье [12]. Настоящая работа является одним из естественных продолжений цитированной статьи.

2. ЗАДАЧА И РЕЗУЛЬТАТЫ

Через $\dot{W}_2^j(0,1)$, $j \geq 1$, обозначим подпространство пространства Соболева $W_2^j(0,1)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на концах отрезка. Пусть $V = V(x)$ — комплекснозначная функция, заданная на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемая на нём. В пространстве $L_2(0,1)$ определим оператор $\mathcal{H}^0$ с областью определения $\dot{W}_2^2(0,1)$, действующий по правилу

$$\mathcal{H}^0 y = -y'' + Vy.$$

Данный оператор m -секториален. Напомним, что оператор секториален, если множество значений его квадратичной формы (на нормированных функциях) содержится в некотором секторе в комплексной плоскости вида $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - a)| < \theta\}$, где a — вещественно, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. И оператор m -секториален, если дополнительно его резольвентное множество содержит некоторую полуплоскость вида $\operatorname{Re} z \leq b < a$, см. [13, Гл. V, 3.10].

Оператор $\mathcal{H}^0$ обладает компактной резольвентой. Поэтому его спектр состоит из счётного числа дискретных собственных значений [13, Гл. III, 6.8]. Далее этот оператор будем называть предельным.

Оператор $\mathcal{H}^0$ мы возмущаем оператором малого сдвига. Для строгого описания последнего введём в рассмотрение два вспомогательных оператора. Через $\mathcal{L} : L_2(0,1) \rightarrow L_2(R)$ обозна-

чим оператор продолжения нулем вне интервала $(0,1)$, а через $\mathcal{R} : L_2(R) \rightarrow L_2(0,1)$ — оператор сужения на $(0,1)$. Данные операторы действуют следующим образом:

$$\mathcal{L}y := \begin{cases} y & \text{в } (0,1), \\ 0 & \text{вне } (0,1), \end{cases} \quad \mathcal{R}y := y \text{ на } (0,1).$$

Через ε обозначим малый положительный параметр и в пространстве $L_2(R)$ зададим оператор малого сдвига T^ε по правилу

$$(T^\varepsilon y)(x) = y(x + \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть S — комплекснозначная функция, заданная на отрезке $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемая на нём. В пространстве $L_2(0,1)$ определим ещё один оператор:

$$B^\varepsilon y = S(\mathcal{R}T^\varepsilon \mathcal{L}y - y).$$

На произвольной функции $y \in L_2(0,1)$ данный оператор действует следующим образом:

$$(B^\varepsilon y)(x) = S(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

где функция y считается продолженной нулём вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на этот отрезок. Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ оператор B^ε оказывается нулевым.

Основным объектом исследования работы является оператор $\mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{H}^0 + B^\varepsilon$. Этот оператор действует в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) = \mathfrak{D}(\mathcal{H}^0) = \dot{W}_2^2(0,1).$$

На произвольной функции $y \in \dot{W}_2^2(0,1)$ его действие выглядит следующим образом

$$(\mathcal{H}^\varepsilon y)(x) = -y''(x) + V(x)y(x) + S(x)(y(x + \varepsilon) - y(x)),$$

где функция y считается продолженной нулём вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на этот отрезок. При $\varepsilon = 0$ данный оператор совпадает с $\mathcal{H}^0$.

Основная цель настоящей работы — исследовать спектр оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следующий предварительный результат описывает основные свойства оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ является m -секториальным и соответствующая ему секториальная замкнутая форма в пространстве $L_2(0,1)$ задается равенством*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^\varepsilon(u, v) &= (u', v')_{L_2(0,1)} + (Vu, v)_{L_2(0,1)} + \\ &+ (S\mathcal{R}T^\varepsilon \mathcal{L}u - Su, v)_{L_2(0,1)} \end{aligned}$$

на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon) = W_2^1(0,1)$. Существует число Λ , не зависящее от ε , такое что полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \leq \Lambda$ попадает в резольвентные множества операторов $\mathcal{H}^\varepsilon$ для всех $\varepsilon \geq 0$. Операторы $\mathcal{H}^\varepsilon$ имеют компактную резольвенту и их спектры состоят из счетного числа собственных значений с единственной точкой накопления в бесконечности.

Доказательство этой теоремы следует из общих результатов статьи [12, §5], первой теоремы о представлении [13, Гл. VI, §2.1, Теор. 2.1], а также теоремы об операторе с компактной резольвентой [13, Гл. III, §6.8, Теор. 6.29].

По теореме 1 собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \Lambda$. Обозначим их через λ_n , $n \in \mathbb{N}$, и упорядочим в порядке возрастания модулей.

Наш первый основной результат касается асимптотики собственных значений оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при больших номерах n . Через $\chi_I = \chi_I(x)$ обозначим характеристическую функцию отрезка I на вещественной прямой.

Теорема 2. Для собственных значений λ_n оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \pi^2 n^2 + 2 \int_0^1 V(x) \sin^2 \pi n x dx \\ &+ K_n^{\varepsilon,1} + K_n^{\varepsilon,2} + K_n^{\varepsilon,3} + O(n^{-2}), \end{aligned} \quad (1)$$

при $n \rightarrow +\infty$, где

$$\begin{aligned} K_n^{\varepsilon,1} &:= 2 \int_0^1 S(x) \sin \pi n x \times \\ &\times (\chi_{[0,1-\varepsilon]}(x) \sin \pi n(x + \varepsilon) - \sin \pi n x) dx, \\ K_n^{\varepsilon,2} &:= -\frac{\sin \pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^1 (S(x) - V(x)) \times \\ &\times \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) dt - \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(t) dt \right) dx, \\ K_n^{\varepsilon,3} &:= \frac{\sin 2\pi n \varepsilon}{2\pi n} \int_0^{1-\varepsilon} S(x) \times \\ &\times \left(\int_{\max\{0, x-\varepsilon\}}^x S(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{1-\varepsilon} S(t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Оценка остаточного члена в (1) равномерна по ε .

Наш второй основной результат описывает базисность Бари собственных и присоединенных (корневых) функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в $L_2(0,1)$. Напомним, что базисы, которые порождаются системами проекторов, квадратично близкими к полным и минимальным системам ортогональных проекторов, называются базисами Бари.

Теорема 3. Система корневых функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ образует базис Бари в пространстве $L_2(0,1)$.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Кратко обсудим задачу и результаты. Изучается дифференциальный оператор второго порядка на единичном отрезке с краевыми условиями Дирихле. Основная особенность — свободный член содержит сдвиг, который является малым параметром. На коэффициенты оператора накладывается только условие достаточной гладкости. Первый основной результат даёт асимптотику собственных значений по номеру и сформулирован в теореме 2. Так как оператор зависит от малого параметра, причём достаточно нетривиальным образом, асимптотика собственных значений зависит от этого параметра и главное её основное достоинство в том, что оценка остатка в ней равномерна по малому параметру. А именно, остаточный член оценивается величиной Cn^{-2} с константой C , не зависящей от ε и n .

При $\varepsilon = 0$ в асимптотике (1) пропадают члены $K_n^{\varepsilon,j}$, $j = 1, 2, 3$, и она превращается в классическую (см. [9])

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 2 \int_0^1 V(x) \sin^2 \pi n x dx + O(n^{-2}). \quad (2)$$

Поэтому члены $K_n^{\varepsilon,j}$ порождаются непосредственно оператором малого сдвига. Остановимся на них подробнее.

Множители $\sin \pi n \varepsilon$ и $\sin 2\pi n \varepsilon$ дают явное описание взаимодействия малого параметра ε и большого номера n в $K_n^{\varepsilon,2}$ и $K_n^{\varepsilon,3}$, так как оставшиеся интегралы зависят только от малого параметра. Оценки

$$\begin{aligned} |K_n^{\varepsilon,2}| &\leq \frac{\varepsilon |\sin \pi n \varepsilon|}{\pi n} \|S\|_{C[0,1]} (\|S\|_{C[0,1]} + \|V\|_{C[0,1]}), \\ |K_n^{\varepsilon,3}| &\leq \frac{3\varepsilon |\sin 2\pi n \varepsilon|}{4\pi n} \|S\|_{C[0,1]}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

характеризуют поведение слагаемых $K_n^{\varepsilon,2}$ и $K_n^{\varepsilon,3}$.

Наиболее нетривиально поведение слагаемого $K_n^{\varepsilon,1}$. Подходящим интегрированием по частям его можно привести к виду

$$K_n^{\varepsilon,1} = \cos \pi n \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(x) dx - \int_0^1 S(x) dx + O(n^{-1}),$$

где оценка остатка равномерна по ε . Эта формула и (3) позволяют переписать асимптотику (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \pi^2 n^2 + \int_0^1 V(x) dx + \\ & + \cos \pi n \varepsilon \int_0^{1-\varepsilon} S(x) dx - \int_0^1 S(x) dx + O(n^{-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где оценка остатка равномерна по ε . Таким образом, при достаточно больших n собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ локализуются вдоль осциллирующей кривой в комплексной плоскости:

$$\Gamma_\varepsilon := \{z = t^2 + a + a_\varepsilon \cos t\varepsilon, t \in R_+\} \subset \mathbb{C},$$

где

$$\begin{aligned} a &:= \int_0^1 V(x) dx - \int_0^1 S(x) dx, \\ a_\varepsilon &:= \int_0^{1-\varepsilon} S(x) dx. \end{aligned}$$

А именно, собственные значения располагаются вблизи точек на этой кривой, соответствующих $t = \pi n$. Подобный эффект схож с эффектом “спектрального галстука” для собственных значений из работ [10], [11], которые локализовались вблизи кривой на комплексной плоскости, напоминающей галстук, а возмущением было наличие малого параметра при старшей производной. Вместе с тем, наш случай качественно отличается природой возмущения, что приводит к зависимости упомянутой кривой от малого параметра. В частности отметим, что при уменьшении малого параметра период осцилляций кривой увеличивается, а сами осцилляции уменьшаются. Это ни в коем случае не означает, что кривую можно заменить на какую-то иную, не зависящую от ε . Причина в том, что при значениях n порядка $O(\varepsilon^{-1})$ (или больше) функция $\cos \pi n \varepsilon$ в (4) начинает принимать конечные значения, отличные от единицы и в асимптотике возникают дополнительные слагаемые порядка

$O(1)$ по сравнению с классической асимптотикой (2). Кроме того, подчеркнём, что общие результаты статьи [12], применённые к оператору $\mathcal{H}^\varepsilon$, утверждают сходимость резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ к резольвенте предельного оператора $\mathcal{H}^0$. Данная сходимость верна в норме ограниченных операторов, действующих из $L_2(0,1)$ в $W_2^1(0,1)$. Это означает, что оператор малого сдвига является относительно малым возмущением. Вместе с тем, подобное малое возмущение сдвигает собственные значения с большими номерами на величину порядка $O(1)$, порождая тем самым нетривиальный высокочастотный эффект.

Для наглядности на рисунке ниже мы приводим вид кривой Γ_ε в предположении, что $a = 1 + i$, $a_\varepsilon = 2 + 3i$. Таких значений можно легко добиться, предполагая, что функции V и S финитны и обращаются в нуль на отрезке $[1/2, 1]$. В качестве ε мы выбираем два значения $\varepsilon = 0.4$ и $\varepsilon = 0.1$. На рисунках приведена кривая Γ_ε для таких значений ε и указаны две серии точек. Первая серия, отмеченная черными кружками, показывает значения суммы первых двух членов классической асимптотики (2). Вторая серия точек отмечена черными ромбами и показывает сумму первых трех членов асимптотики (4). Как было уже отмечено выше, при уменьшении ε осцилляции кривой также уменьшаются, и это явно демонстрируют наши рисунки. Кроме того, они показывают, что при указанных значениях ε имеется существенный разрыв между членами классической асимптотики (2) и членами асимптотики (4), что является проявлением описанного выше нетривиального высокочастотного эффекта.

Вторым нашим основным результатом является базисность Бари в $L_2(0,1)$ системы корневых функций для оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Заметим, что для рассматриваемого класса операторов не было установлено даже классической базисности Рисса. Известные результаты касались только вопросов полноты и минимальности системы корневых функций. Используя теорему Бари-Маркуса, в настоящей статье нам удалось установить значительно более общий результат.

4. МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Кратко поясним доказательство основных результатов. Оно основано на применении метода подобных операторов, который ранее успешно использовался при получении спектральных асимптотик как для классических, так и нело-

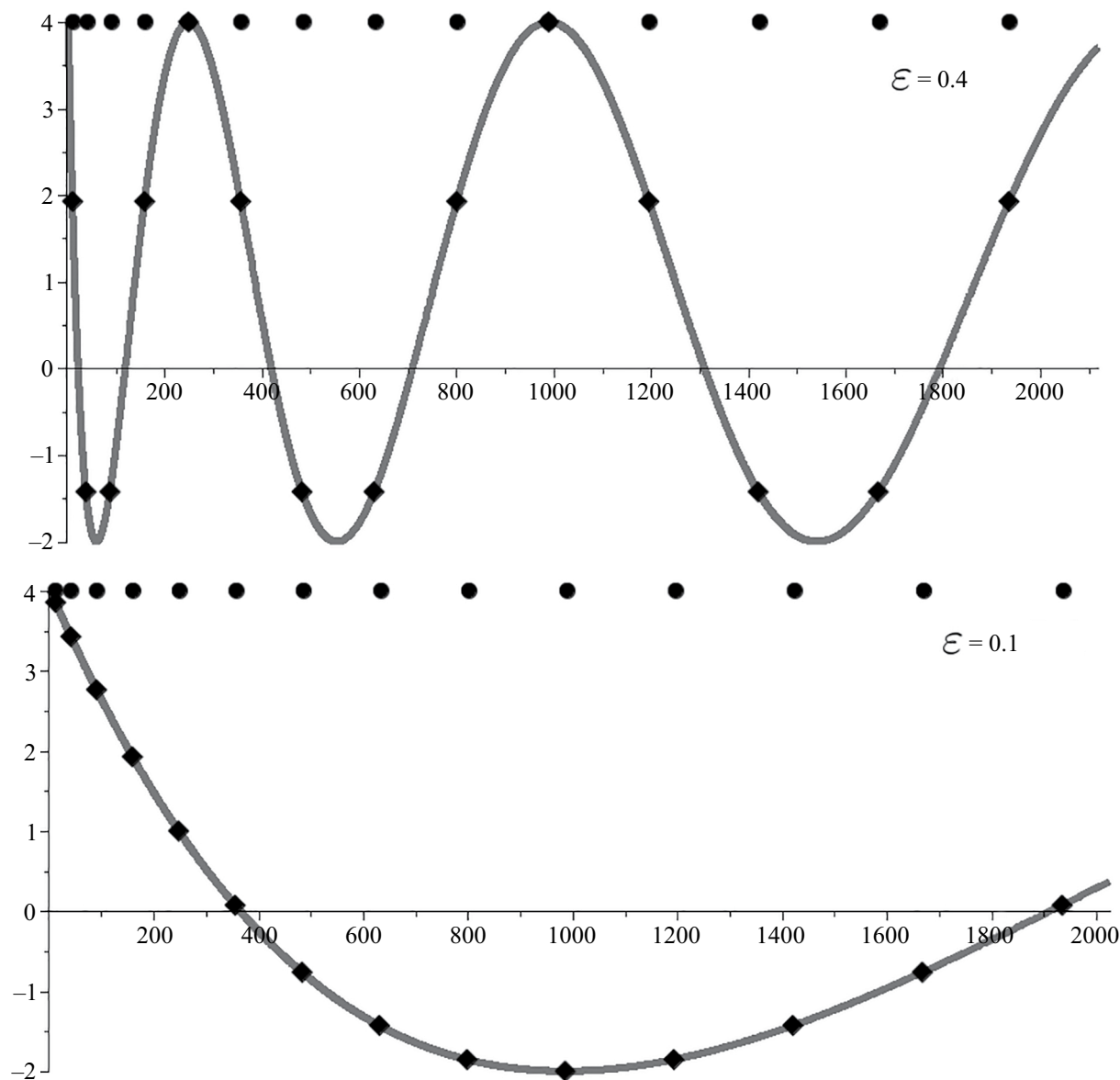


Рис. 1. Примеры кривой Γ_ε с $a = 1 + i$, $a_\varepsilon = 2 + 3i$. Черными кругами обозначены точки, соответствующие первым членам классической асимптотики (случаю $\varepsilon = 0$). Черными ромбами обозначены точки, соответствующие первым членам асимптотики (4). Верхний рисунок соответствует случаю $\varepsilon = 0.4$, нижний – случаю $\varepsilon = 0.1$.

кальных дифференциальных операторов, см., например, [14], [15], [16]. Основная идея этого метода заключается в использовании преобразования подобия. Как известно, такое преобразование сохраняет спектр, а значит необходимо подобрать его наиболее подходящим образом. В нашем случае используется преобразование подобия оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ к оператору, (бесконечная) матрица которого имеет блочно-диагональный вид. Причем большинство полученных блоков

имеют структуру, которую сравнительно не сложно анализировать.

Опишем чуть подробнее эту схему. Все операторы описываются в терминах их матриц для исходно заданного стандартного базиса $\sin \pi l x$, $l \in N$. Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ представляется в виде разности невозмущенного оператора и возмущения. При этом в качестве невозмущенного оператора выступает оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ с $V = S = 0$, $\varepsilon = 0$; такой оператор обозначим через $\mathcal{A}$. Ука-

занный выше базис является набором собственных функций оператора $\mathcal{A}$ и этот оператор имеет диагональную матрицу. Преобразование подобия оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ осуществляется в два этапа. На первом этапе оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ преобразуется в оператор вида $\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$, где $\tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$ имеет нулевую главную (блочную) диагональ и очень хорошее убывание внедиагональных элементов. На втором этапе мы строим преобразование, которое дает подобие между $\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{B}}^\varepsilon$ и $\mathcal{A} - \mathcal{Q}^\varepsilon$, и матрица оператора $\mathcal{Q}^\varepsilon$ является уже блочно-диагональной. Асимптотику собственных значений оператора $\mathcal{A} - \mathcal{Q}^\varepsilon$ после этого уже сравнительно несложно вычислить. Схема построения операторов, осуществляющих преобразование подобия, заимствована из уже цитированных выше работ [14], [15], [16]. Асимптотика собственных значений $\mathcal{A} - \mathcal{Q}^\varepsilon$ получается достаточно громоздкой, однако с помощью применения дополнительной техники эту асимптотику удастся существенно упростить до вида (1).

Дополнительно был проведен анализ проекторов, соответствующих исходному оператору и подобного ему, что дало возможность получить определенную оценку на их разность. Далее непосредственное применение теоремы Бари–Маркуса немедленно дает результат теоремы 3 о базисности Бари системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант № 23-11-00009), <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkhauser Verlag, 1997. 304 p.
2. *Kamenskii G.A.* Extrema of nonlocal functional and boundary value problems for functional differential equations. New York: Nova Science Publishers, 2007. 225 p.
3. *Скубачевский А.Л.* // УМН. 2016. Т. 71. № 5(431). С. 3–112.
4. *Скубачевский А.Л., Иванов Н.О.* // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2021. Т. 500. С. 74–77.
5. *Скубачевский А.Л., Адхамова А.Ш.* // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 490. С. 81–84.
6. *Muravnik A.B.* // Discr. Contin. Dyn. Syst. 2006. V. 16. P. 541–561.
7. *Rossovskii L.E.* // J. Math. Sci. 2017. V. 223. P. 351–493.
8. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Гл. ред. физ.-мат. литер, 1970. 671 с.
9. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977. 330 с.
10. *Шкаликов А.А.* // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 950–953.
11. *Туманов С.Н., Шкаликов А.А.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 4. С. 177–204.
12. *Borisov D.I., Polyakov D.M.* // Mathematics. 2023. V. 11. № 20. 4260.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М: Мир, 1972. 740 с.
14. *Поляков Д.М.* // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 5. С. 117–152.
15. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
16. *Поляков Д.М.* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 14–21.

ASYMPTOTICS FOR EIGENVALUES OF SCHRÖDINGER OPERATOR WITH SMALL SHIFT AND DIRICHLET CONDITION

D.I. Borisov^a, D.M. Polyakov^{a,b}

^a*Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center,
Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

^b*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia*

Presented by Academician of the RAS N.Yu. Lukoyanov

We consider a non-self-adjoint Schrödinger operator on the unit segment with the Dirichlet condition perturbed by an operator of small translation. The main result is the three-terms asymptotics for the eigenvalues with respect to their index and this asymptotics is uniform in the small translation. We also show that the system of eigenfunctions and associated functions of the considered operators forms a Bari basis in the space of functions square integrable on the considered unit segment.

Keywords: small translation, nonlocal operator, Dirichlet condition, spectral asymptotics

УДК 519.63

ПРОТИВОПОТОЧНЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

© 2024 г. М. Д. Брагин^{1, *}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 07.12.2023 г.

После доработки 01.05.2024 г.

Принято к публикации 15.05.2024 г.

Впервые представлены противопоточные бикомпактные схемы третьего порядка аппроксимации по пространству. Получена формула для множителя перехода произвольной полностью дискретной бикомпактной схемы с интегрированием по времени методом Рунге–Кутты. Для схемы первого порядка аппроксимации по времени исследованы устойчивость, монотонность, для схемы третьего порядка – диссипативные и дисперсионные свойства. Демонстрируются преимущества новых схем относительно их централизованных аналогов.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, противопоточные схемы, высокоточные схемы, компактные схемы, бикомпактные схемы

DOI: 10.31857/S2686954324030097, **EDN:** YBALJW

1. Бикомпактные разностные схемы впервые были предложены в [1] для линейного уравнения теплопроводности и в [2] для линейного уравнения переноса. Впоследствии они получили обобщение на многомерные нестационарные уравнения Эйлера и Навье–Стокса [3–5], при решении которых они показали лучшую точность, чем современные версии популярных конечно-объемных и конечно-разностных схем типа WENO. Схемы из [1–5] имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству; в [6] был развит метод получения бикомпактных схем произвольного порядка (шестого, восьмого и так далее).

Бикомпактные схемы отличаются от классических компактных схем [7, 8] тем, что их шаблоны включают лишь два целых узла сетки по каждому пространственному направлению, независимо от порядка аппроксимации (отсюда приставка “би-” в названии). Этого удастся добиться введением дополнительных искомым функций, определенных либо в целых, либо во вспомогательных дробных узлах. Для отыскания этих функций выводятся соотношения, на кото-

рые можно смотреть как на дискретные аналоги производных от решаемых уравнений.

По сравнению с классическими компактными схемами, бикомпактные схемы при равном порядке аппроксимации имеют лучшее спектральное разрешение [9, 10]. Укажем их прочие достоинства: равное число граничных условий в дифференциальной и разностной постановках задачи (за счет минимальности шаблона), устойчивость при любых шагах сетки, алгоритмически простая и экономичная реализация двухточечной прогонкой (бегущим счетом). Два последних свойства вкупе с меньшим числом зависимых переменных (степеней свободы) и сеточных уравнений для данного порядка аппроксимации обеспечивают бикомпактным схемам преимущество перед схемами разрывного метода Галеркина.

Существующие бикомпактные схемы объединяет то, что все они являются централизованными (симметричными) и имеют четный порядок аппроксимации по пространству. Численная дисперсия, присущая этому типу дискретизаций, может быть проблематичной при сквозном счете решений с высокими градиентами. Хотя численную диссипацию можно привнести через дискретизацию по времени, она может оказаться недостаточной, если число Куранта по той или иной причине невелико (малый шаг по времени, малая скорость переноса).

¹ *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*

^{*} *E-mail: michael@bragin.cc*

В настоящей работе впервые представляются и исследуются противопоточные (несимметричные) бикомпактные схемы нечетного, третьего порядка аппроксимации по пространству. Отметим, что одна из них использовалась ранее в диссертации [6] (и только там) для того, чтобы рассчитать таблицу с данными о сеточной сходимости в одном вычислительном примере. Эта схема не выписывалась и не анализировалась в [6]; симметризация шаблона не проводилась (она необходима, если скорость переноса знакопеременна). Уточним, что существование противопоточных бикомпактных схем не противоречит результату [11], так как в данной работе они на самом деле искались не в общем виде, а среди частного семейства.

2. Рассмотрим одномерный скалярный гиперболический закон сохранения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция, $f(u)$ — гладкая потоковая функция. Предположим пока, что скорость переноса $a(u) = df/du > 0$ для всех u из области определения $f(u)$.

Построим полудискретную бикомпактную схему третьего порядка аппроксимации для уравнения (1), используя метод коллокации. Разобьем ось x на ячейки $\mathcal{I}_j = (x_j, x_{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}$; $h_j = x_{j+1} - x_j$ — пространственный шаг. В каждую ячейку добавим один вспомогательный узел $x_{j+\omega} = x_j + \omega h_j$, $\omega \in (0, 1)$. Выберем вес $\omega = 1/3$, чтобы получить расположение узлов квадратуры Рунге третьего порядка. Приближим $u(x, t)$ в $\mathcal{I}_j$ линейной функцией (полиномом первой степени) от x :

$$p_j(x, t) = 1.5h_j^{-1}[(x_{j+1} - x)u_{j+1/3}(t) + (x - x_{j+1/3})u_{j+1}(t)], \quad (2)$$

где $u_\alpha(t) = u(x_\alpha, t)$, $\alpha = j, j+1/3$. Проинтегрируем левую часть уравнения (1) по пространственной переменной от x_j до x и подставим вместо $u(x, t)$ функцию (2):

$$R_j(x, t) = \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_j}^x p_j(\xi, t) d\xi + \frac{f(p_j(x, t)) - f(u_j)}{h_j}. \quad (3)$$

Уравнения схемы получим, приравнявая невязку (3) нулю в узлах коллокации:

$$R_j(x_{j+1}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{3u_{j+1/3} + u_{j+1}}{4} \right) + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} = 0, \quad (4)$$

$$R_j(x_{j+1/3}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{5u_{j+1/3} - u_{j+1}}{12} \right) + \frac{f_{j+1/3} - f_j}{h_j} = 0, \quad (5)$$

где $f_\alpha = f(u_\alpha)$, $\alpha = j, j+1/3$. Уравнение (4) приближает интегральное среднее уравнения (1) по $\mathcal{I}_j$ с погрешностью $O(h_j^3)$. Следовательно, по известной теореме о порядке метода коллокации (см. например [12], теорема 7.8) схема (4), (5) имеет третий порядок аппроксимации. Уравнение (4) является (полу)дискретным законом сохранения в смысле метода конечного объема. Значит, получаемая схема консервативна. Теперь симметризуем пространственный шаблон, сдвинув вспомогательные узлы в центры ячеек. В случае, если $a(u) < 0$ и необходимо сменить направление счета, симметричный шаблон оказывается намного практичнее, так как позволяет избежать перестроения сетки и переинтерполяции решения. С помощью полинома Лагранжа второй степени с погрешностью $O(h_j^3)$ получаем соотношение:

$$v_{j+1/3} = \frac{2v_j + 8v_{j+1/2} - v_{j+1}}{9}, \quad v = u, f. \quad (6)$$

Объединяя уравнения (4)–(6), получим искомую полудискретную бикомпактную схему третьего порядка аппроксимации для уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_j + 4u_{j+1/2} + u_{j+1}}{6} \right) + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{u_j + 4u_{j+1/2} - u_{j+1}}{8} \right) + \frac{f_{j+1/2} - f_j}{h_j} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае $a(u) < 0$ схема (7) меняет свой вид. Центрированные квадратура и разность в первом уравнении остаются прежними, но направленные квадратура и разность во втором уравнении переключаются так, чтобы быть ориентированными против потока:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_j + 4u_{j+1/2} + u_{j+1}}{6} \right) + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{j+1} + 4u_{j+1/2} - u_j}{8} \right) + \frac{f_{j+1} - f_{j+1/2}}{h_j} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Случай знакопеременной скорости $a(u)$ рассмотрим далее в разделе 5.

Противопоточные бикомпактные схемы более высоких (пятого, седьмого и так далее) порядков аппроксимации по пространству получаются увеличением числа вспомогательных узлов, которые располагаются как узлы более точных квадратур Радо. Добавление одного дробного узла в каждую ячейку увеличивает порядок аппроксимации на два.

Для интегрирования по времени в (7), (8) можно использовать методы Рунге-Кутты (РК). Выберем два диагонально-неявных метода РК (DIRK) – базовый неявный метод Эйлера и трехстадийный L -устойчивый жестко-точный метод третьего порядка с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 1/3 & 0 & 1/3 & \\ \hline 1 & -1/12 & 3/4 & 1/3 \\ \hline & -1/12 & 3/4 & 1/3 \end{array} \quad (9)$$

Отвечающие им бикомпактные схемы обозначим аббревиатурами BiC3-BE и BiC3-DIRK3. Выбор диагонально-неявных методов обусловлен тем, что явные методы порождают неустойчивые бикомпактные схемы, а полностью неявные методы представляются неэкономичными.

3. Исследуем устойчивость базовой схемы BiC3-BE и диссипативные и дисперсионные свойства схемы BiC3-DIRK3 в случае постоянной положительной скорости переноса.

Опуская промежуточные выкладки, запишем произвольную полностью дискретную бикомпактную схему для линейного уравнения переноса в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \mathbf{1}_m^T + h \mathbf{N} \mathbf{A}^T + a (\mathbf{1}_s \mathbf{v}^T + \tau \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{N}) &= \mathbf{0}, \\ u_{j+1} &= u_j + h \mathbf{b}^T \mathbf{v}, \quad \hat{u}_{j+1} = \hat{u}_j + h \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{v}}, \\ \hat{u}_j &= u_j + \tau \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{g}, \quad \hat{\mathbf{v}}^T = \mathbf{v}^T + \tau \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}^T} \bigg| \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{\mathbf{c}}}{\tilde{\mathbf{b}}^T} \bigg| \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\tilde{\mathbf{b}}^T} \quad (11)$$

это таблицы Бутчера методов РК, отвечающих аппроксимациям по пространству и времени; $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^s$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{s \times m}$ это наклоны данных методов; $\mathbf{1}_m, \mathbf{1}_s$ это столбцы из единиц размерностей m, s ; τ это шаг по времени; величины с крышкой относятся к следующему слою t_{n+1} , без крышки – к текущему слою t_n ; индексы u

наклонов и шагов опущены ради уменьшения громоздкости записи. Всякой бикомпактной аппроксимации по пространству отвечает некоторый метод РК, так как она строится методом коллокации. Например, аппроксимации (4), (5) соответствует метод Радо IIА третьего порядка.

Рассмотрим перенос гармоники $u(x, t) = \exp[ik(x - at)]$ по схеме (10) при постоянных шагах h, τ . Численное решение будем искать в виде аналогичной гармоники:

$$\begin{aligned} u_j^n &= \exp[ik(x_j - a^* t_n)] = \lambda^n \mu^j, \\ \lambda &= \exp(-ik\varphi^*), \quad \mu = \exp(i\varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi = kh \in [-\pi, \pi]$ – безразмерное волновое число, $\varphi^* = \varphi a^* / a$ – безразмерное схемное волновое число, $\kappa = a\tau / h > 0$ – число Куранта. В силу специального вида решения

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= h^{-1} \mathbf{p} \lambda^n \mu^j, \quad \mathbf{g} = \tau^{-1} \mathbf{q} \lambda^n \mu^j, \\ \mathbf{H} &= (h\tau)^{-1} \mathbf{q} \mathbf{p}^T \lambda^n \mu^j, \end{aligned} \quad (13)$$

где векторы $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^s$ не зависят от j, n . Подстановка (12), (13) в (10) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{1}_m)^T + \kappa(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{q} + \mathbf{1}_s) \mathbf{p}^T &= \mathbf{0}, \\ \mu &= 1 + \mathbf{b}^T \mathbf{p}, \quad \lambda = 1 + \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что первое уравнение в (14) удовлетворится, если положить

$$\mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{1}_m = \eta^{-1} \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{q} + \mathbf{1}_s = -(\kappa \eta)^{-1} \mathbf{q}, \quad (15)$$

где η – число. Выражая из (15) векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ и подставляя их в выражения для μ, λ в (14), получаем окончательно

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} = \mu &= 1 + \eta \mathbf{b}^T (\mathbf{E}_m - \eta \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}_m = R(\eta), \\ \lambda &= 1 - \kappa \eta \tilde{\mathbf{b}}^T (\mathbf{E}_s + \kappa \eta \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{1}_s = \tilde{R}(-\kappa \eta), \end{aligned} \quad (16)$$

где $R(z), \tilde{R}(z)$ – функции устойчивости методов РК с таблицами (11). В пределе при $\kappa \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$, полудискретная схема) величина η стремится к $i\varphi^*$. Иных решений для векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, кроме подстановки (15), не существует, так как корни уравнения $R(\eta) = e^{i\varphi}$ дают все m возможных значений $\lambda = \tilde{R}(-\kappa \eta)$. Корректным является только корень, равный нулю при $\varphi = 0$.

Для схем BiC3-BE, BiC3-DIRK3

$$e^{i\varphi} = \mu_{\text{BiC3}} = \frac{2\eta + 6}{\eta^2 - 4\eta + 6} - \text{Паде-(1,2)},$$

$$\lambda_{\text{BE}} = \frac{1}{1 + \kappa\eta}, \quad \lambda_{\text{DIRK3}} = \frac{9 + 6\kappa\eta - 3.5\kappa^2\eta^2}{(1 + \kappa\eta)(3 + \kappa\eta)^2}.$$

Можно показать, что для схемы BiC3-BE модуль множителя перехода $\rho = |\lambda| \leq 1$ при любых φ, κ . Это означает, что не существует такой гармоники, которая бы неограниченно росла по амплитуде от слоя к слою, независимо от числа Куранта. Следовательно, все бикомпактные схемы третьего порядка аппроксимации по простран-

ству с интегрированием по времени DIRK-методами устойчивы при любых шагах h, τ .

На рис. 1 для схемы BiC3-DIRK3 и ее централизованного аналога BiC4-DIRK3 (четвертого порядка аппроксимации по пространству) изображены графики ρ и отношения схемной фазовой скорости к точной $\text{Re}(a^*/a)$ как функций от $\varphi, \kappa \geq 0$ (для отрицательных значений аргументов графики достраиваются симметрично относительно осей $O\varphi, O\kappa$). Видно, что погрешности фазовой скорости для этих двух схем отличаются незначительно, в пределах 5%. При $\kappa < 0.5$ схема BiC3-DIRK3 дает даже более точную фазовую скорость. Из графиков ρ ясно, что схема BiC3-

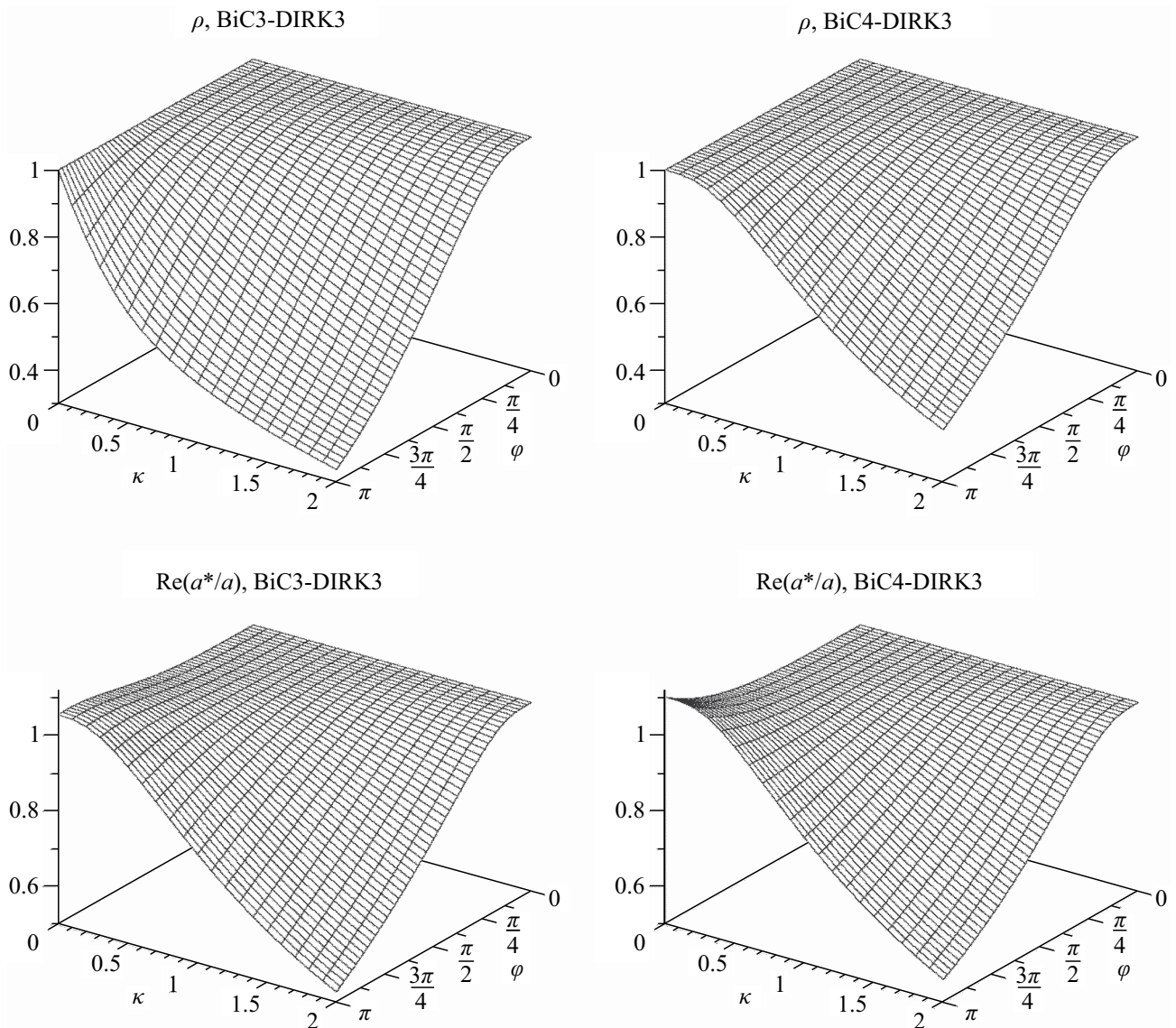


Рис. 1. Модуль множителя перехода (сверху) и отношение схемной фазовой скорости к точной (снизу) для схем BiC3-DIRK3, BiC4-DIRK3.

DIRK3 подавляет коротковолновые гармоники намного сильнее схемы BiC4-DIRK3. Как мы увидим далее в разделе 5, это свойство обеспечивает лучшее качество счета разрывных решений.

Отметим, что диапазон φ не нужно расширять до $[-2\pi; 2\pi]$ из-за наличия дополнительных зависимых переменных, приписанных к дробным узлам. Например, в базовой схеме BiC3-BE их можно полностью исключить и записать эту схему как трехслойную:

$$\frac{1}{3} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + \frac{h}{6a} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1}}{\tau^2} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0.$$

4. Проанализируем схему BiC3-BE на монотонность в случае постоянных a, h, τ по методу из [2]. Рассмотрим элементарную монотонно невозрастающую ступенчатую функцию:

$$u_\alpha^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha \leq 0, \\ \theta & \text{при } \alpha = 1/2, \\ 0 & \text{при } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

где параметр $\theta \in [0, 1]$. Можно доказать, что сеточная функция u_α^1 является монотонно невозрастающей при $\kappa \geq 1/3$, $\theta \leq 3/4$. Однако, этого результата недостаточно, чтобы утверждать об условной монотонности схемы BiC3-BE. Напротив, с последующими переходами со слоя на слой монотонность теряется: начиная с некоторого

$n = n_0$, сеточная функция u_α^n имеет максимум $M_n = \max_\alpha u_\alpha^n > 1$, правее которого она, впрочем, монотонно убывает к нулю (если $\kappa \geq 1/3$). Графики на рис. 2 иллюстрируют эволюцию разности $\varepsilon_n = (M_n - 1)$ при разных значениях κ и θ . Эта разность убывает со скоростью геометрической прогрессии и быстро становится сравнимой с погрешностями округления. Это происходит тем быстрее, чем больше κ . Величина θ влияет на n_0 и ε_{n_0} , но почти не меняет асимптотики ε_n при $n \gg 1$.

Бикомпактная схема BiC4-BE четвертого порядка аппроксимации по пространству ведет себя аналогично: хотя при $\kappa \geq 1/4$, $\theta \leq 3/4$ сеточная функция u_α^1 оказывается монотонно невозрастающей, на некотором слое возникает нарушение монотонности (несколько меньшее по амплитуде, чем у BiC3-BE), которое меняется так же в зависимости от n, κ, θ .

Таким образом, бикомпактные схемы с порядком аппроксимации по пространству выше второго и дискретизацией по времени неявным методом Эйлера, строго говоря, монотонными не являются. Тем не менее, нарушение монотонности невелико и быстро стремится к нулю с течением времени.

5. В случае, если скорость $a(u)$ является знакопеременной, мы применяем метод глобального потокового расщепления Лакса–Фридрихса–Русанова. Определим расщепленные потоковые функции $f^\pm(u) = 0.5f(u) \pm Cu$. Параметр $C > 0$ задается так, чтобы $a^+(u) > 0$,

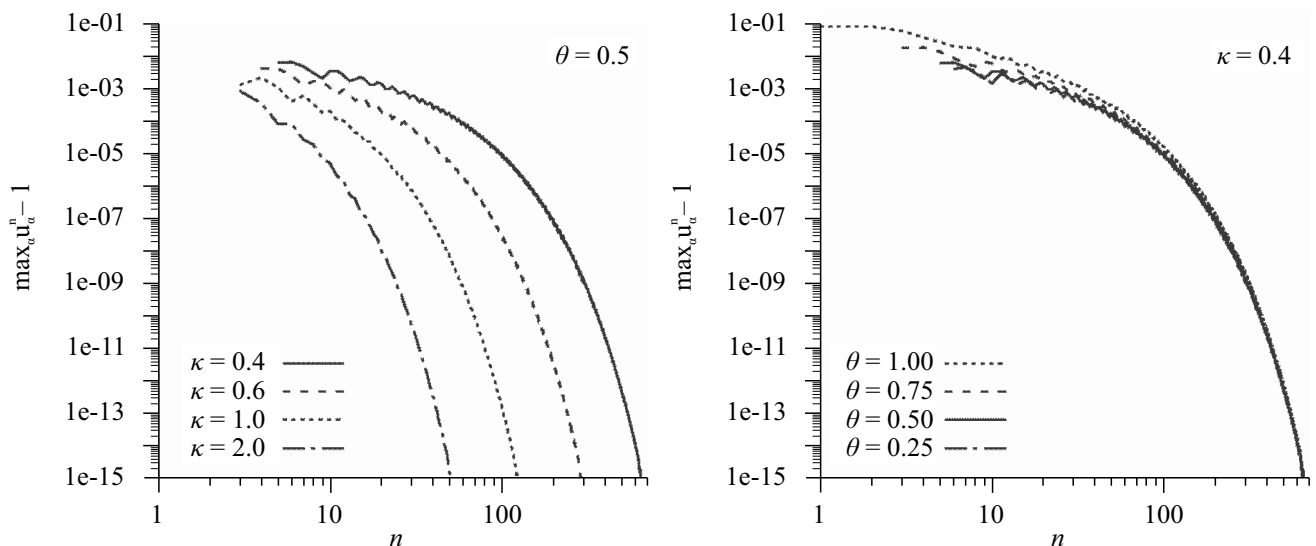


Рис. 2. Эволюция амплитуды немонотонности в схеме BiC3-BE.

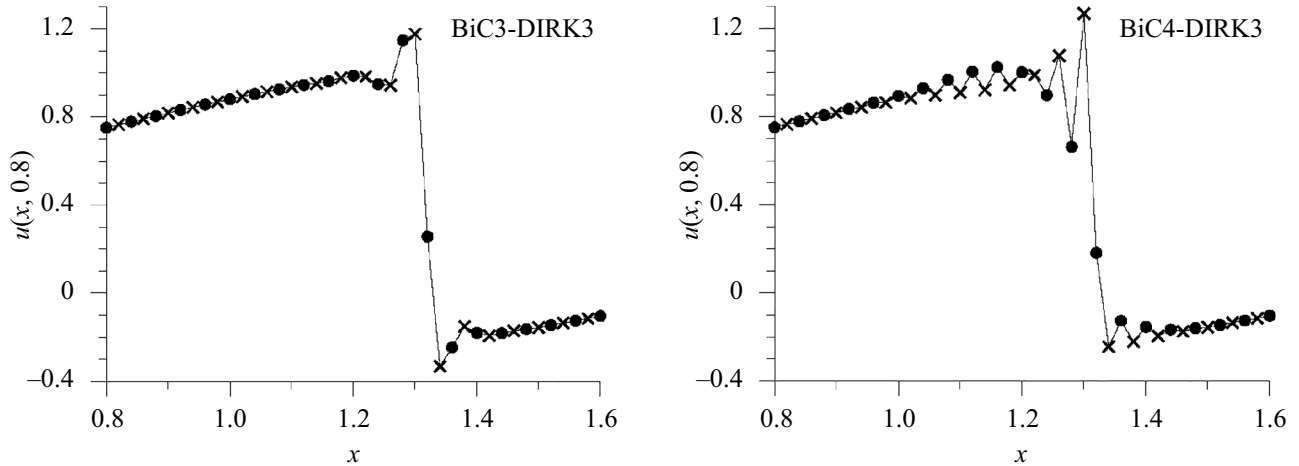


Рис. 3. Поведение схем BiC3-DIRK3, BiC4-DIRK3 в окрестности сильного разрыва решения уравнения Хопфа. Кругами отмечены значения в целых узлах, крестиками — в полуцелых.

$a^-(u) < 0$ ($a^\pm(u) = df^\pm / du$) на некотором множестве значений u (возможных, например, на определенном временном интервале). Переход со слоя t_n на слой t_{n+1} осуществляется в два этапа. На первом этапе выбранным методом РК на полный шаг по времени интегрируются уравнения (7) с заменой $f(u)$ на $f^+(u)$, в качестве (промежуточного) начального условия используется решение на слое t_n . На втором этапе аналогичным образом интегрируются уравнения (8) с заменой $f(u)$ на $f^-(u)$, но в качестве начального условия используется решение, вычисленное на первом этапе. Как результат, мы получаем искомое решение на слое t_{n+1} . Значение C обновляется перед каждым переходом со слоя на слой по формуле $C = (0.5 + \delta) \max_\alpha |a(u_\alpha^n)|$, где $\delta > 0$ — постоянный коэффициент запаса.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа ($f(u) = u^2/2$, $a(u) = u$) с периодическими начальными данными $u(x, 0) = 0.4 + 0.6 \sin(\pi x)$. Рассчитаем ее по схеме BiC3-DIRK3 при $N = 2/h = 50, 100, 200, 400, 800, 1600$, $\tau = h$, $\delta = 0.2$. Числа Куранта $a^+ \tau / h \in [0.6, 1.2]$, $a^- \tau / h \in [-0.8, -0.2]$.

В табл. 1 сведены абсолютные погрешности и локальные порядки сходимости в норме L_∞ для схемы BiC3-DIRK3 в момент времени $t = 0.4$, когда точное решение еще является гладким. Приведенные данные демонстрируют, что эта схема имеет третий порядок точности.

На рис. 3 построены графики численных решений, полученных по схемам BiC3-DIRK3 и BiC4-DIRK3 при $N = 50$, в момент времени $t = 0.8$, после градиентной катастрофы и формирования периодической ударной волны.

Таблица 1. Сеточная сходимость схемы BiC3-DIRK3 в норме L_∞ на гладком решении уравнения Хопфа

N	E_∞	k_∞
50	3.08e-3	
100	4.60e-4	2.76
200	6.26e-5	2.88
400	8.58e-6	2.87
800	1.12e-6	2.94
1600	1.43e-7	2.97

Очевидно, диссипация метода (9) оказывается недостаточной, чтобы подавить дисперсию бикомпактной аппроксимации четвертого порядка. Из-за этого решение, полученное по схеме BiC4-DIRK3, осциллирует в полуцелых узлах. Данные осцилляции можно устранить, включив ограничитель наклонов, повысив δ или τ , но это приведет к ухудшению пространственного разрешения, в том числе к размазыванию фронта ударной волны. Этой проблемы нет в схеме BiC3-DIRK3 благодаря диссипации, присущей ее пространственной аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. О сходимости компактных разностных схем // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 1. С. 99–116.
2. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 6. С. 98–110.
3. Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 150–163.

4. *Bragin M.D., Rogov B.V.* Conservative limiting method for high-order bicomcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // *Applied Numerical Mathematics*. 2020. V. 151. P. 229–245.
5. *Брагин М.Д.* Бикомпактные схемы для уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой жидкости // *Докл. АН*. 2023. Т. 509. С. 17–22.
6. *Чикиткин А.В.* Бикомпактные схемы для многомерных гиперболических уравнений и их эффективная реализация: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. М.: МФТИ(ГУ), 2016. 89 с.
7. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
8. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // *J. Comput. Phys.* 1992. V. 103. № 1. P. 16–42.
9. *Rogov B.V.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomcompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 139. P. 136–155.
10. *Chikitkin A.V., Rogov B.V.* Family of central bicomcompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 142. P. 151–170.
11. *Брагин М.Д., Rogov Б.В.* О единственности высоко-точной бикомпактной схемы для квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54. № 5. С. 815–820.
12. *Хайпер Э., Нёрсстем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Не-жесткие задачи: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.

UPWIND BICOMPACT SCHEMES FOR HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS

M. D. Bragin^a

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia*

For the first time, upwind bicomcompact schemes of third order approximation in space are presented. A formula is obtained for the transition factor of an arbitrary fully discrete bicomcompact scheme with integration in time by a Runge–Kutta method. Stability and monotonicity of the first-order in time scheme are investigated, dissipative and dispersion properties of the third-order in time scheme are analyzed. Advantages of the new schemes relative to their centered counterparts are demonstrated.

Keywords: hyperbolic equations, upwind schemes, high-order accurate schemes, compact schemes, bicomcompact

УДК 513.63

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОТОКОВ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ТЕРМОЭДС ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛ ПО ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Г. Г. Лазарева^{1, *}, В. А. Попов^{1, **},
В. А. Окишев^{1, ***}, А. В. Бурдаков^{2, ****}

Поступило 31.03.2024 г.
После доработки 06.05.2024 г.
Принято к публикации 08.05.2024 г.

В работе рассмотрена модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе при нагреве поверхности электронным пучком. Модель основана на решении уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для расчета температуры в области образца в цилиндрической системе координат. На основе распределения температуры в расчетной области рассчитаны электрическое сопротивление и термоЭДС через интеграл по энергии электронов в каждом узле сетки. Конфигурация электромагнитного поля является причиной вращения вещества, которое наблюдается в эксперименте. Результаты проведенного моделирования показали роль термоэмиссии и пути развития модели. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН.

Ключевые слова: математическое моделирование, эрозия вольфрама, задача Стефана, уравнения электродинамики, электрическое сопротивление, термоЭДС, термоэмиссия

DOI: 0.31857/S2686954324030101, **EDN:** YBAICW

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение расплава является одним из самых разрушительных последствий развития неустойчивостей на современных установках для изучения термоядерной плазмы. При оплавлении и дальнейшем разогреве материала стенок, лимитера или дивертора они начинают испаряться. Место контакта расплава и испарённого газа приводит в движение расплав под действием термоэлектрических эффектов из-за большого магнитного поля, необходимого для удержания плазмы. Взаимодействие плазмы с поверхностью является одним из важнейших проблем при выборе материала дивертора конструируемых термоядерных реакторов. Возможное облучение

нейтронами высоких энергий и высокие тепловые нагрузки накладывают серьезные ограничения на свойства материала. Ожидаемые высокие тепловые нагрузки приводят к эрозии и плавлению материала. Быстрое плавление приводит к изменению формы поверхности материала дивертора в результате движения расплава. Такое движение может быть инициировано гравитацией, влиянием газа или плазмы на процесс плавления и силой Лоренца. Движение под действием этих сил активно изучается [26]. Неоднородность температуры в расплаве приводит к возникновению течения тока. В областях с перепадами температуры возникает электродвижущая сила. Важно, что в газе и в расплаве электродвижущая сила отличается. Поэтому возникает ненулевое ускоряющее напряжение на замкнутом контуре через газ и расплав, которое порождает ток по этому контуру. Величина проводимости зависит от температуры. Сила Лоренца оказывает наибольшее влияние [27], так как управляемый термоядерный синтез с магнитным удержанием плазмы связан с сильным магнитным полем. Сильное магнитное поле увеличивает силу Лоренца, которая провоцирует движение расплава. Подробное моделирование поможет разобраться в механизмах развития термотокров и позволит

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики имени Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

* E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

** E-mail: apsolodov@mail.ru

*** E-mail: okishev-va@rudn.ru

**** E-mail: a.v.burdakov@mail.ru

разработать методы их подавления. На экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН [28] проводились эксперименты, в которых влияние силы Лоренца рассматривалось среди других причин вращения расплава. В работе [29] описано состояние газа над поверхностью образца и сделаны оценки влияния испаряемого вещества на видимое движение расплава. Предполагается, что при нагреве образуется замкнутый ток по разнице температур на границе раздела газ/расплав. Ток обтекает разогретую область. Натурный эксперимент постоянно сопровождается численным [30]. Модель нагрева вольфрама основана на решении двухфазной задачи Стефана в области образца с учетом испарения. Учёт процесса испарения гарантирует ограничение роста температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным. Рассмотрена и модифицирована для стационарного случая в цилиндрической системе координат система уравнений Максвелла для расчета тока. Система уравнений замкнута при помощи материального уравнения, в нашем случае обобщения закона Ома. Процесс распространения тока можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи. С учетом особенностей постановки для описания тока достаточно только одной угловой компоненты векторного потенциала тока, описывающей “завихренность” тока. При расчёте токов без учёта испаряющегося газа [31] граничные условия являлись решающей характеристикой для определения токов. В данной начально-краевой задаче решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счёт учёта термоэмиссии. В работе [32] проведен анализ и валидация представленной модели в упрощенной постановке задачи. Расчеты проводились для постоянных параметров материала и модельного распределения температуры, различных в металле и парах над образцом. Проведена регуляризация уравнения для токов [32, 33]. В работе [33] рассматриваемая математическая модель была апробирована для случая расчета удельной проводимости и термоЭДС в газе в упрощенном виде. В парах вольфрама термоЭДС выражен через оценку коэффициента Зеебека. Выражение для удельного сопротивления в газе определено как величина обратно пропорциональная степени ионизации. Степень ионизации определяется как положительный корень уравнения Саха. В данной ра-

боте удельное сопротивление и термоЭДС рассчитываются как зависимости через интеграл по энергии электронов. Удельная проводимость в газе считается зависящей только от его температуры. При этом требуется определить среднее время между столкновениями, энергию и функцию распределения электронов через химический потенциал электрона и массу электрона. Будем считать, что распределение скоростей электронов сферически симметрично и дисперсионное соотношение соответствует случаю идеального газа. Время между столкновениями определяется по правилу Маттиссена через концентрации атомов и ионов, степени ионизации. Концентрации атомов на этом этапе моделирования определено как плотность насыщенных паров. Степень ионизации определяется как положительный корень уравнения Саха через длину волны де Бройля и энергию ионизации вольфрама. Поперечные сечения переноса импульса атомов и ионов вычисляются через кулоновский логарифм, записанный с использованием приближения бинарных столкновений. Это приближение хорошо описывает слабо неидеальную плазму, поскольку оно также учитывает случай, когда число Дебая немного больше единицы. Математическая модель разработана для изучения свойств вольфрама, но результаты работы могут представлять интерес для исследования других металлов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В экспериментах на установке BETA образцы прокатанного вольфрама подвергались воздействию осесимметричного электронного пучка. Плотность мощности на нагреваемой поверхности по радиусу имеет распределение, близкое к нормальному, что определяет выбор аксиально-симметричной постановки задачи. На каждом временном шаге численного моделирования плотность мощности берется из файла экспериментальных данных. Распределение плотности мощности нагрева по поверхности измеряли с помощью рентгеновской визуализации. Электроны с энергией $80 \div 90$ кэВ нагревают материал в слое, который является тонким по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Тепло, поглощенное поверхностью, распространяется в материал. Образец имеет размеры $25 \text{ мм} \times 25 \text{ мм}$ и типичную толщину 4 мм. Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца (толщина об-

разца 3 мм) и тонкого слоя паров (толщина слоя 3 мм): область 12 мм×6 мм. Численная модель распределения тока пучка в нагреваемом образце и в парах вольфрама сводится к совместному решению задачи Стефана и уравнения для токов, полученного из системы уравнений Максвелла.

Расплав вращается во время нагрева электронным пучком, что наблюдается в ходе экспериментов после серии выстрелов электронным пучком в одно и то же место [34]. Пучок движется к мишени в магнитном поле, так что магнитное поле на мишени имеет значительную (до 0.3 Тл) нормальную к поверхности компоненту. По ускоряющему напряжению, провалу потенциала в пучке, току в диоде и на мишени устанавливаются ток и мощность нагрева. По отпечатку на люминофоре в калибровочном выстреле устанавливается пространственное распределение пучка (поперечный размер), что в итоге даёт возможность узнать изменение во времени плотности мощности пучка и плотности тока на мишень. Плотности мощности достаточно, чтобы нагреть вольфрам до кипения и заметно больше. Видимое движение расплава похоже на вращение под действием силы Лоренца на ток $j \times B$ направлении на внешнюю часть расплава, но не совпадает по с характерной скоростью.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Для расчета распространения температуры с нагреваемой поверхности вглубь образца решается задача Стефана:

$$\begin{cases} c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \\ + \frac{\rho^*(T)}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho^*(T)}{\rho_0}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}, \\ (n, \nabla T)|_\gamma = \frac{W(t, r) - N(t, r)}{\lambda(T)}, \\ (n, \nabla T)|_{\Gamma \setminus \gamma} = 0, \\ T|_{t=0} = T_0, \\ \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial t}\right] = L_m v_n, [T]|_S = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $T(r, z, t)$ — температура, $c(T)$ — удельная теплоемкость, $\rho^*(T)$ — плотность (график), $\rho_0 = \rho(T)$ — плотность в начальный момент времени, $\lambda(T)$ — теплопроводность, $W(t, r)$ — распределение мощности по поверхности теплового потока γ , $N(t, r)$ — испарение на поверхности, n — нормаль к поверхности, Γ — вся граница расчетной области, T_0 — началь-

ная температура, S — свободная граница, L_m — энтальпия фазового перехода, v_n — скорость границы фазового перехода. Температура плавления $T_m = 3695^\circ \text{K}$.

Для расчетов можно использовать известные данные о градиенте температуры испаряющегося вольфрама над поверхностью [35]. Расчеты проведены в предположении, что температура газа постоянно на расстоянии 3 мм при удалении от поверхности, что качественно соответствует расчетным данным. При этом полученная в результате решения задачи Стефана зависимость температуры от радиуса сохраняется.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ОБРАЗЦЕ И ГАЗЕ

Полученное распределение температуры позволяет рассчитать удельное сопротивление в образце и в газе. Если удельное сопротивление ρ_e в образце задается [31] в виде экспериментально полученной зависимости от температуры (см. рис. 1а), то удельную проводимость в газе необходимо вычислить. Найдем удельную электропроводность газа $\sigma = 1/\rho_e$ как интеграл по энергии электронов¹[36]:

$$\sigma = -\frac{A}{T} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right) \tau(\varepsilon) \varepsilon^{(3/2)} d\varepsilon, \quad (2)$$

где константа A определена в [29], $\tau(\varepsilon)$ — это среднее время между столкновениями. Энергию ε и функцию распределения электронов f можно получить из выражений:

$$\varepsilon = \frac{m_e \vec{v}^2}{2}, f = \left(1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right)\right)^{-1}. \quad (3)$$

Здесь μ — это химический потенциал электрона, m_e — масса электрона. Уравнение (3) выражает предположение, что распределение скоростей электронов $\vec{v}$ сферически симметрично и дисперсионное соотношение соответствует случаю идеального газа. Время между столкновениями определяется по правилу Матиссена [37]:

$$\tau^{-1}(\varepsilon) = n_a v(\varepsilon) \sigma_{tr, a} + n_i v(\varepsilon) \sigma_{tr, i}(\varepsilon), n_i = \alpha n_a,$$

Здесь n_a, n_i — это концентрации атомов и ионов, α — степень ионизации. Концентрации атомов на этом этапе моделирования определяется как плотность насыщенных паров:

$$n_a = \frac{1}{kT} \exp\left(26.19104 - \frac{83971.3K}{T}\right) 10^{-12} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2 \cdot \text{мкс}},$$

¹ Интеграл является сходящимся, так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена.

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж / К – постоянная Больцмана. Степень ионизации определяется как положительный корень уравнения Саха:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{2}{\lambda_d^3 n_a} \exp\left(-\frac{I_t}{T}\right),$$

где λ_d^3 – длина волны де Бройля, $I_t = 92604$ К – энергия ионизации вольфрама. Транспортное сечение $\sigma_{tr,a}(\varepsilon)$ рассчитано в [38] и равно $\sigma_{tr,a} = 10^{-18}$ м². Транспортное сечение $\sigma_{tr,i}(\varepsilon)$ ионов вычисляется через кулоновский логарифм, записанный в виде [39, 29] с использованием приближения бинарных столкновений:

$$\sigma_{tr,i}(\varepsilon) = \frac{\pi e^4}{2\varepsilon^2} \ln\left(1 + \frac{e^2}{4\pi T n_e}\right).$$

Это приближение хорошо описывает слабо неидеальную плазму, поскольку оно также учитывает случай, когда число Дебая немного больше единицы. Удельное сопротивление ρ_e обратно величине удельной электропроводности газа (рис. 1б).

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОТОКОВ В ОБРАЗЦЕ И ГАЗЕ

Процесс распространения тока можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи [40]. Учет процесса испарения гарантирует ограничение роста температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным [41]. Введем векторный потенциал тока $F = (F_r, F_\phi, F_z)$:

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{F} \quad (4)$$

и запишем систему уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . Производные по углу ϕ будут равны нулю в силу симметрии задачи относительно поворота [42, 43]. Выразим ток через векторный потенциал тока, учитывая нулевую производную по углу. Так как отсутствует вихревое электрическое поле, то ток течет только по осевому и радиальному направлениям, и $E_\phi = 0$. Отсюда следует, что $j_\phi = 0$:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\phi \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r F_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\phi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r F_\phi}{\partial r} \end{pmatrix},$$

Таким образом, для описания тока достаточно только одной функции F_ϕ , описывающей “завихренность” тока. Рассмотрим обобщенный закон Ома [37]

$$\vec{j} = (\vec{E} - S \nabla T - \nabla \mu / e) / \rho_e.$$

Здесь μ – химический потенциал электронов, S – термоЭДС и e заряд электрона. Применим к левой и правой частям уравнения (4) векторный оператор $\nabla \times$:

$$\nabla \times (\rho_e \vec{j}) = \nabla \times (\vec{E} - S \nabla T - \nabla \mu / e) = \nabla S \times \nabla T.$$

С учетом нулевой производной по углу ϕ и отсутствия вихревого электрического поля $j_\phi = 0$ из получено уравнение для одной нетривиальной компоненты F_ϕ :

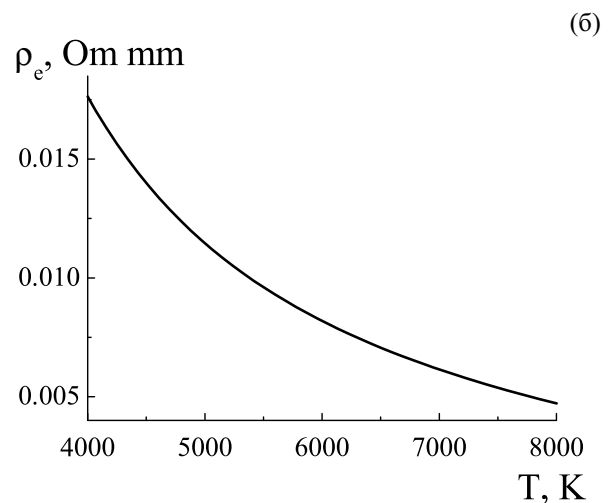
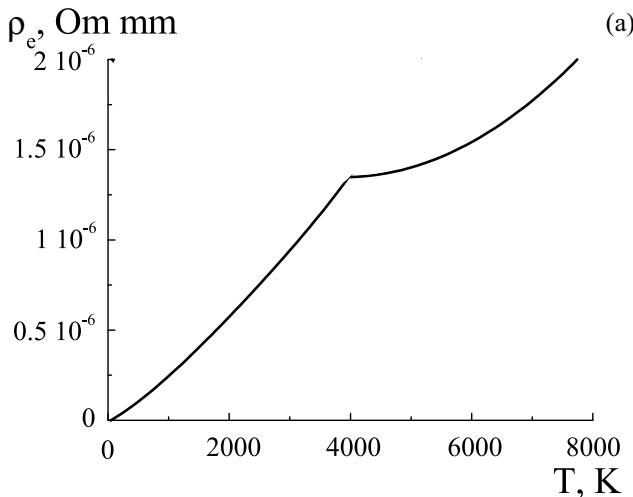


Рис. 1. График зависимости от температуры электрического сопротивления в образце (а) и в газе (б).

$$\frac{\partial^2 F_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial F_\phi}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} + F_\phi \left(\frac{1}{r \rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

После введения полного тока $I(r, z) = 2\pi r F_\phi$ уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z} = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим ортогональную систему координат (r, z) , в которой можно записать оператор дифференцирования ∇ . Обозначив $\Phi = \ln(\rho_e / r)$ можно записать задачу в виде:

$$\begin{cases} \rho_e \nabla^2 I + \rho_e \nabla I \nabla \Phi = 2\pi r \nabla S \nabla T, \\ 0 < r < r_{\max}, \quad 0 < z < z_{\max}, \\ \Phi = \ln(\rho_e / r), \quad I|_{t=0} = 0, \\ I|_{(0,z)} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial r}|_{(r_{\max}, z)} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial z}|_{(r, z_{\max})} = 0, \\ I|_{(r, 0)} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭДС

В краевой задаче (6) решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счет учета термоэмиссии. Отсутствие возмущений на границах расчетной области упрощают проведение численных расчетов. ТермоЭДС S в газе (см. рис. 2а) вычисляется [36] аналогично (2):

$$S = -\frac{1}{ekT} \frac{\int_0^\infty (\varepsilon - \mu) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \tau(\varepsilon) \varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \tau(\varepsilon) \varepsilon^{3/2} d\varepsilon}.$$

В металле термоЭДС S известна только при небольших температурах (см. рис. 2б). В расчётах использована зависимость $S(T)$, построенная [32] по данным [44]. При высоких температурах использовано значение термоЭДС при $T = 1350 \text{ K}$. Известные зависимости термоЭДС от температуры для других металлов показывают, что функция термоЭДС возрастающая и имеет скачок в момент плавления [45].

Характерные значения параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Parameter	Typical value	Units
r_0	10^{-1}	мм
t_0	10^2	мкс
λ_0	10^{-1}	Вт/мм×К
ρ_0	10^{-5}	кг/м ²
c_0	10^8	Вт×мкс/кг×К
T_0	10^3	К
W_0	10^3	Вт/мм
σ_0	10^2	1/Ом×мм
S_0	10^2	В/К
μ_0	10^{-1}	Вт/мм×К
f_0	10^{-5}	кг/м ³
ε_0	10^8	Вт×мкс/кг×К
$\sigma_{r,a}, \sigma_{tr,i}$	10^{-12}	2
T_0	10^3	Вт/мм ²
n_a, n_i	10^{14}	1/мм ³
v	1	мм/мкс
ρ_{e0}	10^2	Ом×мм
I_0	10^3	А

7. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача Стефана реализована конечно-разностным неявным методом со вторым порядком аппроксимации. Для использования схем сплошного счета в дифференциальное уравнение (1) внесен учет условий на границе между фазами расплав – твердая фаза [46]. В уравнении (1) в множителе при производной по времени появляется слагаемое, содержащее теплоту плавления, действующую на интервале сглаживания [47]. Интересные результаты расчетов в работе [30] показали полное совпадение динамики расчетного и экспериментального радиуса расплава в случае учета испарения на границе пластинки вольфрама.

Задача определения токов (6) только в области образца была решена ранее [28]. Решить задачу только в области паров в настоящее время невозможно, так как постановка граничных условия для термотокров в газе над поверхностью металла вызывает большие трудности. В рассматриваемой постановке проблема постановки граничных условий снята, но возникает ряд сложностей. Амплитуду тока нельзя определить точно для непрерывной задачи с любой степенью упрощения, так как производные в точке разрыва принимают бесконечное значение. Без регуляризации нельзя приступить к численному

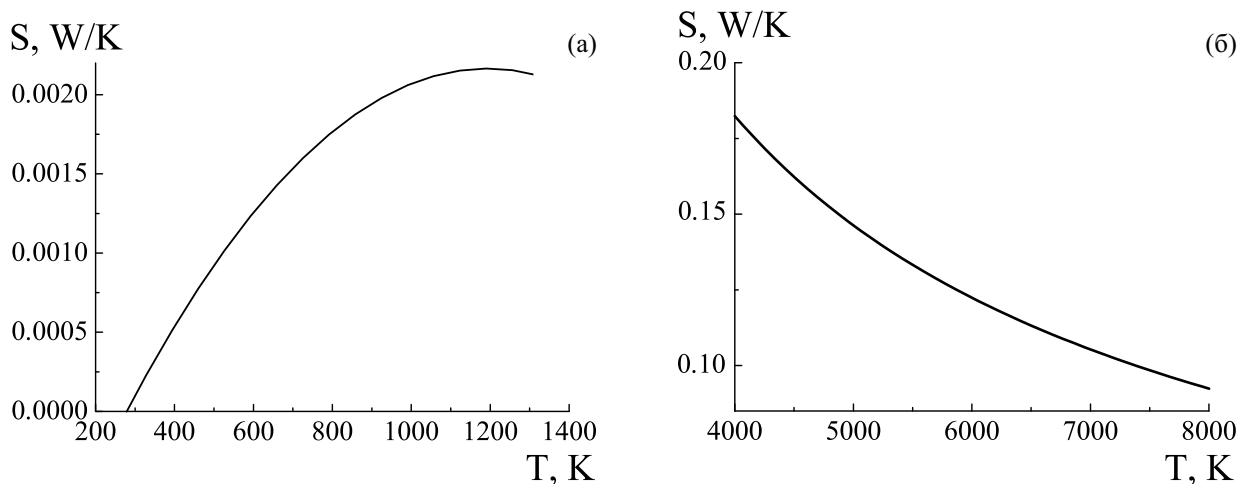


Рис. 2. График зависимости от температуры термоЭДС в газе (а) и в образце (б).

решению задачи, так как можно получить решение, зависящее от шага h расчетной сетки.

Для использования схем сплошного счета учет условий на границе между материалом пластинки и парами необходимо преобразовать

уравнение (5). В слагаемом $\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z}$ оба множителя терпят разрыв на поверхности образца. Производная тока по нормали к поверхности меняет знак, так как на границе металл-газ токи имеют максимум. При этом решение уравнения (5) имеет положительные вторые производные всюду вне поверхности образца. Производная по нормали к поверхности удельной проводимости “– это производная от разрывной функции, так как удельная проводимость металла на два порядка выше проводимости газа, не зависимо от способа ее определения. Аналогично, слагаемое $\frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r}$ в правой части уравнения (5) содержит производную от разрывной функции термоЭДС. Производные по z от разрывных функций вычисляются с использованием дельта-функции Дирака. Предложенная [48] замена производной в точке разрыва на непрерывную функцию $\delta(z - z_0)$, умноженную на число, равное скачку термоЭДС на промежутке $[z_0 - 2h, z_0 + 2h]$ адаптирована к рассматриваемой задаче. Так как производная терпит разрыв в точке максимума (при фиксированном r) функции I на границе раздела сред, слагаемое $\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z}$ требует сглаживания $\frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial z}$. В результате получаем уравнение, дающее адекватное решение на границе раздела сред:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e / r)}{\partial r} + \\ & + \frac{\partial I}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\ln(\rho_e / r)) \right\}_{z \neq z_0} + \\ & + \frac{\partial I}{\partial z} \left\{ \frac{\partial P(r, \rho_e)}{\partial z} \right\}_{z=z_0} = \frac{2\pi r}{\rho_e} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} \left\{ \frac{\partial S}{\partial z} \right\}_{z \neq z_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial T}{\partial r} \delta(z - z_0) [S]_{z=z_0} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\varepsilon = 0.05$ мм, $P(r, \rho_e) = \ln(\rho_e^{\text{met}} / r) \times$
 $\times \frac{1}{1 - \exp((z - z_0) / \varepsilon)} + \ln(\rho_e^{\text{gas}} / r)$ – сигмоида.

Для решения полной системы уравнений Максвелла в многомерном случае известны [49, 50] численные методы решения задач электродинамики с учетом нелинейных эффектов, приводящих к значительному изменению характеристик электромагнитного поля. Решение краевой задачи (6) методом верхней релаксации на каждом шаге по времени позволяет построить экономичный алгоритм при параметре релаксации $\omega = 2 - O(h)$. Уравнение (7) и алгоритм решения содержит деление на радиус только в аргументе функции логарифма в расчете коэффициента $\Phi_{i,k}$. Так как функция логарифма при росте аргумента возрастает медленно, то деление на величины порядка $h/2$ при расчетах в окрестности оси симметрии не приводит к возникновению особенностей решения.

8. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В результате численных расчетов получены замкнутые изолинии токов с максимальными

значениями на поверхности пластинки. Пик значений на границе сред металл-газ возникает в результате учета термоэмиссии. Наибольшее влияние на расчет термотока оказывает профиль температуры. В [32] показано, что при постоянных значениях удельной проводимости и термоЭДС (близких к данным для температуры 6 000 К) можно получить качественно различные максимальные значения токов на поверхности пластинки. Для заданных на поверхности пластинки линейном, нормальном и расчетном радиальном распределении температуры (рис. 3а), получены существенно различающиеся амплитуды тока (рис. 3б). Это обусловлено тем, что особенности распределения температуры задают ток. Сильный эффект усиления амплитуды тока наблюдается в результате учета неоднородности расчетного распределения температуры, которое обусловлено влиянием свободной границы расплав-металл.

Определим влияние удельной проводимости и термоЭДС на токи, возникающие в пластинке и испаряющемся газе. Возможно, термоЭДС и проводимость металла и паров при высоких температурах отличаются от рассматриваемых нами значений, но данных о свойствах вещества при высоких температурах мало. Наиболее важным является уточнение значений проводимости пара, который обратно пропорционально влияет на амплитуду тока. На рис. 4а показано радиальное распределение тока на поверхности пластинки для случаев удельной проводимости и термоЭДС определенных как постоянные [32], через степень ионизации и оценку коэффициента Зеебека и через энергию электронов. Постоянные значения удельной проводимости и термоЭДС близки к данным для температуры 8 000 К и равны $\rho_e^{\text{met}} = 2.1 \cdot 10^{-4}$, $\rho_e^{\text{gas}} = 4.6 \cdot 10^{-4}$, $S_e^{\text{met}} = 1.5 \cdot 10^{-5}$, $S_e^{\text{gas}} = 9.2 \cdot 10^{-4}$. Постоянные

значения коэффициентов дают профиль тока с сильным пиком при радиусе, соответствующем неоднородностям температуры. Использование переменных коэффициентов приводит к решениям, которые отличаются только амплитудой. Этот результат показывает, что приближения для функций коэффициентов были достаточно хорошими.

Результаты показали, что требуется уточнение постановки задачи. Рассмотрим профили температуры и тока на границе раздела сред (см. рис. 4б), полученные в результате методического расчета в области большого радиуса. На большом расстоянии от области нагрева токи не возникают. Детальное рассмотрение показывает, что области слабого и сильного роста тока, а также область его убывания, полностью соответствует областям графика температуры с разными углами наклона. В области нагрева температура достигает режима насыщения и соответствующий термоток не высокий, так как слабо влияние термоЭДС за счет небольшого градиента температуры. На рис. 4б заштрихован подграфик температуры в области расплава. Максимальные значения токов лежат вне области расплава. В расплаве токи не высоки и могут быть не достаточными для инициации вращения вещества. В модели не было учтено магнитное поле, так как его влияние в металле и плотных парах (в центре области нагрева) не значительно. При введении в задачу учета магнитного поля сопротивление будет расти начиная с определенного радиуса и можно предполагать, что максимальные значения термотоков переместятся в область расплава. Изолинии термотоков замкнуты, термотоки распространяются лучше в металле, среде с большей проводимостью, чем газ, что согласуется с теорией. При этом картина изолиний термотоков почти симметрична относительно границы металл – газ. Уточнение модели предполагает учет зависимости параметров

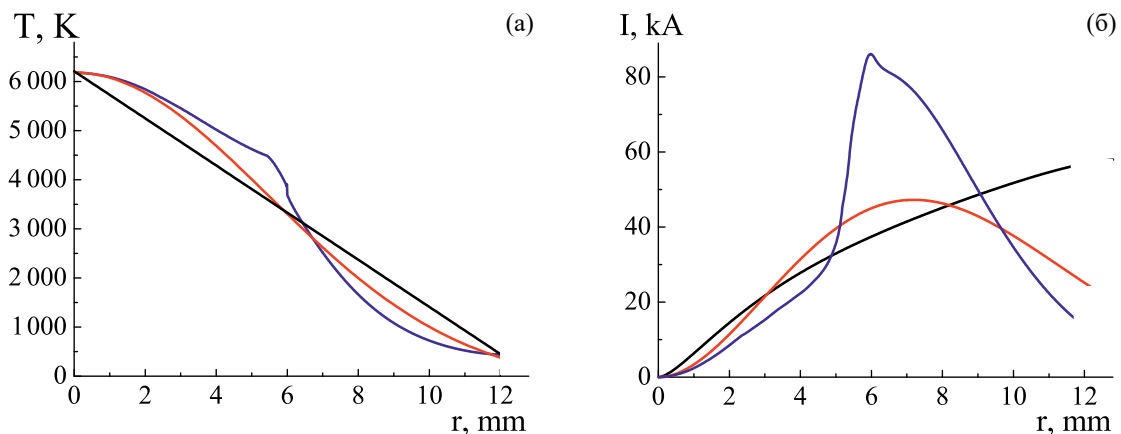


Рис. 3. Графики радиального распределения на поверхности пластинки температуры (а) и соответствующего тока (б). Линейное (черный), нормальное (красный) и расчетное (синий) распределение.

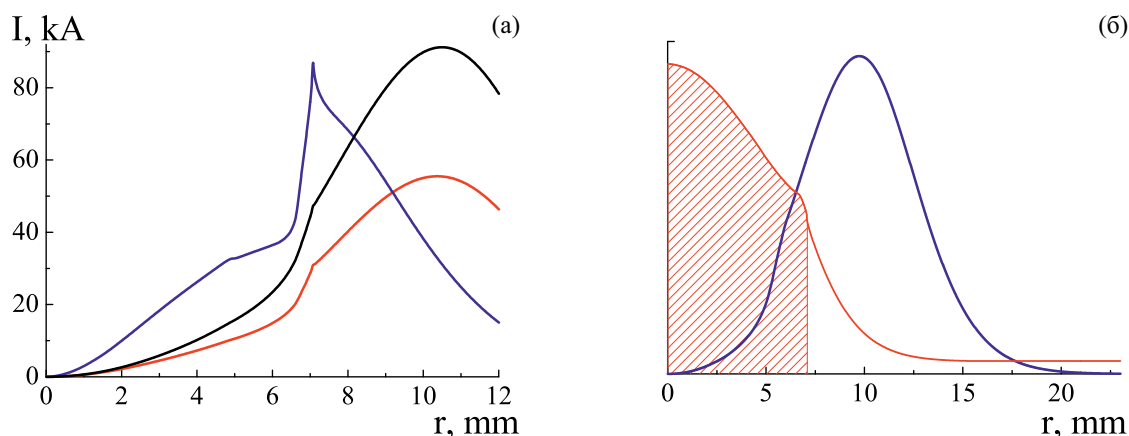


Рис. 4. Графики радиального распределения на поверхности пластинки тока (а) для постоянных (синий), рассчитанных по приближенным оценкам (черный) и по энергии электронов (красный) удельной проводимости и термоЭДС. Профиль температуры (красный) и тока (синий) на границе раздела сред (б).

возникновения термотоков не только от температуры, но и от плотности вещества над поверхностью. В работе [29] предложена теоретическая модель слабо ионизованной плазмы испарённого вольфрама, которая может объяснить возникновение тока на неравномерно нагретой границе газа и расплава. Для создания модели слабой ионизации потребуется введение в модель газодинамического блока. Влияние силы ампера на возникающие токи с учетом внешнего магнитного поля позволит качественно объяснить наблюдавшееся вращение расплава на установке ВЕТА. Соответствующая математическая модель должна отражать динамику частично ионизованного газа с мгновенным установлением ионизационного равновесия. В таком случае будет возможен расчёт проводимости и термоЭДС испаряемого вещества в релаксационном приближении в модели слабо неидеальной трёхкомпонентной плазмы. Результаты моделирования позволят объяснить механизмы возникновения новых особенностей движения и эрозии тугоплавких металлов, наблюдаемых в эксперименте.

9. ВЫВОДЫ

Проведено математическое моделирование возникновения термотоков в образце вольфрама, основанное на решении уравнений электродинамики в области образца и над ним. Температура в области образца получена в результате решения двухфазной задачи Стефана в цилиндрической системе координат. Использовано модельное распределение температуры испаряемого вольфрама в рассматриваемом тонком слое паров, повторяющее температуру поверхности. Представлены зависимости от температуры электрического сопротивления и термоЭДС, основанные на экспериментальных данных для металла и рас-

считанные для газа через энергию электронов. Проведено сравнение результатов с расчетами задачи с постоянными и полученными с помощью оценки значениями электрического сопротивления и термоЭДС в газе и металле. Расчеты показывают существенное влияние особенностей температуры, важность определения электрического сопротивления и термоЭДС в газе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 23-21-00134 <https://rscf.ru/project/23-21-00134>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thorén E., Ratynskaia S., Tolias P., Pitts R.A. The MEMOS-U code description of macroscopic melt dynamics in fusion devices // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2021. V. 63.
2. Zhu D., Li C. et al. Characterization of the in situ leading-edge-induced melting on the ITERlike tungsten divertor in EAST // Nuclear Fusion. 2019. V. 60. P. 016036.
3. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A. Novel electron beam-based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1771. P. 060004.
4. Popov V.A., Arakcheev A.S., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Trunev Yu. A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Theoretical simulation of the closed currents near non-uniformly strongly heated surface of tungsten due to thermo-emf // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. P. 033503.
5. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting

- under pulsed electron beam // *Fusion Engineering and Design*. 2018. V. 132. P. 13–17.
6. Lazareva G.G., Popov V.A., Arakcheev A.S., Burdakov A.V., Shwab I.V., Vaskevich V.L., Maksimova A.G., Ivashin N.E., Oksogoeva I.P. Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2021. V. 24. № 2. P. 97–108.
 7. Лазарева Г.Г., Попов В.А., Окишев В.А. Математическая модель динамики распределения тока электронного пучка в вольфрамовой пластинке и тонком слое его паров при импульсном нагреве с учетом электродвижущей силы // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2024. Т. 27. № 1.
 8. Lazareva G.G., Popov V.A. Effect of Temperature Distribution on the Calculation of the Thermal Current in the Mathematical Model of Pulsed Heating of a Tungsten // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44. № 10. P. 4449–4460.
 9. Vasilyev A.A., Arakcheev A.S., Bataev I.A., Bataev V.A., Burdakov A.V., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Mekler K.I., Popov V.A., Shoshin A.A., Skovorodin D.I., Trunev Y.A., Vyacheslavov L.N. Observation of the tungsten surface damage under ITER-relevant transient heat loads during and after electron beam pulse // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1771. P. 060013.
 10. Lazareva G.G., Maksimova A.G. Numerical Simulation of the Propagation of Tungsten Vapor above a Heated Surface // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2022. V. 16. № 3. P. 472–480.
 11. Askerov B.M. Electron Transport Phenomena in Semiconductors. WORLD SCIENTIFIC. 1994. <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/1926>.
 12. Filippov A.V., Starostin A.N., Gryaznov V.K. Coulomb Logarithm in Nonideal and Degenerate Plasmas // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2018. V. 126. P. 430–439.
 13. Аскеров Б.М. Кинетические эффекты в полупроводниках. Л.: Наука, 1970.
 14. Blanco F., da Silva F.F., Limão-Vieira P., García G. Electron scattering cross section data for tungsten and beryllium atoms from 0.1 to 5000 eV // *Plasma Sources Science and Technology*. 2017. V. 26. P. 085004.
 15. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
 16. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // *Fusion Engineering and Design*. 2018. V. 132. P. 13–17.
 17. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: Иностранная литература, 1961.
 18. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная литература, 1954.
 19. Abadlia L., Gasser F., Khalouk K., Mayoufi M., Gasser J.G. New experimental methodology, setup and LabView program for accurate absolute thermoelectric power and electrical resistivity measurements between 25 and 1600 K: Application to pure copper, platinum, tungsten, and nickel at very high temperatures // *Review of Scientific Instruments*. 2014. V. 85. № 9. P. 095121.
 20. Fifiis P., Kirsch L., Andruczyk D., Curreli D., Ruzic D.N. Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная литература, 1954.
 21. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача М.: Едиториал УРСС, 2003.
 22. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Popov V.A. Mathematical modeling of melting tungsten exposed to pulsed laser beam // *Dokl. Math*. 2023. V. 107. № 1. P. 83–87.
 23. Walden J. On the approximation of singular source terms in differential equations // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 1999. V. 15. № 4. P. 503–520.
 24. Загонов В.П. Математическое моделирование электромагнитного воздействия импульсных полей на сложные технические системы. Функционирование и развитие сложных народно-хозяйственных, технических, энергетических, транспортных систем, систем связи и коммуникаций. М.: МГФ “Знание”, 1998. С. 392–394.
 25. Жуковский М.Е. Самосогласованная квазитрехмерная модель радиационного возбуждения электромагнитных полей // *Математическое моделирование*. 1996. Т. 8. № 4. С. 3–20.

MATHEMATICAL MODEL OF THERMOCURRENTS BASED ON CALCULATION OF ELECTRICAL RESISTANCE AND THERMOPOWER AS AN INTEGRAL OVER ELECTRON ENERGY

Corresponding member of the RAS G. G. Lazareva^a, V. A. Popov^a, V. A. Okishev^a, A. V. Burdakov^b

^aRUDN University, Moscow, Russia

^bBudker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch Russian Academy of Sciences (BINP SB RAS), Novosibirsk, Russia

In this paper current distribution model in the tungsten sample and vapor at surface under electron beam heat was considered. The model is based on the solutions of electrodynamic equations and the two-phase Stefan problem in cylindrical coordinates. Based on the temperature distribution in the computational domain, the electrical resistance and thermopower were calculated through the integral over the electron energy at each grid node. Current is considered as a possible source of rotation of matter, which is observed in experiment. The results of the simulation showed the role of thermal emission and the development path of the model. The model parameters are taken from the experiments on the Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA) stand, created at the BINP SB RAS.

Keywords: mathematical modeling, tungsten erosion, Stefan problem, electrodynamics equations, electrical resistance, thermopower, thermionic emission.

КОНДЕНСАЦИЯ ГРАФОВ ДЛЯ БОЛЬШИХ ФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ

© 2024 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин^{1, *}, В. А. Судаков^{1, **}, Ю. П. Титов^{2, ***}

Поступило 17.01.2024 г.
После доработки 25.04.2024 г.
Принято к публикации 29.05.2024 г.

В работе разработан оригинальный метод обработки больших факторных моделей на основе конденсации графа с применением моделей машинного обучения и искусственных нейронных сетей. Созданный математический аппарат может быть использован в задачах планирования и управления сложными организационно-техническими системами, при оптимизации крупных социально-экономических объектов масштаба отраслей государства, для решения задач здоровьесбережения нации (поиск совместимостей при приеме лекарственных средств, оптимизация ресурсного обеспечения здравоохранения).

Ключевые слова: факторная модель, конденсация графа, кластеризация, собственный вектор, собственные значения

DOI: 10.31857/S2686954324030119, **EDN:** YAYMIS

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был предложен подход к моделированию сложных систем на основе ориентированного факторного графа. Его вершины — это факторы-показатели, определяющие состояние описываемой системы, а дуги — это взаимосвязи между различными факторами. Степень влияния задавалась экспертами как вес дуги. Аналогично устроены модели системной динамики [2]. Задание веса дуги возможно не только на основе экспертных суждений, но и с использованием методов машинного обучения и нейросетей на базе эмпирических данных [3]. Классическое машинное обучение сталкивается с проблемами, в том числе обусловленными рядом причин, которые не могут быть решены без создания новых методов их обработки:

1) сверхбольшой размер факторных графов (более 1 млн. вершин), приводящий к комбинаторному взрыву возможных взаимосвязей;

2) отсутствием достаточных наборов данных для машинного обучения на столь больших выборках.

Цель работы — это разработка моделей и методов позволяющих находить значения факторов в вершинах графа в случае его большой размерности. Метод решения должен позволять проводить обработку групп вершин в параллельном режиме, за счет этого должно достигаться повышение скорости решения задачи в случае 10 тыс. и более вершин.

Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ — вектор факторов влияния. $A = \|a_{ij}\|$ — матрица взаимного влияния факторов размерности $n \times n$. Причем основные сложности существующих подходов возникают если $n > 10^6$. Часть элементов матрицы A и вектора X неизвестны.

Требуется найти значения таких факторов x_j , которые связаны хотя бы с одним другим фактором x_i известной дугой: $\exists i (a_{ij} \neq 0)$.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующих задач:

- разработка методов позволяющих объединять вершины графа в группы;
- разработка процедуры нахождения значений соответствующим вершинам в конденсированном графе;
- разработка методов позволяющих по значениям в конденсированном графе находить значения первичных факторов.

¹ Федеральное государственное учреждение
“Федеральный исследовательский центр Институт
прикладной математики имени М.В. Келдыша
Российской академии наук”, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
“Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)”, Москва, Россия

* E-mail: office@keldysh.ru

** E-mail: sudakov@ws-dss.com

*** E-mail: kalengul@mail.ru

Для решения указанных задач создана оригинальная методика, основанная на гибридизации подходов линейной алгебры и машинного обучения:

- конденсация графов методами машинного обучения без учителя, самоорганизующимися искусственными нейронными сетями;
- поиск неподвижных точек в полученных конденсированных графах пониженной размерности методами линейной алгебры;
- параллельная обработка конденсированных вершин.

2. МЕТОД

Решение поставленной задачи разбивается на ряд этапов, разработанных в настоящей работе:

Этап 1. Разбиваем множество номеров j факторов $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ на подмножества. Каждому подмножеству соответствует новый фактор u_i . Назовем его конденсированный фактор. А процедуру поиска таких подмножеств – конденсацией. Вектор конденсированных факторов обозначим:

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m), m < n. \quad (1)$$

Разбиение может выполняться различными способами:

1) по смысловому признаку (например, u_i – это группа факторов одного компонента моделируемой системы);

2) на основании метрик связности (в u_i включаются сильносвязанные факторы из X). При большом числе зависимостей факторов в разреженной матрице A для определения сильных компонент целесообразно использовать не все зависимости. Вычисляется среднее (по всем факторам) влияние фактора на другой фактор в разреженной матрице A и при вычислении сильных компонент не учитывается влияние больше среднего. Такой подход близок к “Алгоритму выделения связанных компонент” [4].

Из матрицы A необходимо получить матрицу факторов влияния по новым конденсированным факторам. Обозначим ее $B = b_{kl}$. Обозначим $I(u_k, u_l)$ – множество пар номеров (i, j) факторов X , включенных в конденсированные факторы u_k и u_l для которых известен a_{ij} . Элементы b_{kl} определяют взаимовлияние конденсированных факторов и могут быть определены с использованием одного из следующих правил:

- расстояние ближнего соседа:

$$b_{kl} = \min_{(i,j) \in I(u_k, u_l)} a_{ij}; \quad (2)$$

- расстояние дальнего соседа:

$$b_{kl} = \max_{(i,j) \in I(u_k, u_l)} a_{ij}; \quad (3)$$

- групповое среднее расстояние:

$$b_{kl} = \frac{\sum_{(i,j) \in I(u_k, u_l)} a_{ij}}{|I(u_k, u_l)|}. \quad (4)$$

Далее будет показано, что использование данных альтернативных правил в текущих тестовых примерах не показало существенной разницы по критериям производительности и точности. В работе [5] для кластеризации применяется метод Уорда, но он требует знания (или предположения) функциональной зависимости между факторами, поэтому его применение не всегда возможно. При наличии такой зависимости поиск значений всех факторов не требует методов машинного обучения. Формулы (2), (3) и (4) можно рассматривать как разновидности функций, отображающих матрицу A на элементы матрицы B . Для выбора конкретного вида функциональной зависимости нет единого математического обоснования. Форма зависимости может диктоваться спецификой решаемых задач. Возможно применение и других правил вычисления b_{kl} , отличных от формул (2), (3) и (4). Правило должно допускать эффективную компьютерную реализацию. Альтернативный вариант выбора правила – это поиск таких b_{kl} , чтобы отклонение от исходных зависимостей было минимальным:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{(i,j) \in I(u_k, u_l)} |b_{kl} - a_{ij}| \rightarrow \min. \quad (5)$$

Этап 2. Мощность множества конденсированных факторов m все еще может быть велика. Поэтому определим кластеры конденсированных факторов $V = \|v_k\|$:

$$c_k = \{u_i\}, k = \overline{1, q}, q < m. \quad (6)$$

Кластеризация выполняется либо по смысловому признаку, либо с использованием методов машинного обучения без учителя: k -средних, искусственная нейронная сеть Кохонена [6]. Метрика близости определяются на основании “похожести” столбцов в матрице B используя метрику Минковского:

$$\rho(u_k, u_l) = \left(\sum_{j=1}^m |b_{jl} - b_{jk}|^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

В результате получится обобщенная матрица влияния $D = d_{kl}$ размерности $q \times q$. Все элемен-

ты d_{kl} должны быть определены. Для этого применяются аналогичные вышеописанные правила для матрицы B [5]:

- средневзвешенное по всем известным элементам b_{ij} включённым в различные конденсированные вершины:

$$d_{kl} = \frac{\sum_{(i,j) \in I(u_k, u_l)} b_{ij}}{|S(v_k, v_l)|}; \quad (8)$$

- максимум по всем известным элементам b_{ij} включённым в различные конденсированные вершины:

$$d_{kl} = \max_{(i,j) \in S(v_k, v_l)} b_{ij}, \quad (9)$$

где $S(v_k, v_l)$ — множество пар номеров (i, j) факторов U , включенных в конденсированные факторы v_k и v_l для которых известен b_{ij} .

Число кластеров q выбирается, как и в стандартных задачах машинного обучения, на основе “метода локтя” (elbow method), метрики силуэт [7]. Если для кластеризации используется смесь нормальных распределений (Gaussian Mixture Model), то используется байесовский информационный критерий (BIC) [8].

Этап 3. Обозначим неизвестные значения факторов полученной обобщенной модели:

$$V = (v_1, v_2, v_3 \dots v_q). \quad (10)$$

Их значения находятся из решения матричного уравнения:

$$V = DV + F, \quad (11)$$

где F — вектор значений, характеризующий внешнее влияние.

Значения факторов V могут быть найдены с помощью итерационной процедуры:

$$V_{k+1} = DV_k + F. \quad (12)$$

Скорость сходимости этой процедуры (и сама возможность сходимости) определяются собственными значениями матрицы D :

$$\lambda V = DV. \quad (13)$$

Необходимо найти значения конденсированных факторов V как собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению.

Этап 4. Так как $u_i \cong v_k$ для $u_i \in C_k$ по смыслу образования кластеров, необходимо построить модели $v_k \cong \varphi_k(X_{ki})$ для всех элементов кластера чтобы отклонение отклика от значений конденсированных признаков было минимальным. Здесь $\cong$ обозначает приблизительное равенство,

то есть $|u_i - v_k| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — это небольшая допустимая погрешность в определении точного значения фактора, φ_k — это новая функция для определения значений для v_k исходя из значений допустимых значений факторов X_{ki} первичной модели из конденсированной вершины i попавших в кластер k .

Решение зависит от мощности кластера и того все ли значения X_{ki} известны:

- для случая кластеров с одной конденсированной вершиной целесообразно использовать линейную модель и решение уравнения аналогичного формуле (11);
- для кластеров с 20–100 конденсированными вершинами целесообразно оценить модель на базе классических методов машинного обучения: случайного леса, градиентного бустинга;
- для случая большого числа неопределенных факторов в векторе X_{ki} целесообразно построить $\varphi_k(X_{ki})$ как вероятностную графовую модель;
- для кластеров с более 100 вершинами целесообразно провести обучение нейронных сетей.

Этап 4 выполняется в массовом параллельном режиме на суперЭВМ.

Полученную модель можно использовать для решения обратных задач математического моделирования в сложных системах. Изменяя некоторые значения в векторе первичных факторов X методика позволяет рассчитывать изменения значений в конденсированных вершинах u_i и через обратные функции φ_k^{-1} находить как изменятся значения остальных факторов. Решение может быть неоднозначным, если среди φ_k существуют не биективные функции, и это в большинстве случаев так. Однако метод позволит определить некие граничные (худшие/лучшие) возможные значения неизвестных при данной вариации факторов. Такие граничные значения факторов позволяют перейти к нечетким оценкам и проводить многокритериальный анализ с использованием теории мягких вычислений. Такая задача в частном случае решалась в работе [9]. Новый метод, созданный в настоящей работе, позволяет получать решения для задач, сформулированных в общем виде.

Применение данных этапов решения задачи ориентированно на ускорение вычислений без существенной потери точности и будет продемонстрировано ниже.

3. АПРОБАЦИЯ МОДЕЛИ

Для тестирования разработанных методов разработано программное обеспечение на язы-

ке программирования Python. Тестирование производится на множестве различных случайных графах. Для генерации вектора факторов X в программе задается размерность вектора факторов X и определяются статистические характеристики: вероятность наличия значения фактора. Для тестового примера фактор — это действительное число. Для факторов с известными значениями они генерируются по нормальному закону. Таким образом, производится исследование работы программы с различной наполненностью вектора факторов. Следует отметить, что в реальных задачах факторы могут быть представлены с другим типом значений параметров и свойств системы.

После получения вектора факторов генерируется матрица взаимовлияния факторов A . Для генерации адекватных зависимостей между факторами, факторы моделируются как множество точек на двумерной плоскости. Точки разделяются на некоторое количество кластеров, группы факторов. Для каждого кластера (группы факторов) определяются статистические характеристики кластера в виде математических ожиданий и дисперсий значений каждой из координат. Далее случайным образом определяются значения координат для каждой точки (каждого фактора) в соответствии с нормальным распределением и параметрами для кластера данного фактора. Количество факторов в кластере не одинаковое, а задается дискретной случайной величиной, определяющей к какому кластеру (группе факторов)

принадлежит фактор. Генерация может проводиться в цикле, создавая различные матрицы A для одинаковых параметров кластеризации факторов и размещения их на плоскости. Пример матрицы A с точками, расположенными на плоскости приведен на рис. 1. Для целей тестирования зависимости между факторами определяются как евклидово расстояние между точками.

Для выявления сильных компонент рассматриваются только дуги, длиннее средней длины дуги. В результате создается новая разреженная матрица A с соответствующими дугами. Путем вычисления сильносвязанных компонент новой разреженной матрицы A определяются конденсированные компоненты. Вычисление взаимовлияния конденсированных компонент матрицы B (рис. 2) находится по формулам (2–4) в параллельном режиме. При этом общие исходные данные матрицы A позволяют сравнивать алгоритмы рассматриваемые алгоритмы. Аналогично конденсация находится для матриц C и D . На рис.2 приведен пример графа для 10^4 факторов.

Кластеризация k-means и построение искусственной нейронной сети Кохонена занимает основное время работы процессора даже при конденсированных факторах. Также длительное время занимает вычисление взаимовлияний конденсированных факторов. Для данных алгоритмов вычислительная сложность растет экспоненциально росту размерности вектора факторов. В примере известно количество кластеров из-за особенностей генерации тестовой матрицы A . Из-

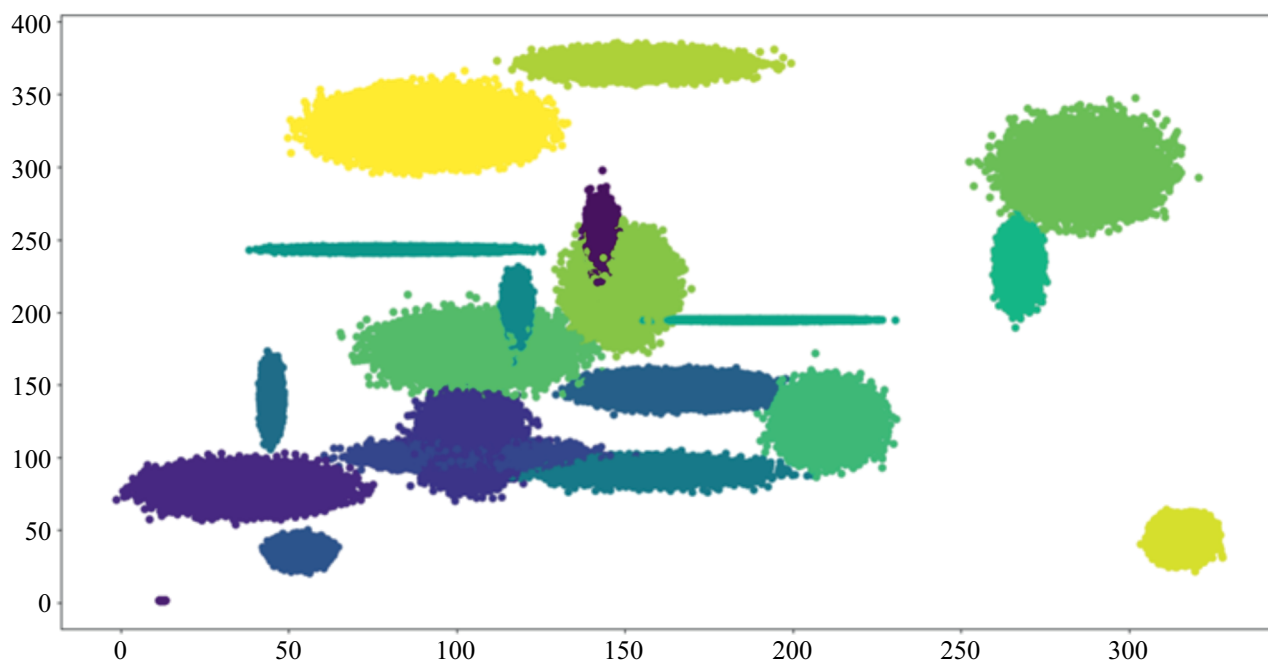


Рис. 1. Пример генерации факторов и матрицы A .

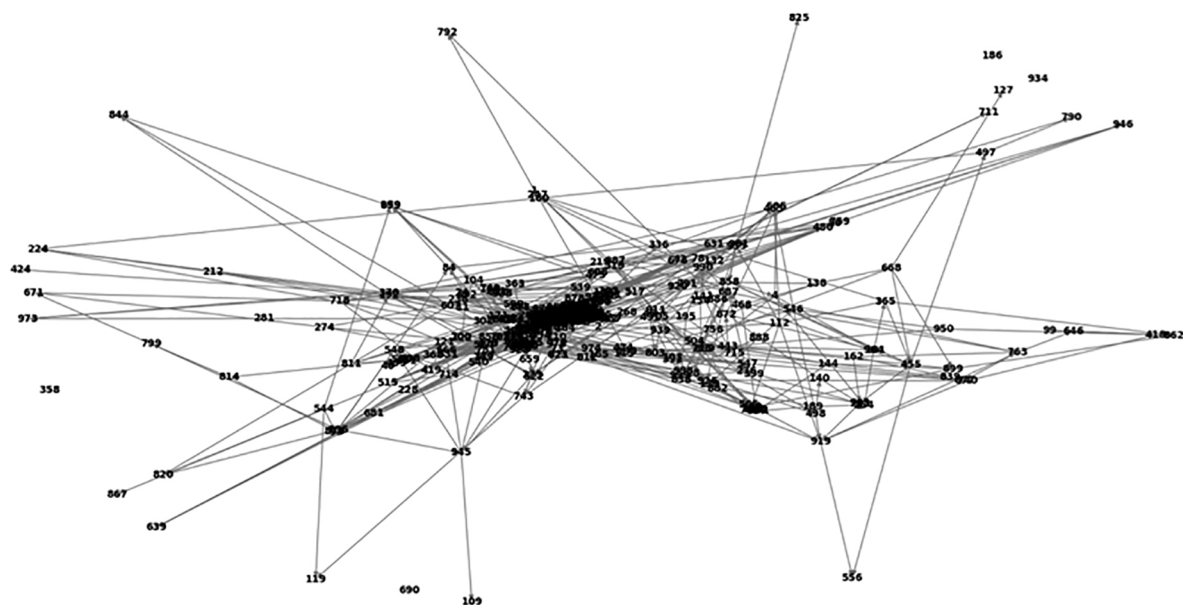


Рис. 2. Пример матрицы B , состоящей из конденсированных факторов.

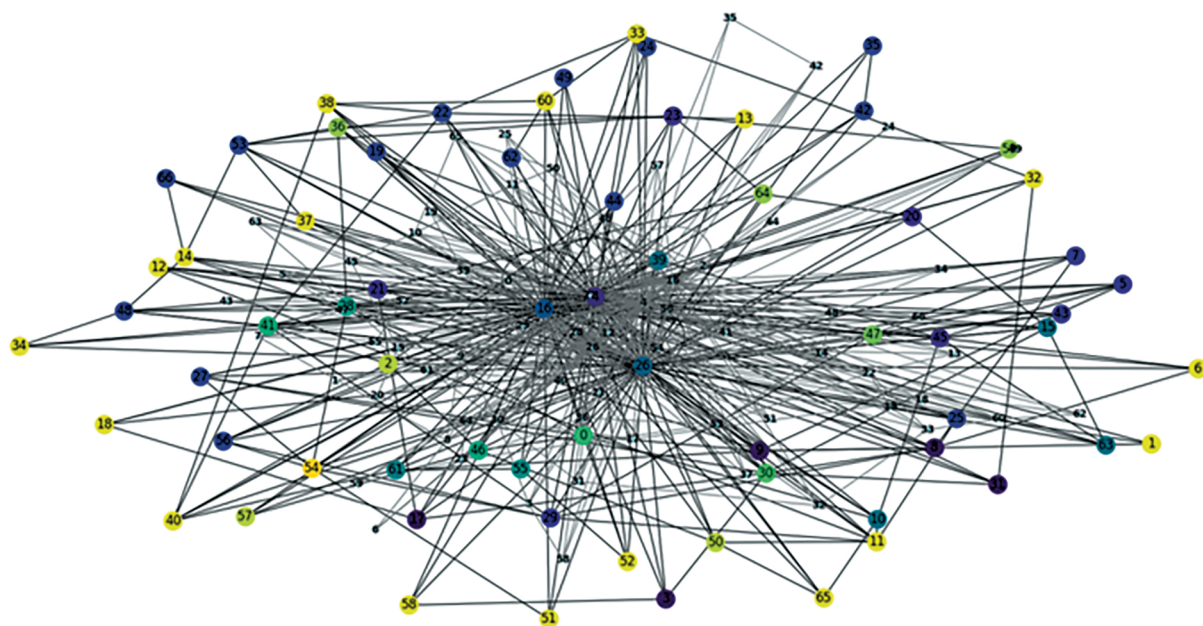


Рис. 3. Пример кластеризации конденсированных факторов методом k-means.

начально было выбрано 20 центральных точек и сгенерированы случайные точки вокруг центров. Поэтому количество кластеров было равно 20. Число центральных точек было выбрано так, чтобы произвести вычислительные эксперименты за приемлемое время. При решении реальных задач, выбор числа кластеров является компромиссом между двумя показателями — необходимыми метриками качества кластеризации (например, метрика силуэт) и приемлемым временем решения задачи. Пример конденсации графа путем кластеризации приведен на рис. 3.

Эффективность работы алгоритма оценивается по времени работы отдельных оставляющих и точности восстановленных факторов. В рассматриваемой тестовой задаче доля неизвестных факторов и неизвестных зависимостей равна 0.3.

В таблице 1 приведены результаты сравнения времени работы полной обработки графа без конденсации и 3 варианта конденсации вершин по формулам (2), (3) и (4). рассматривались 4 варианта размерности тестовой задачи. Оценки времени получены по 100 вычислительным экспериментам.

Таблица 1. Среднее время выполнения методов (в сек)

Размерность вектора факторов	10000	20000	30000	40000
Решение задачи без конденсации				
Суммарное время на восстановление неизвестных факторов	9.234	77.726	258.076	640.243
Время выполнения общих шагов в случае конденсации графа				
Поиск сильно связанных компонент в матрице A	0.045	0.219	0.452	0.832
Создание сокращенной матрицы A	0.266	1.270	2.942	5.711
Определение сильных компонент	0.016	0.066	0.146	0.300
Конденсация с учетом расстояния по формуле (2)				
Создание матрицы B путем объединения кластеров	0.236	1.011	2.269	3.924
Восстановление неизвестных факторов B	0.003	0.006	0.004	0.005
Вычисление k-means	0.017	0.018	0.018	0.018
Суммарное время на восстановление неизвестных факторов	0.585	2.590	5.831	10.791
Конденсация с учетом расстояния по формуле (3)				
Создание матрицы B путем объединения кластеров	0.257	1.012	2.235	3.839
Восстановление неизвестных факторов B	0.004	0.006	0.006	0.004
Вычисление k-means	0.016	0.016	0.016	0.016
Суммарное время на восстановление неизвестных факторов	0.605	2.590	5.798	10.702
Конденсация с учетом расстояния по формуле (3)				
Создание матрицы B путем объединения кластеров	0.268	1.063	2.368	4.061
Восстановление неизвестных факторов B	0.003	0.007	0.004	0.004
Вычисление k-means	0.017	0.017	0.017	0.016
Суммарное время на восстановление неизвестных факторов	0.616	2.642	5.930	10.925

Из таблицы видно, что время решения задачи с использованием конденсации на порядок меньше времени чем без использования конденсации. При восстановлении факторов вычислялось математическое ожидание координат фактора. Выделение сильных компонент и создание матрицы B позволяет существенно сократить количество факторов, что приводит к резкому уменьшению времени поиска решения.

При этом точность найденных значений факторов при конденсации уменьшается, но незначительно. Так относительная средняя точность значения фактора без конденсации составляет 0.893 для 10000 факторов; 0.912 для 20000 факторов; 0.935 для 30000 факторов и 0.953 для 40000 факторов, а при конденсации любым из трех методов – 0.873; 0.900; 0.906 и 0.920 соответственно. Также следует отметить увеличение точности при увеличении выборки, связанное с тем, что при усреднении факторы объединяются, а размерность матрицы B растет незначительно.

В данный момент разработанные методы апробируются для задачи определения рисков полифармокотерапии, возникающих при одновременном применении нескольких лекарственных средств. Исходными данными такой

задачи являются утвержденные Минздравом РФ инструкции по применению лекарственных средств. В инструкциях указаны взаимодействия между некоторыми препаратами, но такое взаимодействие имеется только для парных взаимодействий. Риски, по применению трех и более медицинских препаратов не определены в инструкциях. Кроме того, в инструкциях определены только некоторые попарные взаимодействия, так как полное множество даже попарных взаимодействий лекарственных средств велико.

Взаимодействие лекарственных средств возможно определить с помощью экспертов. Такие экспертные оценки, принятые медицинским сообществом, оформлены в клинические рекомендации. Рекомендации описывают лекарственные препараты (медицинские непатентованные названия), назначаемые при определенных заболеваниях и диагнозах. При этом ситуации, когда необходимо назначить более трех лекарственных средств, или пациент уже принимает большое количество лекарственных средств, оцениваются консилиумом врачей.

Взаимодействие лекарственных средств требует учета влияния лекарственного средства на организм человека. Из инструкций к лекар-

ственным средствам выявляется множество мишеней действия. В инструкции к лекарственному препарату указываются не все мишени, а только основные.

$$P_i = (p_{i,1} p_{i,2} \dots p_{i,m_i}), \text{ для } \forall P_i \in S, \quad (14)$$

где S — множество лекарственных средств в реестре Минздрава; P_i — множество мишеней для i -го лекарственного средства;

Принимаемое лекарственное средство воздействует на мишени различным образом. Степень воздействия определяется лингвистическими переменными: $p_{i,j} \in \{\text{“усиливает”, “ослабляет”} \dots\}$. Переход от лингвистических переменных к непрерывным осуществляется с помощью частотного анализа, экспертных оценок или через нечеткие множества. По результатам данного перехода указывается степень влияния $p_{i,j} \in [0..1]$, где 0 — отсутствие влияния на мишень, 1 — максимальное влияние.

Возможно взаимовлияние некоторых мишеней, которое может быть вычислено из инструкции к лекарственному средству. В основе вычислений взаимовлияний мишеней положено предположение, что лекарственное средство представлено одним действующим веществом, которое, в зависимости от дозировки, влияет сразу на несколько мишеней. Поэтому, если в инструкции к лекарственному средству не указано влияние на мишень, а у другого лекарственного средства с аналогичным действующим веществом это влияние найдено, то можно предположить о возможном неуказанном влиянии первого лекарственного средства на все остальные мишени. Такая информация может быть представлена матрицей взаимовлияния мишеней A .

При взаимодействии двух лекарственных средств их влияние на мишени усиливаются. Итоговое влияние комбинации принимаемых лекарственных средств на мишени определяется значениями факторов при мишенях. Так как количество комбинаций принимаемых лекарственных средств велико, то эффективно хранить только важные и интересующие врачей и пациентов комбинации, а остальные комбинации могут быть вычислены по результатам работы системы. Падение точности оценок при конденсации графа, показанное в тестовом примере, не существенно, а время вычисления взаимовлияния лекарственных средств является важным критерием, поэтому целесообразно применение конденсации графа.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная методика построения моделей сложных систем ориентирована на решение задач учета большого числа взаимосвязанных факторов. Она позволяет решать высокоразмерные задачи путем выделения сильносвязанных компонент в факторном графе и кластеризации этих компонент. Методика может быть использована при решении обратных задач математического моделирования для поиска рациональных вариаций факторов, поддающихся изменению. Создаваемые модели позволяют учесть как экспертные суждения о взаимном влиянии факторов, так и данные, содержащиеся в эмпирических наблюдениях. Целесообразно применение данного подхода в масштабных задачах здоровьесбережения нации (поиск совместимостей при приеме лекарственных средств, оптимизация ресурсного обеспечения здравоохранения). В перспективе методика позволит оценивать решения по управлению сложными организационно-техническими системами и может быть использована для оптимизации крупных социально-экономических систем государственного масштаба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н., Судаков В.А. Факторная модель для исследования сложных процессов // Доклады Академии наук. 2019. Т. 489. № 1. С. 17–21.
2. Forrester J.W. Policies, decisions and information sources for modeling // European Journal of Operational Research. 1992. V. 59. № 1. P. 42–63.
3. Honti G., Dörgő G., Abonyi J. Network analysis dataset of system dynamics models // Data in Brief. 2019. V. 27. P. 104723.
4. Jain A., Murty M., Flynn P. Data Clustering: A Review // ACM Computing Surveys. 1999. V. 31. № 3.
5. Lance G.N., Williams W.T. A general theory of classification sorting strategies in hierarchical system // Comp. J. 1967. № 9. P. 373–380.
6. Kohonen T. Essentials of the self-organizing map // Neural Networks. 2013. V. 37. P. 52–65.
7. Alam A., Ahamad M.K. K-Means Hybridization with Enhanced Firefly Algorithm for High-Dimension Automatic Clustering // Journal of Advanced Research in Applied Sciences and Engineering Technology. 2023. V. 33. № 3. P. 137–153.
8. Reynolds D. Gaussian Mixture Models // Encyclopedia of Biometrics. Boston, MA: Springer, 2009.
9. Нестеров В.А., Судаков В.А., Сыпало К.И., Туттов Ю.П. Матрица нечетких корреспонденций модели авиационных перевозок // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2022. Т. 6. № 6. С. 95–102.

GRAPH CONDENSATION FOR LARGE FACTOR MODELS

Academician of the RAS **B. N. Chetverushkin^a, V. A. Sudakov^a, Yu. P. Titov^b**

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia*

^b*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

The paper proposes an original method for processing large factor models based on graph condensation using machine learning models and artificial neural networks. The proposed mathematical apparatus can be used in problems of planning and managing complex organizational and technical systems, in optimizing large socio-economic objects on the scale of state sectors, to solve problems of preserving the health of the nation (searching for compatibility when taking medications, optimizing resource provision for healthcare).

Keywords: factor model, graph condensation, clustering, eigenvector, eigenvalues

УДК 515.124+512.562+515.126.4+515.126.83

НУЛИ КОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ

© 2024 г. Т. Н. Фоменко^{1,*}

Представлено академиком РАН С.В. Матвеевым

Поступило 14.05.2024 г.

После доработки 28.05.2024 г.

Принято к публикации 06.06.2024 г.

Введено понятие конической функции с операторными коэффициентами на коническом метрическом пространстве. Доказана теорема о существовании нулей таких функций. На этой основе получена теорема о неподвижных точках многозначного отображения в себя конического метрического пространства, обобщающая недавнюю теорему Е.С. Жуковского и Е.А. Панасенко о неподвижной точке многозначного сжимающего отображения конического метрического пространства с операторным коэффициентом сжатия. Получены теоремы о совпадении двух многозначных отображений конических метрических пространств, обобщающие более ранние результаты автора о совпадении многозначных отображений метрических пространств.

Ключевые слова: коническая метрика, коническая функция, многозначное отображение, неподвижная точка, точка совпадения

DOI: 10.31857/S2686954324030125, EDN: YAUNWS

Данное краткое сообщение посвящено существованию неподвижных точек и точек совпадения многозначных отображений конических метрических пространств. В 2009–2013 автором было введено понятие (α, β) -поискового функционала и доказано несколько вариантов теорем о поиске нулей таких функционалов в метрическом пространстве. В качестве следствий были получены теоремы о неподвижных точках и совпадении однозначных и многозначных отображений метрических пространств, обобщающие ряд известных результатов разных авторов (см., например, [1, 2]).

Пусть X непустое множество, $(S, \|\cdot\|)$ банахово пространство. Пусть $K \subset S$ — положительный выпуклый замкнутый острый конус, то есть замкнутое выпуклое подмножество, удовлетворяющее условиям:

- 1) $0 \in K$;
- 2) $\forall a \in K, a \neq 0 \Rightarrow \forall \mu > 0, \mu a \in K, -\mu a \notin K$;
- 3) $\forall a, b \in K \Rightarrow \forall t \in [0; 1], ta + (1-t)b \in K$.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: tnfohenko@gmail.com

Наличие конуса K в S задает частичный порядок $\leq_K$ на S . А именно, для любых $a, b \in S$ ($a \leq_K b$) $\Leftrightarrow (b - a \in K)$. Итак, задано частично упорядоченное множество $(S, \leq_K)$.

Определение 1. Конической метрикой на X , ассоциированной с конусом K , называется отображение $d_K : X \times X \rightarrow K$, удовлетворяющее аксиомам обычной метрики, то есть для любых $x, y \in X$ выполнены следующие условия:

1. $d_K(x, y) \geq_K 0; (d_K(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;
2. $d_K(x, y) = d_K(y, x)$;
3. для любого $z \in X$ верно, что $d_K(x, y) \leq_K d_K(x, z) + d_K(z, y)$.

Пусть на множестве $X \neq \emptyset$ задана коническая метрика d_K , как описано выше. Пространство (X, d_K) с конической метрикой d_K называется коническим метрическим пространством.

В некоторых предыдущих работах автором использовались конические метрические пространства, но для характеристики отображений обычно применялись числовые коэффициенты, как в обычных метрических пространствах.

В 1964 году А.И. Перовым было доказано обобщение принципа сжимающих отображений [3] в пространствах с метрикой, принимающей значения в конусе $\mathbb{R}_+^n$, см. также [4]. В качестве

коэффициента сжатия использовался положительный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ со спектральным радиусом меньше единицы. В 2016 в работе Е.С. Жуковского [5] для характеристики некоторых векторно-значных отображений произведений метрических пространств применены операторные (матричные) коэффициенты. В 2018 году эта естественная и полезная идея была использована в совместной работе Е.С. Жуковского и Е.А. Панасенко [6] для характеристики сжимающих отображений в коническом метрическом пространстве.

В данном кратком сообщении идея операторных коэффициентов используется для развития метода (α, β) -поисковых функционалов в коническом метрическом пространстве и его применений в теории неподвижных точек и совпадений.

Будем предполагать, что норма в S монотонна по отношению к частичному порядку $\leq_K$, то есть $(a \leq_K b) \Rightarrow (\|a\| \leq \|b\|)$. Отметим, что в таком случае конус K также называют *нормальным* с коэффициентом нормальности, равным 1. Кроме этого, будем предполагать, что конус K является воспроизводящим, то есть $S = K - K$. Иначе говоря, любой элемент $a \in S$ представим в виде разности элементов конуса K .

В множестве $L(S) := \{L : S \rightarrow S\}$ всех ограниченных линейных операторов в пространстве S рассмотрим подмножество L_+ линейных операторов, оставляющих конус K инвариантным, то есть $L_+ := \{P \in L(S) \mid P(K) \subseteq K\}$. Поскольку конус K воспроизводящий, с монотонной нормой, то несложно проверить, что множество L_+ также представляет собой положительный выпуклый замкнутый острый конус в $L(S)$ (см. также [6]). Этот конус L_+ определяет частичный порядок $\leq$ на пространстве $L(S)$. А именно, будем говорить, что для $F, G \in L(S)$ верно: $F \leq G$, если $G - F \in L_+$.

Теперь введем в рассмотрение понятие конической функции с операторными коэффициентами. Многочисленные отображения будем обозначать двойными стрелками $\rightrightarrows$.

Определение 2. Многочисленное отображение $\varphi : X \rightrightarrows K$ будем называть конической функцией (с операторными коэффициентами A, B) или (A, B) -конической функцией, если выполнены следующие условия:

1) заданы ограниченные линейные операторы $A, B \in L_+$, такие, что оператор A обратим,

$A^{-1} \in L_+$, и композиция $A^{-1}B : K \rightarrow K$ имеет спектральный радиус $\lambda = \lambda(A^{-1}B) < 1$;

2) для любого $x \in X$ и любого $c \in \varphi(x) \subset K$ существует такой элемент $x' \in X$, что $d_K(x, x') \leq_K A^{-1}(c)$, и существует такое значение $c' \in \varphi(x')$, что $c' \leq_K A^{-1}B(c)$.

График (A, B) -конической функции φ будем обозначать $Graph(\varphi) = \{(x, c) \mid x \in X, c \in \varphi(x)\} \subseteq X \times S$. Фундаментальность и сходимость последовательностей в $X \times S$ (и в частности, в графике $Graph(\varphi)$) будем рассматривать в по-компонентной метрике $D = d_K \times v$, где $v(a, b) := \|a - b\|$.

Определение 3. График $Graph(\varphi)$ (A, B) -конической функции φ называется $\{0\}$ -полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subset Graph(\varphi)$, где $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, сходится к элементу этого графика. График $Graph(\varphi)$ называется $\{0\}$ -замкнутым, если любой его предельный элемент вида $(\xi, 0)$ содержится в нем.

Теорема 1. Пусть на полном коническом метрическом пространстве (X, d_K) задана многозначная (A, B) -коническая функция $\varphi : X \rightrightarrows K$ с операторными коэффициентами $A, B : K \rightarrow K$. Пусть график $Graph(\varphi)$ функции φ является $\{0\}$ -замкнутым. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любого значения $c_0 \in \varphi(x_0)$ существует такая точка $x_* = x_*(x_0, c_0) \in X$, что $0 \in \varphi(x_*)$ и для конического расстояния $d_K(x_0, x_*)$ верна следующая оценка:

$$d_K(x_0, x_*) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(c_0).$$

Доказательство. Из свойств многозначной (A, B) -конической функции φ следует, что начиная с произвольной начальной точки $x_0 \in X$ и любого значения $c_0 \in \varphi(x_0)$, можно построить последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subset Graph(\varphi)$ со следующими свойствами:

$$d_K(x_{n-1}, x_n) \leq_K A^{-1}(c_{n-1}), c_n \leq_K A^{-1}B(c_{n-1}). \quad (1)$$

Покажем, что такая последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в (X, d_K) . В самом деле, рассмотрим коническое расстояние $d_K(x_n, x_{n+m})$.

Заметим, что из предположения $\lambda(A^{-1}B) < 1$ следует обратимость оператора $I - A^{-1}B : S \rightarrow S$.

При этом оператор $(I - A^{-1}B)^{-1}$ равен сумме итерационного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} (A^{-1}B)^i$. Этот ряд

состоит из операторов $(A^{-1}B)^i \in L_+$. Так как конус L_+ замкнут, то $(I - A^{-1}B)^{-1} \in L_+$, при-

чем для любого $N \in \mathbb{N}$ верно неравенство:

$$\sum_{i=0}^N (A^{-1}B)^i \leq (I - A^{-1}B)^{-1}$$
. Используя неравенства (1) и свойства метрики d_K , имеем:

$$\begin{aligned} d_K(x_n, x_{n+m}) &\leq_K \sum_{j=0}^{m-1} d_K(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \\ &\leq_K \sum_{j=0}^{m-1} A^{-1}(c_{n+j}) \leq_K \sum_{j=0}^{m-1} A^{-1}(A^{-1}B)^{n+j}(c_0) = \\ &= A^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} (A^{-1}B)^{n+j}(c_0) = \\ &= A^{-1}(A^{-1}B)^n \sum_{j=0}^{m-1} (A^{-1}B)^j(c_0) \leq \\ &\leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(A^{-1}B)^n(c_0). \end{aligned}$$

Поскольку у оператора $A^{-1}B$ спектральный радиус $\lambda = \lambda(A^{-1}B) < 1$, то $(A^{-1}B)^n \rightarrow 0$ в L_+ . В силу монотонности нормы,

$$\|d(x_n, x_{n+m})\| \leq_K \|A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(A^{-1}B)^n(c_0)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому ясно, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как коническое метрическое пространство (X, d_K) предполагается полным, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \in X$. В силу непрерывности конической метрики d_K (в соответствующей ей топологии), тогда

$$\begin{aligned} d_K(x_0, x_*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_K(x_0, x_n) \leq \\ &\leq_K \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} d_K(x_j, x_{j+1}) \leq_K \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} A^{-1}(c_j) \leq_K \\ &\leq_K A^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (A^{-1}B)^j(c_0) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(c_0). \end{aligned}$$

Заметим, что $c_n \leq_K (A^{-1}B)^n(c_0) \rightarrow 0$. Так как по условию теоремы график $Graph(\varphi)$ является $\{0\}$ -замкнутым, то $(x_*, 0) \in Graph(\varphi)$, то есть $0 \in \varphi(x_*)$. $\square$

Рассмотрим некоторые следствия из доказанной теоремы.

Теорема 2. Пусть (X, d_K) полное коническое метрическое пространство, $F: X \rightrightarrows X$ многозначное отображение. Пусть отображение $\varphi: X \rightrightarrows K$, где $\varphi(x) = \{d \in K \mid \exists z \in F(x), d = d_K(x, z)\}$ является (A, B) -конической функцией для линейных ограниченных операторов $A, B \in L_+$. Пусть график $Graph(\varphi)$ функции φ является $\{0\}$ -замкнутым.

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любого $y_0 \in F(x_0)$ существует неподвижная точка $\xi = \xi(x_0, y_0)$ отображения F , то есть $\xi \in F(\xi)$, и верна оценка:

$$d_K(x_0, \xi) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(d_K(x_0, y_0)).$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1. Достаточно заметить, что множество нулей специальной (A, B) -конической функции φ , то есть таких точек $x \in X$ что $0 \in \varphi(x)$, совпадает с множеством неподвижных точек отображения F . Взяв в качестве $c_0 = d_K(x_0, y_0)$ и дословно повторяя доказательство теоремы 1, получим точку x_* , такую, что $(x_*, 0) \in Graph(\varphi)$, то есть $0 \in \varphi(x_*)$, что эквивалентно включению $x_* \in F(x_*)$. $\square$

Определение 4. Пусть (X, d_K) коническое метрическое пространство, $F: X \rightrightarrows X$ многозначное отображение, $Q: K \rightarrow K$ ограниченный линейный оператор со спектральным радиусом $\lambda(Q) < 1$. Отображение F называется Q -сжимающим (сжимающим с операторным коэффициентом Q), если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого $y_1 \in F(x_1)$ верно, что существует $y_2 \in F(x_2)$, для которого $d_K(y_1, y_2) \leq Q(d_K(x_1, x_2))$.

Следующее утверждение содержится в статье [6] и представляет конический метрический аналог известной теоремы Надлера о неподвижной точке многозначного отображения. Ниже покажем, что это утверждение следует из теоремы 2.

Теорема 3. [6, теорема I] Пусть (X, d_K) полное коническое метрическое пространство, $F: X \rightrightarrows X$ многозначное Q -сжимающее отображение с замкнутыми образами, с операторным коэффициентом сжатия $Q \in L_+$, у которого спектральный радиус $\lambda(Q) < 1$. Тогда для любого $x_0 \in X$ и любого $y_0 \in F(x_0)$ существует неподвижная точка отображения F , то есть такая точка $\xi \in X$, что $\xi \in F(\xi)$, причем верна оценка:

$$d_K(x_0, \xi) \leq_K (I - Q)^{-1}(d_K(x_0, y_0)).$$

Фактически это частный случай теоремы 2. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 3 отображение $\varphi: X \rightrightarrows K$, где $\varphi(x) = \{c \in K \mid \exists y \in F(x), c = d_K(x, y)\}$, является многозначной (I, Q) -конической функцией (Здесь $I = id_K$ — тождественное отображение конуса K). Действительно, для любой точки x и любого $y \in F(x)$, то есть для любого значения $c = d_K(x, y) \in \varphi(x)$ существует точка $x' \in X, x' = y \in F(x)$, такая, что $d_K(x, x') = d_K(x, y) \leq_K c = d_K(x, y)$, и существует такое значение $c' \in \varphi(x')$, то есть существует такой элемент $y' \in F(x') = F(y)$, что

$c' = d_K(y, y') \leq_K Q(d_K(x, x'))$. Отметим, что сжимающее отображение F является замкнутым, то есть его график замкнут. Но тогда и график функции φ замкнут, и тем более он $\{0\}$ – замкнут. Так что для отображения F выполнены все условия теоремы 2. Поэтому утверждение следует из теоремы 2.

Рассмотрим теперь задачу о существовании точек совпадения двух многозначных отображений. Пусть заданы два конических метрических пространства (X, d_K) и (Y, ρ_K) , где $d_K : X \rightarrow K, \rho_K : Y \rightarrow K$ конические метрики со значениями в конусе $K \subset S$. Пространство (X, d_K) полно.

Теорема 4. Пусть в описанных условиях заданы два многозначных отображения $F, G : X \rightrightarrows Y$ с ограниченными замкнутыми образами. Рассмотрим отображение $\psi : X \rightrightarrows K$, определенное по правилу: $\psi(x) := \{c \in K \mid \exists y \in F(x), \exists z \in G(x), \rho_K(y, z) = c\}$. Предположим, что отображение ψ является (A, B) -конической функцией по отношению к линейным операторам $A, B \in L_+$. Пусть график $\text{Graph}(\psi)$ является $\{0\}$ – замкнутым. Тогда для любой начальной точки $x_0 \in X$ и любой пары значений $y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0)$ у отображений F, G существует точка совпадения $\xi = \xi(x_0, y_0, z_0) \in X$, то есть $F(\xi) \cap G(\xi) \neq \emptyset$, и верна оценка: $d_K(x_0, \xi) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(\rho_K(y_0, z_0))$.

Доказательство. Легко видеть, что множество точек совпадения отображений F и G равно множеству нулей функционала ψ . Поэтому утверждение следует из теоремы 1. Действительно, для начальной точки $x_0 \in X$ и точек $y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0)$, возьмем $c_0 = \rho_K(y_0, z_0)$ в качестве начального значения функции φ . Рассуждая как в доказательстве теоремы 1, получим точку $\xi \in X$, такую, что $\varphi(\xi) \ni 0$. Это означает, что $F(\xi) \cap G(\xi) \neq \emptyset$, иначе говоря, $\xi \in \text{Coin}(F, G) := \{x \in X \mid F(x) \cap G(x) \neq \emptyset\}$. $\square$

Следующая теорема является модификацией теоремы 4 о существовании точек совпадения двух многозначных отображений, без привлечения в явном виде понятия (A, B) -конической функции.

Пусть, как и выше, $(X, d_K), (Y, \rho_K)$ конические метрические пространства с метриками d_K, ρ_K со значениями в конусе K банахова пространства S . Обозначим $\Delta_2 := \{(x, z) \in Y^2 \mid x = z\}$ – диагональ в Y^2 . В $Y^2 = Y \times Y$ будем рассматривать покомпонентную метрику $\rho_K \times \rho_K : Y^2 \times Y^2 \rightarrow K \times K$.

Теорема 5. Пусть $F, G : X \rightrightarrows Y$ – многозначные отображения с замкнутыми ограниченными обра-

зами, $\Phi = F \times G : X \rightrightarrows Y^2$, и $\text{Graph}(\Phi)$ является Δ_2 -замкнутым, то есть если последовательность $\{(x_n, (y_n, z_n))\} \subseteq \text{Graph}(\Phi)$ сходится к элементу вида $(\xi, (\zeta, \zeta))$, $(\zeta, \zeta) \in D_2$, то $(\xi, (\zeta, \zeta)) \in \text{Graph}(\Phi)$. Предположим также, что хотя бы один из графиков $\text{Graph}(F), \text{Graph}(G)$ полон. Пусть заданы линейные операторы $\Gamma, A, B \in L_+$, и у оператора $A^{-1}B$ спектральный радиус $\lambda = \lambda(A^{-1}B) < 1$. Предположим, кроме того, что для каждого $x \in X$, и любых $y_1 \in F(x), y_2 \in G(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y'_1 \in F(x'), y'_2 \in G(x')$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $d_K(x, x') \leq_K A^{-1}(\rho_K(y_1, y_2))$;
- 2) $\rho_K(y_1, y'_1) + \rho_K(y_2, y'_2) \leq_K \Gamma(\rho_K(y_1, y_2))$;
- 3) $\rho_K(y'_1, y'_2) \leq_K A^{-1}B(\rho_K(y_1, y_2))$.

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любых $y_{01} \in F(x_0), y_{02} \in G(x_0)$ существует точка совпадения $\xi \in X$ отображений F, G и точка $\zeta \in F(\xi) \cap G(\xi)$ такие, что справедливы оценки:

$$d_K(x_0, \xi) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(\rho_K(y_{01}, y_{02})),$$

$$\rho_K(y_{01}, \zeta) + \rho_K(y_{02}, \zeta) \leq_K \Gamma A(I - A^{-1}B)^{-1}(\rho_K(y_{01}, y_{02})).$$

Доказательство. Вследствие условий теоремы, начиная с любой точки $x_0 \in X$ и любых значений $y_{01} \in F(x_0), y_{02} \in G(x_0)$, можно построить последовательности $x_n \in X, y_{1n} \in F(x_n), y_{2n} \in G(x_n)$, удовлетворяющие условиям: а) $d_K(x_n, x_{n+1}) \leq_K A^{-1}\rho_K(y_{1n}, y_{2n})$; б) $\rho_K(y_{1n}, y_{1(n+1)}) + \rho_K(y_{2n}, y_{2(n+1)}) \leq_K \Gamma(\rho_K(y_{1n}, y_{2n}))$; в) $\rho_K(y_{1(n+1)}, y_{2(n+1)}) \leq_K (A^{-1}B)(\rho_K(y_{1n}, y_{2n}))$. Нетрудно видеть, что в силу условий а), б), в), построенные последовательности $\{x_n\}, \{y_{1n}\}, \{y_{2n}\}$ фундаментальны, и $\rho_K(y_{1n}, y_{2n}) \rightarrow 0$.

Пусть, например, график $\text{Graph}(F)$ полон. Тогда фундаментальные последовательности $\{(x_n, y_{1n})\}, \{(x_n, y_{2n})\}$, (последовательность $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна по метрике d_K , а последовательности $\{y_{1n}\}, \{y_{2n}\} \subset Y$ фундаментальны по метрике ρ_K), с условием, что $\rho_K(y_{1n}, y_{2n}) \rightarrow 0$, сходятся к одному и тому же элементу $(\xi, \zeta) \in X \times \underset{n \rightarrow \infty}{Y}$. В самом деле, в силу полноты графика $\text{Graph}(F)$, последовательность $\{(x_n, y_{1n})\}$ сходится к некоторому элементу (ξ, ζ) . Поскольку последовательности $\{y_{1n}\}, \{y_{2n}\}$ фундаментальны и сближаются, то и последовательность $\{(x_n, y_{2n})\}$ также сходится к (ξ, ζ) . Это означает, что последовательность $\{(x_n, (y_{1n}, y_{2n}))\} \subset \text{Graph}(\Phi)$ сходится к некоторому элементу $(\xi, (\zeta, \zeta))$. По условию Δ_2 -замкнутости графика $\text{Graph}(\Phi)$, отсюда следует, что $(\xi, (\zeta, \zeta)) \in \text{Graph}(\Phi)$, то есть $F(\xi) \cap G(\xi) \ni \zeta$, а значит ξ точка совпадения отображений F, G . Требуемые оценки на расстояния $d_K(x_0, \xi)$ и

$\rho_K(y_{01}, \zeta) + \rho_K(y_{02}, \zeta)$ получаются стандартно. В случае полноты графика $Graph(G)$ рассуждения вполне аналогичны. $\square$

Отметим, что теорема 5 является коническим аналогом (с операторными коэффициентами) теоремы 3 из [1].

Автор искренне благодарит рецензентов статьи за ряд полезных замечаний и рекомендаций, позволивших улучшить изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фоменко Т.Н.** Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии // Математические заметки. 2013. Т. 93. Вып. 1. С. 127–143. DOI: 10.4213/mzm9255 *Fomenko T.N.* Cascade Search for Preimages and Coincidences: Global and Local Versions // Mathematical Notes. 2013. V. 93. № 1. P. 172–186. Pleiades Publishing. <https://doi.org/10.1134/S000143461301001X>
2. **Захарян Ю.Н., Фоменко Т.Н.** Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады РАН. Серия: Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 13–17. DOI: 10.31857/S2686954320040220 *Fomenko T.N., Zakharyan Yu.N.* Zero Preservation for a Family of Multivalued Functionals, and Applications to the Theory of Fixed Points and Coincidences // Doklady Mathematics. 2020. V. 102. № 1. P. 272–275. <https://doi.org/10.1134/S1064562420040225>
3. **Перов А.И.** О задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 1964. Вып. 2. С. 115–134.
4. **Перов А.И.** Обобщенный принцип сжимающих отображений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2005. № 1. С. 196–207.
5. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. 3. С. 344–362. DOI: 10.4213/mzm10675
6. **Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.** О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Труды Института Математики и Механики Уро РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 93–105. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105

ZEROS OF CONIC FUNCTIONS, FIXED POINTS AND COINCIDENCES

T. N. Fomenko^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.V. Matveev

Concept of conic function with operator coefficients is introduced. Zero existence theorem is proved for such functions. On this basis, fixed point theorem is obtained, for a multivalued self-mapping of a conic metric space, generalizing the recent fixed point theorem by E.S. Zhukovsky and E.A. Panasenko, for a contracting multivalued mapping of a conic metric space, with operator contracting coefficient. Coincidence theorems are obtained, for two multivalued mappings of conic metric spaces, which generalize the more previous author's results on coincidences of two multivalued mappings of metric spaces.

Keywords: conic metric, conic function, multivalued mapping, fixed point, coincidence point

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЛАЗЕРНОЙ ТЕРМОХИМИИ МЕТАНА В ПРИСУТСТВИИ КАТАЛИТИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ

© 2024 г. Е. Е. Пескова^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 15.12.2023 г.

После доработки 15.05.2024 г.

Принято к публикации 30.05.2024 г.

Разработан вычислительный алгоритм на основе метода конечных объемов с расщеплением системы уравнений по физическим процессам для моделирования нестационарных задач лазерной термохимии с каталитическими наночастицами в дозвуковых потоках газа. Проведено моделирование двухфазных потоков в нагретой трубе с лазерным излучением и радикальной кинетикой неокислительной конверсии метана. Показано, что на выходе трубы конверсия метана составляет более 60% с преимущественным образованием этилена и водорода.

Ключевые слова: математическое моделирование, дозвуковые потоки, двухфазная среда, химические реакции, лазерное излучение

DOI: 10.31857/S2686954324030135, **EDN:** YANRZO

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Современные потребности химической индустрии в малотоннажной переработке метана и других легких углеводородов вернули интерес к лазерной термохимии с развитием математического моделирования. В частности, актуально изучить химические процессы конверсии метана в реакциях с участием углеводородных радикалов во внутренних двухфазных течениях газа с наночастицами при воздействии лазерного излучения. В численных моделях необходимо решать нестационарные системы уравнений физико-химической динамики дозвуковой газопылевой многокомпонентной среды, для которых характерно наличие нескольких сильно различающихся между собой временных и пространственных масштабов. Давление и скорость в таких моделях зависят от изменений объема и

внутренней энергии среды в химических радикальных реакциях как в газе, так и на поверхности частиц и от поглощения излучения.

Для нестационарных задач дозвуковой динамики однофазной среды предложены вычислительные алгоритмы, которые учитывают изменение объема в химических реакциях [15, 16]. Изучаемая математическая модель для многокомпонентной двухфазной среды отличается значительной диффузией легких радикалов, эндотермическим эффектом радикально-цепных реакций и существенным энергопоглощением от стенок трубы и от лазерного излучения.

Для расчетов динамики подобных сред построен вычислительный алгоритм на основе схемы расщепления по физическим процессам. Каждый шаг интегрирования по времени разбивается на решение уравнений химической кинетики, уравнения для интенсивности излучения, уравнения для температуры наночастиц, интегрирование уравнений конвекции-диффузии, расчет динамической составляющей давления. Далее выполняется коррекция вектора скорости. Для нахождения конвективных членов в уравнениях применяются численные потоки Русанова

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарёва”, Саранск, Россия

*E-mail: e.e.peskova@math.mrsu.ru

и WENO-схема повышенного порядка аппроксимации. Разработанный алгоритм применен к расчетам осесимметричного течения двухфазной газопылевой среды в нагретой трубе с лазерным излучением и химическими реакциями. Найдено, что каталитическая активация метана на поверхности наночастиц, поддерживаемая поглощением в газе лазерного излучения, позволяет получить высокие конверсии метана в газофазных радикальных реакциях при пониженных температурах стенок трубы. В частности, для рассматриваемой в настоящей работе задачи на выходе трубы массовая доля этилена составляет около 30 %, водорода – 9 %, ацетилена 6 %, бензола и других ароматических соединений 15 %, а доля метана становится менее 40 %.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Система уравнений Навье–Стокса в приближении малых чисел Маха [16] была расширена на систему уравнений вязкой газопылевой двухфазной среды с учетом химических реакций и лазерного излучения [17]:

$$\frac{\partial \rho_g Y_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g Y_m \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{J}_m + R_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) + \nabla \pi = \nabla \cdot \vec{\tau}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g h_g + \sum_i \rho_i h_i) + \nabla \cdot ((\rho_g h_g + \sum_i \rho_i h_i) \vec{v}) = \\ & = -\nabla \cdot \vec{q} + (n_g \alpha + \sum_i n_i \alpha_i) F - \sum_i 4\pi s_i^2 n_i \sigma (T_i^4 - T_g^4), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S \equiv \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\rho_g C_p T_g} \left(-\sum_{i=1}^N \rho_i \frac{C_p (T_g - T_i)}{\zeta_i} + n_g \alpha F \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho_g C_p T_g} \left(\nabla \cdot \lambda \nabla T_g + \sum_m \rho_g D_{m, \text{mix}} \nabla Y_m \nabla h_m \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho_g} \sum_m \frac{M_w}{M_{wm}} (\nabla \cdot \rho_g D_{m, \text{mix}} \nabla Y_m) + \\ &+ \frac{1}{\rho_g} \sum_m \left(\frac{M_w}{M_{wm}} - \frac{h_m}{C_p T_g} \right) R_m. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений включает уравнения переноса массы компонент газовой смеси (1) и пылевых частиц (2), уравнение переноса импульса (3), уравнение для энтальпии газа и частиц (4) и условие на дивергенцию вектора скорости (5).

Здесь ρ_g – плотность газовой смеси, Y_m – массовая доля компоненты газа, M – количество компонент в газовой смеси, $\vec{J}_m$ – вектор диффузионного потока, R_m – скорость образования или расхода m -ой компоненты смеси, $\vec{v}$ – скорость потока газа и частиц, ρ_i – плотность частицы, N – количество фракций частиц, $\rho = \rho_g + \sum_{i=1}^N \rho_i$ – суммарная плотность газа и частиц, $\pi = p_g - p_0$ – динамическая составляющая давления, p_g – давление, p_0 – давление, постоянное в области, τ – тензор вязких напряжений, h_g – энтальпия газа, h_i – энтальпия каждой фракции частиц, $\vec{q}$ – вектор потока тепла, n_g – средняя концентрация молекул поглощающего газа в единице объема, n_i – концентрация частиц пылевой фракции, F – интенсивность излучения, α, α_i – коэффициенты поглощения, T_g – температура газа, T_i – температура частиц пылевой фракции, s_i – радиус частицы, σ – постоянная Стефана-Больцмана, C_p – теплоемкость смеси при постоянном давлении, ζ_i – время тепловой релаксации частицы в среде, M_w – средняя молекулярная масса смеси, M_{wm} – молекулярная масса m -ой компоненты смеси.

Для термодинамической составляющей давления p_0 уравнение состояния газовой смеси имеет вид

$$p_0 = \rho R T \sum_m \frac{Y_m}{M_{wm}}. \quad (6)$$

Модель также необходимо дополнить выражениями для вектора диффузионного потока, вектора потока тепла для смеси, тензора вязких напряжений:

$$\vec{J}_m = -\rho D_{m, \text{mix}} \nabla Y_m, \quad D_{m, \text{mix}} = D_{m, \text{mix}}(Y_m, T_g) \quad (7)$$

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T - \sum_m h_m \rho D_{m, \text{mix}} \nabla Y_m, \quad \lambda = \lambda(Y_m, T_g) \quad (8)$$

$$\vec{\tau} = \mu \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) I \right), \quad \mu = \mu(Y_m, T_g) \quad (9)$$

Коэффициенты диффузии $D_{m, \text{mix}}$, теплопроводности λ , вязкости μ являются функциями, зависящими нелинейно от температуры и концентраций компонент смеси. Для расчета коэффициентов теплопроводности и вязкости используется взвешивание вязкости и теплопроводности по мольным долям компонент смеси. Коэффициенты диффузии компонента относительно смеси вычисляется через бинарные коэффициенты диффузии по формуле Уилки [18].

Интенсивность излучения определяется из решения уравнения

$$\frac{dF}{dl} + (n_g \alpha + \sum_i n_i \alpha_i) F = 0. \quad (10)$$

Здесь l — координата распространения лазерного излучения, коэффициент поглощения α газовой смеси в случае излучения CO_2 лазера и наличия этилена в смеси определен в [19], коэффициент поглощения фракцией пыли определяется по теории Ми.

Скорость образования или расхода компоненты смеси определяется суммированием по всем реакциям

$$R_m = M_{wm} \sum_{n=1}^N v_{mn} w_n. \quad (11)$$

Здесь v_{mn} — стехиометрические коэффициенты m -й компоненты в стадии реакции k , w_k — скорость k -ой стадии. В модели используется двухтемпературная кинетическая схема радикально-цепных реакций, включающая 40 элементарных стадий и 15 компонент газовой смеси [20].

Энтальпия газовой смеси и энтальпия частиц твердой фазы определяются из выражений

$$h_g(T_g, Y_m) = \sum_m Y_m h_m(T_g), \quad (12)$$

$$h_m(T_g) = \int_{T_{ref}}^{T_g} C_{pm}(T_g) dT_g + h_m^0,$$

$$h_i(T_i) = C_{DV} T_i. \quad (13)$$

Здесь h_0 — энтальпия образования каждой компоненты газа, $T_{ref} = 293.15$ К, $C_{pm}(T_g)$ — удельная теплоемкость каждой компоненты смеси при постоянном давлении, C_{DV} — теплоемкость вещества частиц при постоянном объеме.

Для определения температуры частиц используется выражение [21]:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{m_i C_{DV}} \left(\begin{aligned} &\alpha_i F - 4\pi s_i^2 \sigma (T_i^4 - T_g^4) - \\ &- a\pi \frac{s_i^2}{2} p_g c_t \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_i}{T_g} - 1 \right) - Q \cdot R \end{aligned} \right). \quad (14)$$

Здесь a — коэффициент аккомодации, s_i — радиус частицы, c_t — средняя тепловая скорость молекул газа, Q — тепловой эффект реакции, R — число превращений в единицу времени.

Представленная система уравнений дополняется начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий принимаются концентрации газовых компонент Y_m^0 , концентрации частиц n_i^0 , температура газа T_g^0 , температура частиц T_i^0 , давление p^0 , скорость потока $\vec{v}^0$. В качестве граничных условий рассматриваются условия втекания потока ($Y_m^{in}, n_i^{in}, T_g^{in}, T_i^{in}, p^{in}, \vec{v}^{in}, F^{in}$), условия вытекания (p^{out}), условия прилипания ($T_g^{bound}, \vec{v} = 0$). F^{in} может иметь постоянное значение или зависеть от времени для непрерывного, импульсного или импульсно-периодического излучения.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Строим вычислительный алгоритм на основе схемы расщепления по физическим процессам для осесимметрических задач в цилиндрической системе координат. Разбиваем область на равномерную сетку прямоугольников. Для интегрирования по времени используем схему Эйлера, для аппроксимации пространственных производных используем метод конечных объемов. Схема имеет первый порядок аппроксимации по времени, второй по пространству. В общем виде решаемую систему можно представить как

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + L_h^{conv} U^n - D_h^{diff} U^n = W(U^n). \quad (15)$$

Здесь $U = (\rho_g Y_m, \rho_i, \rho \vec{v}, (\rho_g h_g + \sum_i \rho_i h_i))^T$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$ — вектор результирующих переменных, $L_h^{conv}(U)$ — нелинейный конвективный оператор, $D_h^{diff}(U)$ — нелинейный диффузионный оператор, $W(U)$ — вектор источников членов.

В рамках одного шага интегрирования по времени последовательно выполняются следующие этапы:

1. Нахождение интенсивности излучения F^{n+1} вдоль оси симметрии из уравнения (10) с использованием метода Радо [22].

2. Нахождение температуры T_i^{n+1} (уравнение (9)) методом Радо и энтальпии (уравнение (13)) частиц.

3. Решение системы уравнений химической кинетики методом Радо

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} = R(U^n). \quad (16)$$

В результате получаем обновленный вектор $\tilde{U} = (\rho_g \tilde{Y}_m, \rho_i^n, (\rho \vec{v})^n, (\rho_g h_g + \sum_i \rho_i h_i)^n)^T$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$.

4. Расчет конвективных и диффузионных потоков без учета динамической составляющей давления

$$\frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} + L_h^{\text{conv}} U^n - D_h^{\text{diff}} U^n = 0. \quad (17)$$

Для расчета конвективных членов применяется модификация потоков Русанова [23], в которой в качестве стабилизирующего члена потока используется значение вектора скорости [24, 25]. Реконструкция примитивных переменных на границе ячеек сетки проводится WENO схемой [26]. Для расчета диффузионных членов используется схема с центральными разностями. В результате получаем обновленный вектор $U^{n+1} = ((\rho_g Y_m)^{n+1}, \rho_i^{n+1}, (\rho \vec{v})^*, (\rho_g h_g + \sum \rho_i h_i)^{n+1})^T$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$.

5. Нахождение из суммарной энтальпии газа и частиц $(\rho_g h_g + \sum \rho_i h_i)^{n+1}$ энтальпии газа. Методом Ньютона находится температура газа T_g^{n+1} .

6. Поскольку вычисленное значение вектора скорости из системы (17) не удовлетворяет условию на его дивергенцию (5), проводим коррекцию [27]

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1}. \quad (18)$$

Для нахождения динамической составляющей давления решаем уравнение Пуассона [27]:

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \vec{v}^* - S^{n+1}}{\Delta t}. \quad (19)$$

В результате получаем обновленный вектор $U^{n+1} = ((\rho_g Y_m)^{n+1}, \rho_i^{n+1}, (\rho \vec{v})^{n+1}, (\rho_g h_g + \sum \rho_i h_i)^{n+1})^T$, из которого можем рассчитать примитивные переменные: ρ_g , Y_m , ρ_i , $\vec{v}$, T_g , $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$.

Верификация каждого численного метода на отдельных этапах (1)–(6), их комбинаций и в целом всего вычислительного алгоритма проводилась решением соответствующих модельных задач. Расчеты на последовательности сгущающихся сеток показали сходимость алгоритма с заявленными порядками аппроксимации для дозвуковых течений изучаемой газопылевой среды.

4. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ В НАГРЕТОЙ ТРУБЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ И ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Рассмотрим применение в численных расчетах представленного алгоритма к исследованию течения в трубе двухфазной среды газ-каталитические наночастицы под воздействием лазерного излучения.

Определим длину цилиндрической трубы 0.3 м и ее диаметр 0.02 м. Давление 1 атмосфера, начальная температура газа и частиц 1 073 К. Начальный состав газа 100 % CH_4 . Зададим расход газа и частиц на входе через левый торец 60 л/ч, температура 300 К. Состав газа 100 % CH_4 , концентрация частиц 10^{19} м^{-3} , их радиус $s_i = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$. Для частиц, в частности, Al_2O_3 плотность $3.95 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость $1.06 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$. Оценка удельной поверхности твердой фазы дает $30 \text{ см}^2 \text{ в см}^3$ среды, что обеспечивает превышение примерно в 100 раз общей поверхности частиц над поверхностью трубы. Через левый торец трубы непрерывно вводится лазерное излучение интенсивностью $2.6 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$, диаметр луча 0.012 м. На правом торце трубы задано условие вытекания потока. Температура стенок трубы 1123 К. При таких условиях число Маха $\approx 10^{-4}$, число Рейнольдса ≈ 10 . Число сеточных узлов во всей области 300×10 , шаг интегрирования по времени 10^{-5} сек .

На рисунках далее представлены результаты выхода на стационарные значения функций, характеризующих газ, частицы и лазерное излучение. В области поглощения лазерного излучения скорость смеси, как следует из рис. 3, для ее распределения вдоль оси трубы, увеличивается, оставаясь параболической в радиальном направлении по длине трубы. Далее поток испытывает торможение с уменьшением скорости примерно в 2 раза к выходу из трубы. Этим наше течение в трубе отличается от течения Пуазейля, для которого скорость не меняется по длине трубы.

В области поглощения лазерного излучения температура среды повышается и интенсивно протекают гетерогенно-гомогенные реакции,

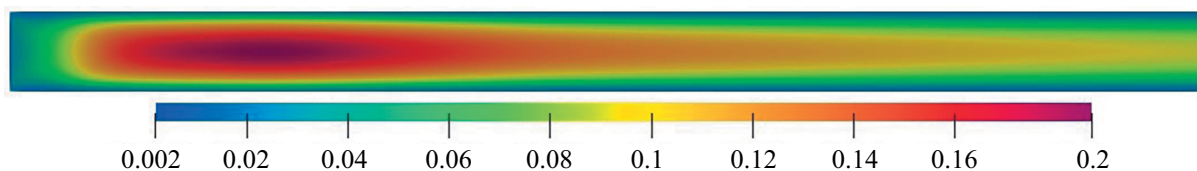


Рис. 1. Распределение скорости смеси, м/с.

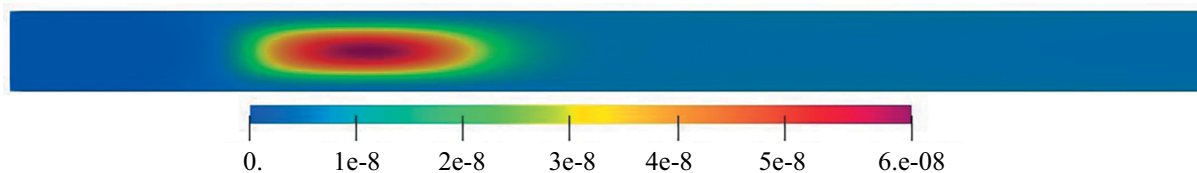


Рис. 2. Распределение атома водорода.

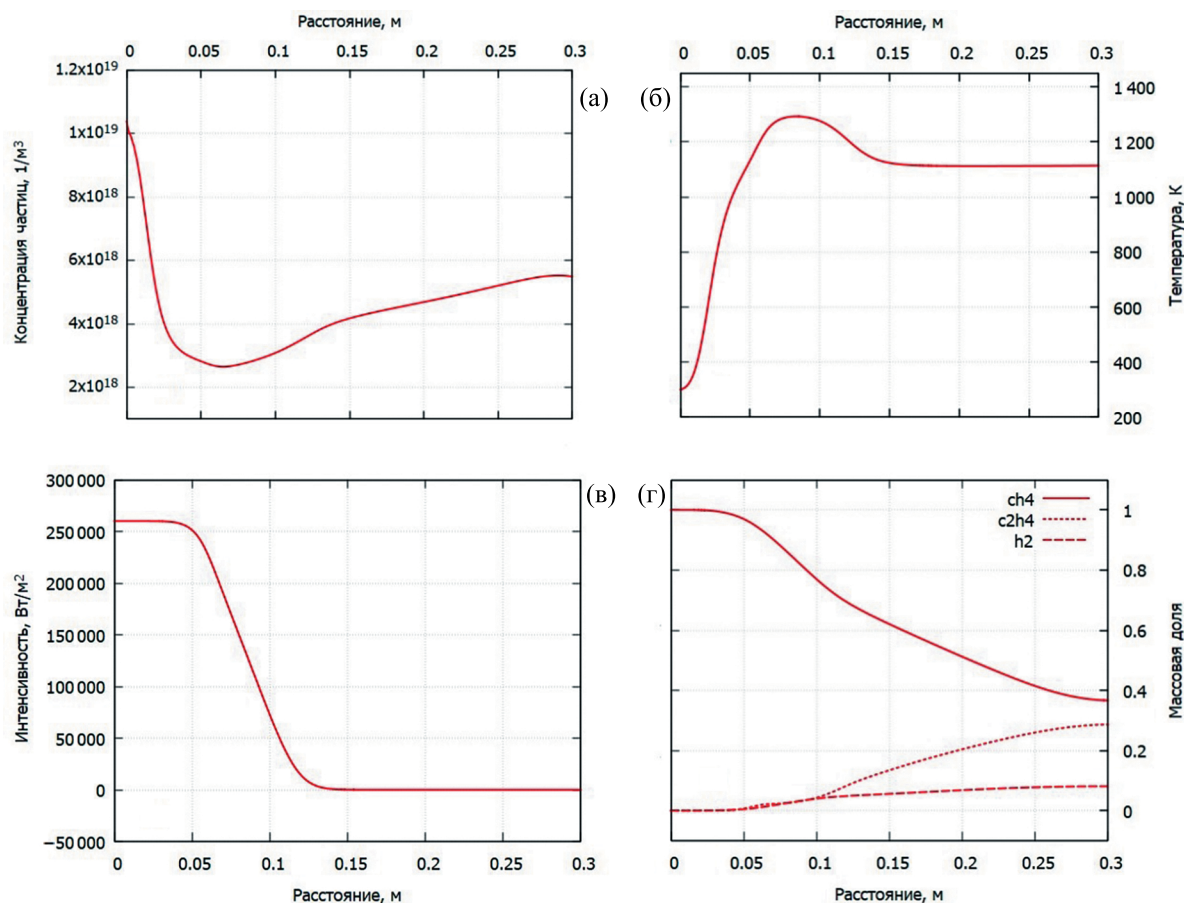


Рис. 3. Распределение основных характеристик смеси вдоль направления потока.

что видно по распределению атома водорода на рис. 3. В небольшой области его пиковое значение в массовых долях более чем в 6 раз отличается от значений в области без поглощения излучения. Эта область служит местом инициирования радикальных цепных реакций конверсии метана в газе. Гетерогенные реакции запускаются на поверхности частиц, концентрация которых на рис. 3а вдоль оси отвечает изменению скорости газа по длине трубы с ускорением и замедлением потока. Температура смеси (температуры газа и частиц отличаются примерно на один градус) и интенсивность излучения, рис. 3б и рис. 3в, демонстрируют быстрый нагрев среды излучением и горячими стенками трубы с нарастанием мас-

совой доли этилена, рис. 3г. Дальнейшая конверсия метана идет практически в изотермических условиях с температурой стенок трубы. На выходе массовая доля метана становится менее 40 %. Выходы этилена около 30 %, водорода — 9 %, ацетилена 6 %, бензола и других ароматических соединений 15 %.

Таким образом, созданный вычислительный алгоритм открывает возможность изучения процессов лазерной термохимии двухфазной среды газ-твердые каталитические частицы. Численный код с данным алгоритмом проходит опытную эксплуатацию в интересах экспериментальных исследований на стенде лазерного катализа [28].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН В.Ф. Тишкину за полезные обсуждения вычислительного алгоритма и ведущему научному сотруднику ИК СО РАН В.Н. Снытникову за сотрудничество в решении задач лазерной термохимии.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00202).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов В.Е., Якуш С.Е., Сысоева Е.Я. Численное моделирование распространения ячеистых пламен в узком зазоре между пластинами // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 3. С. 3–25.
2. Day M.S., Bell J.B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. V. 4. № 4. P. 535–556.
3. Snytnikov V.N., Peskova E.E., Stoyanovskaya O.P. Mathematical Model of a Two-Temperature Medium of Gas–Solid Nanoparticles with Laser Methane Pyrolysis // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. № 15 (5). P. 877–893.
4. Fairbanks D.F., Wilke C.R. Diffusion Coefficients in Multicomponent Gas Mixtures // Ind. Eng. Chem. 1950. V. 42. № 3. P. 471–475.
5. Snytnikov V.N., Snytnikov V.N., Masyuk N.S., Markelova T.V. The Absorption of CO₂ Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2020. V. 253. id 107119. P. 1–6.
6. Lashina E.A., Peskova E.E., Snytnikov V.N. Mathematical modeling of the homogeneous-heterogeneous non-oxidative CH₄ conversion: the role of gas-phase H or CH₃ // Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis. 2023. 15 p.
7. Гуренцов Е.В., Еремин А.В., Фальченко М.Г. Моделирование процессов теплообмена лазерно-нагретых наночастиц с окружающей газовой средой // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Т. 11.
8. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
9. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1. № 2. С. 267–279.
10. Klein B., Müller B., Kummer F., Oberlack M. A high-order discontinuous Galerkin solver for low Mach number flows // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2015.
11. Пескова Е.Е., Снытников В.Н., Жалнин Р.В. Вычислительный алгоритм для изучения внутренних ламинарных потоков многокомпонентного газа с разномасштабными химическими процессами // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. Т. 15. № 5. С. 1169–1187.
12. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report. 1997. № 97–65. P. 79.
13. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991.
14. Снытников В.Н., Снытников В.Н., Масюк Н.С., Маркелова Т.В., Пармон В.Н. Стенд лазерного катализа // Приборы и техника эксперимента. 2021. № 3. С. 129–137.

MATHEMATICAL MODELING OF NONSTATIONARY PROBLEMS OF METHANE'S LASER THERMOCHEMISTRY IN THE PRESENCE OF CATALYTIC NANOPARTICLES

E. E. Peskova^a

^aFederal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “National Research Ogarev Mordovia State University”, Saransk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

The article states the computational algorithm based on the finite volume method with splitting by physical processes for modeling non-stationary problems of laser thermochemistry with catalytic nanoparticles in subsonic gas flows. Two-phase flows in a heated pipe with laser radiation and radical kinetics of non-oxidative methane conversion are simulated. It is shown that the conversion of methane is more than 60 % with the predominant formation of ethylene and hydrogen at the outlet of the pipe.

Keywords: mathematical modeling, subsonic flows, two-phase medium, chemical reactions, laser radiation

УДК 517.968.72

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2024 г. Н. А. Раутиан^{1, 2, *}

Представлено академиком РАН В. А. Садовничим

Поступило 16.04.2024 г.

После доработки 19.05.2024 г.

Принято к публикации 28.05.2024 г.

Проведено исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. На основе полученных ранее результатов установлена связь между спектрами оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений и спектрами генераторов полугрупп операторов. На основе спектрального анализа генераторов полугрупп операторов и соответствующих оператор-функций получены представления решений рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, представления решений

DOI: 10.31857/S2686954324030144, **EDN:** YADJRU

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в большом числе прикладных задач.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1]–[14] и их библиографию).

В работе используется подход, связанный с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений (см., например, [1], [2], [15], [16]). Сформулированы результаты о существовании сильно не-

прерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве.

На основе теорем о локализации и структуре спектра символов, а также на основе теорем о полноте и базисности Рисса из подпространств системы корневых векторов, отвечающих невещественной части спектра в замыкании их линейной оболочки, устанавливаются представления решений начальных задач для систем операторно-дифференциальных уравнений первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве и для абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, содержащих два некоммутирующих линейных оператора.

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [1], [2], [8]–[14]).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положитель-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

ный оператор $A^* = A \geq \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H , имеющий компактный обратный оператор. Пусть B – самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$, такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенствам, $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in D(A)$, I – тождественный оператор в пространстве H .

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \int_0^t K_1(t-s)Au(s)ds - \int_0^t K_2(t-s)Bu(s)ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(+0) &= \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \\ u(t) &= \varphi(t), t \in [l, 0], \quad -\infty \leq l < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1, 2$ имеют следующее представление:

$$K_i(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

где $d\mu_i$, ($i = 1, 2$) – положительная мера, порождаемая неубывающей, непрерывной справа функцией μ_i . Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Будем предполагать, что функции μ_i , ($i = 1, 2$) представляют собой суммы абсолютно непрерывных функций и функций скачков (ступенчатых функций), сингулярная компонента отсутствует. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B. \quad (5)$$

Замечание 1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [15], с. 177–179) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ – допускают ограниченное замыкание в H , A_0^{-1} – ограниченный оператор.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β , $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β , введя на $D(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β .

Определение 1. Назовем вектор-функцию $u(t)$ классическим решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

3. ЗАДАЧА КОШИ В РАСШИРЕННОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Через Ω_k обозначим пространства $L_{\mu_k}^2(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , снабженные нормами

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(s)\|_H^2 d\mu_k(s) \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2,$$

соответственно. Пространства являются сепарабельными гильбертовыми (см., например, [17], стр. 148). Определим линейный оператор умножения на независимую переменную в пространстве Ω_k ($k = 1, 2$).

Определение 2 (см. [16], стр. 31). Оператор умножения на независимую переменную $\mathbb{T}_k : \Omega_k \rightarrow \Omega_k$ ($k = 1, 2$) определяется следующим образом:

$$\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau \xi(\tau), \quad \xi(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad \tau > 0, \quad (6)$$

где область определения $D(\mathbb{T}_k)$ имеет следующий вид

$$D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau \xi(\tau) \in \Omega_k\}. \quad (7)$$

Введем операторы $\mathbb{B}_k : H \rightarrow \Omega_k$ ($k = 1, 2$), действующие, следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v \quad k = 1, 2, \quad \tau > 0.$$

тогда сопряженные операторы имеют следующий вид: $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \rightarrow H$ ($k = 1, 2$),

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau) \quad k = 1, 2.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau) \right\rangle_{\Omega_k} = \\ &= \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau) \right\rangle_H d\mu_k(\tau) = \\ &= \left\langle v, Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau) \right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) \rangle_H.\end{aligned}$$

Введем гильбертово пространство

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\oplus_{k=1}^2 \Omega_k \right),$$

снабженное нормой

$$\begin{aligned}\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 &= \|v\|_H^2 + \\ &+ \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,\end{aligned}$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$\begin{aligned}D(\mathbb{A}) &= \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \\ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) &\in H_{1/2}, \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), k = 1, 2\},\end{aligned}\quad (8)$$

действующий следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T &= \\ &= \begin{pmatrix} -A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], \\ A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), k = 1, 2 \end{pmatrix}^T.\end{aligned}\quad (9)$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде следующего произведения операторных матриц:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Замечание 2. Согласно теореме 1 из работы [10], при выполнении условий (4), оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$, является максимально диссипативным и, следовательно, является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Введем 4-х компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in D(\mathbb{A}), \quad (10)$$

$$Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A}), \quad (11)$$

где функции $\xi_{0k}(\tau)$ ($k = 1, 2$) определены следующими формулами

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \quad (12)$$

вектор-функция $\varphi(t)$ определена условиями (2) и $\varphi^{(1)}(t) \in C((l, 0], H_1)$.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) \quad (13)$$

$$Z(0) = Z_0 \quad (14)$$

Определение 3. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$, $t \in [0, +\infty)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{H}$, называется **классическим** решением задачи (13), (14), если она принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}) \cap C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$ при любом $\tau > 0$ и удовлетворяет уравнению (13) и начальному условию (14).

В работе [14] (теорема 3) доказана теорема о существовании и единственности классического решения $Z(t)$ задачи (13), (14), определенного формулой (10), где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ — классическое решение задачи (1), (2), в предположениях, что данные задачи (1), (2) удовлетворяют следующим условиям: $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$, вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in (l, 0]$, причем $\varphi(t) \in H_1$ и $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in (l, 0]$, $\varphi(t) \in C((l, 0], H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C((l, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, кроме того, $\lim_{t \rightarrow l} [\mathbb{A} \varphi(t)] = 0$, $(-\infty \leq l < 0)$,

а данные задачи (13), (14) удовлетворяют условиям (11), (12). Также получена оценка нормы решения задачи (13), (14) в пространстве $\mathbb{H}$ и оценка энергетической нормы решения задачи (1), (2) в пространстве H .

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА $\mathbb{A}$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1) с однородными начальными условиями (2) $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $\varphi(t) = 0$, $t \in [l, 0]$, $-\infty \leq l < 0$, получаем следующее уравнение

$$L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = 0.$$

Здесь вектор-функция $\hat{u}(\lambda)$ — преобразование Лапласа решения задачи (1), (2), а оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет следующий вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \widehat{K}_1(\lambda)A - \widehat{K}_2(\lambda)B, \quad (15)$$

где $\widehat{K}_i(\lambda)$ ($i = 1, 2$) — преобразования Лапласа ядер $K_i(t)$ ($i = 1, 2$), соответственно, имеющие представления

$$\widehat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

I — тождественный оператор в пространстве H .

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{H}_0 = H \oplus \left(\oplus_{k=1}^2 \Omega_k\right)$ и оператор $\mathbb{T} : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{H}_0$, $\mathbb{T} = \text{diag}(0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2)$. Обозначим $\sigma(\mathbb{A})$, $\sigma(\mathbb{T})$, $\sigma(L)$ — спектры операторов $\mathbb{A}$, $\mathbb{T}$ и оператор-функции $L(\lambda)$, соответственно.

Согласно теореме 4 из работы [10] и теоремам 5 и 6 из работы [11], если выполнено условие (4), то спектр оператор-функции $L(\lambda)$ и спектр оператора $\mathbb{A}$ лежит в открытой левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re} \lambda < 0\}$, при этом $\sigma(\mathbb{A}) \setminus \sigma(-\mathbb{T}) \subseteq \sigma(L)$, невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с невещественным спектром оператора $\mathbb{A}$, симметричен относительно вещественной оси, состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности, не имеющих конечных точек накопления.

Уточним локализацию вещественной части спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости в случае, когда носитель меры $d\mu_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) принадлежит полуоси $[d_1, +\infty)$, $0 < d_1 < +\infty$. Введем следующие обозначения: $\omega^2 = ((A + B)f, f)$, $f \in D(A)$, $\|f\| = 1$, $\tau(f) = (Af, f) / ((A + B)f, f)$, $0 \leq \inf \tau \leq \sup \tau \leq 1$. В указанных обозначениях форму $(L(\lambda)f, f)$, где $f \in D(A)$, $\|f\| = 1$, можно переписать в следующем виде $(L(\lambda)f, f) = \lambda^2 + \omega^2 - \tau \widehat{K}_1(\lambda) - (1 - \tau) \widehat{K}_2(\lambda)$, $\tau \in [0, 1]$. После деления уравнения $(L(\lambda)f, f) = 0$ на ω^2 получаем следующее уравнение:

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 = \tau \widehat{K}_1(\lambda) + (1 - \tau) \widehat{K}_2(\lambda), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (17)$$

Определим расположение вещественных корней уравнения (17). Рассмотрим уравнение

$$\tau \widehat{K}_1(x) + (1 - \tau) \widehat{K}_2(x) = 1, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (18)$$

В работе [11] (теорема 7) установлено, что, если выполнены условия (4) и носитель меры $d\mu_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) принадлежит полуоси $[d_1, +\infty)$, $0 < d_1 < +\infty$, тогда вещественный корень $x_1(\tau)$ уравнения (17), принадлежащий интервалу $(-d_1, 0)$, удовлетворяет неравенству $x_1(\tau) < x_0(\tau) < \tilde{x}_0 < 0$, где $\tilde{x}_0 := \max\{x_0(\tau'), x_0(\tau'')\}$, $x_0(\tau)$ — вещественный корень уравнения (18), принадлежащий интервалу $(-d_1, 0)$, $\tau' := \|(A + B)^{1/2} A^{-1/2}\|^{-2}$, $\tau'' := \|A^{1/2} (A + B)^{-1/2}\|^2$.

Если, кроме того, носитель меры $d\mu_k(\tau)$, $k = 1, 2$ принадлежит отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$, то уравнения (17) и (18) не имеют корней на полуинтервале $(-\infty, -d_2]$.

Перейдем теперь к описанию локализации невещественной части спектра оператор-функции $L(\lambda)$ и оператора $\mathbb{A}$.

В работе [13] (теорема 3, теорема 4) установлено, что если выполнено условие (4) и носитель меры $d\mu_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) принадлежит отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$, то невещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству

$$\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \text{Re} \lambda \leq \alpha_2\}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \left[\frac{K_1(0)(Af, f) + K_2(0)(Bf, f)}{((A + B)f, f)} \right], \quad (20) \\ &\quad f \in D(A), \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \left[\int_{d_1}^{d_2} \frac{(Af, f) d\mu_1(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{(Bf, f) d\mu_2(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} \right], \quad f \in D(A), \end{aligned} \quad (21)$$

и существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ оператор функция $(\lambda \mathbb{A}^{-1} - \mathbb{I})^{-1}$ ограничена в области $\Gamma_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \varepsilon^{-1}, |\arg \lambda \pm \pi/2| \geq \varepsilon\}$.

Перейдем к описанию подпространств расширенного гильбертова пространства $\mathbb{H}$, отвечающих вещественной и невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$, в случае, когда носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k = 1, 2$ принадлежит отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$. В этом случае, согласно Теореме 4 из работы [10] и приведенным выше рассуждениям, множество $\bigcup_{k=1}^2 \sigma(-\mathbb{T}_k) = \bigcup_{k=1}^2 \text{supp}(-d\mu_k)$ принадлежат спектру оператора $\mathbb{A}$. Кроме того, согласно Теореме 7 из работы [11], вещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ принадлежит интервалу $(-d_2, \tilde{x}_0)$, где точка $\tilde{x}_0$ принадлежит интервалу $(-d_1, 0)$. Следовательно, вещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству $[-d_2, \tilde{x}_0]$. Кроме того, из отсутствия конечных точек накопления невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$ следует существование такого числа $\delta > 0$, что внутри контура $\Gamma = \{\lambda = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-d_2 - \delta, \tilde{x}_0 + \delta], y = \pm\delta\}$ нет невещественных точек спектра оператора $\mathbb{A}$.

Обозначим $\mathbb{Q}_1$ проектор Рисса (см. [18], Гл. 1, § 2.)

$$\mathbb{Q}_1 := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^{-1} d\lambda. \quad (22)$$

Положим $\mathbb{Q}_2 := \mathbb{I} - \mathbb{Q}_1$. Рассмотрим следующие подпространства $\mathbb{H}_i := \mathbb{Q}_i \mathbb{H}$, $i = 1, 2$. Подпространство $\mathbb{H}_1$, отвечает вещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$. Обозначим $\mathbb{A}_k := \mathbb{Q}_k \mathbb{A} \mathbb{Q}_k$, $k = 1, 2$, — сужение оператора $\mathbb{A}$ на подпространство $\mathbb{H}_k$, которое является диссипативным оператором.

Для того, чтобы сформулировать теорему о базисности Рисса системы спектральных подпространств оператора $\mathbb{A}$, отвечающих невещественной части его спектра, в пространстве $\mathbb{H}_2$, напомним необходимые определения из монографий [18] и [19].

Определение 4. Последовательность $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых подпространств $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$ называется базисом (из подпространств) пространства $\mathcal{H}$, если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ разлагается единственным образом в ряд вида $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}$, сходящийся по норме пространства $\mathcal{H}$.

Определение 5. Базис из подпространств $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется эквивалентным ортогональному (ба-

зисом Рисса) в пространстве $\mathcal{H}$, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор $\mathcal{A}$ такой, что система подпространств $\{\mathcal{A}\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $\mathcal{H}$.

Следуя [20], через $\mathfrak{R}$ обозначим множество таких неубывающих функций $v(r)$, определенных при достаточно больших вещественных r , что для каждой функции $v(r) \in \mathfrak{R}$ существует постоянная $a > 1$, для которой $v(ar) \geq 2v(r)$ при достаточно больших r . Пусть $\mathfrak{I}$ — множество неубывающих функций $v(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $v(r + \delta r) \leq (1 + \varepsilon)v(r)$. Обозначим $N(t)$ — число собственных значений оператора $(A + B)^{1/2}$ (с учетом кратности), меньших t ($t > 0$).

Теорема 1 (О базисности Рисса из подпространств). Пусть выполнены условия (4) носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k = 1, 2$ принадлежит отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$ и выполнены условия

$$N(t) \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{I}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (N(t)t^{-1}) < \infty.$$

Тогда существует такая последовательность положительных чисел t_k :

$$\begin{aligned} \{t_k\}_{k=1}^{\infty}, t_{-k} = -t_k, t_k < t_{k+1} (k \in \mathbb{Z}), \\ t_k \rightarrow \pm\infty (k \rightarrow \pm\infty) (t_0 = 0), \end{aligned}$$

что система спектральных подпространств $\{\mathcal{W}_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathbb{A}$, отвечающих прямоугольникам

$$\begin{aligned} \pi_k = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \alpha_1 \leq \text{Re} \lambda \leq \alpha_2, \\ t_{k-1} < \text{Im} \lambda \leq t_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (23)$$

где α_1 и α_2 определяются формулами (20), (21), является базисом эквивалентным ортогональному в подпространстве $\mathbb{H}_2$.

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [12].

5. ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ

Представим вектор Z_0 начальных условий задачи (13), (14) в виде $Z_0 = Z_{01} + Z_{02}$, где $Z_{0k} \in \mathbb{H}_k$, $k = 0, 1$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2 (Представление решений). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда суще-

ствуется такая последовательность целых чисел $\{n_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$, $n_k \rightarrow \pm\infty (k \rightarrow \pm\infty)$, что решение $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$ задачи Коши (13), (14) представимо в следующем виде:

$$Z(t) = e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} \sum_{j=1}^{j_n} \sum_{s=0}^{s_{nj}} c_{njs} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{t^s}{s!} \xi_{nj0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \xi_{nj1} + t \xi_{nj(s-1)} + \xi_{njs} \right) e^{\lambda_n t} \right), \quad (24)$$

где λ_n ($\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n$) — собственные значения оператора $\mathbb{A}_2$, которые, при $n \in [n_k, n_{k+1})$, принадлежат прямоугольнику π_k , определенному формулой (23), j_n — число собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_n , $(\xi_{nj0}, \xi_{nj1}, \dots, \xi_{njs})$ — цепочки собственных и присоединенных векторов $\xi_{njs} \in \mathbb{H}_2$ оператора $\mathbb{A}_2$, соответствующих собственному значению λ_n , s_{nj} — максимальная длина производной цепочки,

отвечающей вектору ξ_{nj0} , $\sum_{j=1}^{j_n} s_{nj} = p_n$ — алгебраическая кратность собственного значения λ_n , вектор-функция $e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}$ для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ удовлетворяет следующему неравенству

$$\|e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}\|_{\mathbb{H}_1} \leq C(\delta) \|Z_{01}\|_{\mathbb{H}_1} e^{(\tilde{x}_0 + \delta)t}, \quad \text{с константой}$$

$C(\delta)$, не зависящей от вектора Z_{01} . Ряд в представлении (24) сходится безусловно (т.е. не зависит от порядка суммирования по k) при каждом $t \geq 0$.

Кроме того вектор-функция $u(t) = \int_0^t v(s) ds + \varphi_0$ является решением задачи (1), (2).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). 2003. V. 146. 444 p.
2. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with memory. Theory and applications. New-York — Dordrecht — Heidelberg — London: Springer, 2012. 576 p.
3. *Георгиевский Д.В.* Модели теории вязкоупругости. М.: ЛЕНАНД, 2023. 144 с.
4. *Локишин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
5. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
6. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
7. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
8. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.
9. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Spectrum of one-dimensional natural vibrations of layered medium consisting of elastic material and viscous incompressible fluid // Moscow University Mathematics Bulletin. 2020. V. 75. № 4. P. 172–176.
10. *Rautian N.A.* On the Properties of Semigroups Generated by Volterra Integro-Differential Equations with Kernels Representable by Stieltjes Integrals // Differential Equations. 2021. V. 57. № 9. P. 1231–1248.
11. *Rautian N.A.* Studying Volterra Integro-Differential Equations by Methods of the Theory of Operator Semigroups // Differential Equations. 2021. V. 57. № 12. P. 1665–1684.
12. *Rautian N.A., Vlasov V.V.* Spectral Analysis of the Generators for Semigroups Associated with Volterra Integro-Differential Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 3. P. 926–935.
13. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Application of Semigroup Theory to the Study of Volterra Integro-Differential Equations // Differential Equations. 2022. V. 58. № 4. P. 571–575.
14. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Well-Posed Solvability of Volterra Integro-Differential Equations in Hilbert Spaces // Differential Equations. 2022. V. 58. № 10. P. 1410–1426.
15. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 464 с.
16. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York: Springer-Verlag, 2000. 586 p.
17. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физ.-мат. лит., 1961.
18. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиница, 1986.
19. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
20. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Математический сборник. — 1980. Т. 112. № 3. С. 396–420.

REPRESENTATIONS OF THE SOLUTIONS FOR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACES

N. A. Rautian^{a, b}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

Volterra integro-differential equations with operator coefficients in Hilbert spaces were studied. The relationship has been established between the spectra of operator functions that are the symbols of the specified integro-differential equations and the spectra of generators of semigroups. Representations of solutions for considered integro-differential equations are obtained on the basis of spectral analysis of generators of operator semigroups and corresponding operator-functions.

Keywords: Volterra integro-differential equations, linear differential equations in Hilbert spaces, representations of the solutions

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ПОПОЛНЕНИЯ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

© 2024 г. Н. С. Романовский^{1, *}

Представлено академиком РАН С.С. Гончаровым

Поступило 26.04.2024 г.

После доработки 06.06.2024 г.

Принято к публикации 06.06.2024 г.

Определяется делимое пополнение разрешимой группы Баумслага–Солитера $BS(1, n)$ и доказывается, что при некоторых ограничениях на n элементарная теория этого пополнения алгоритмически разрешима.

Ключевые слова: группа Баумслага–Солитера, разрешимая, элементарная теория

DOI: 10.31857/S2686954324030159, **EDN:** YAAFLA

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В работах автора и А.Г. Мясникова была развита алгебраическая геометрия над так называемыми жёсткими группами, а затем и теория моделей этих групп (см. обзор автора – глава 5 монографии [1]). Примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы, а также итерированные сплетения нескольких абелевых групп без кручения. Всякая m -жёсткая (ступени разрешимости m) группа вкладывается в делимую m -жёсткую группу. Оказалось, что теория делимых m -жёстких групп похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей, она полна, разрешима, ω -стабильна и обладает другими хорошими свойствами. Имеется также обобщение понятия жёсткой группы: в [2] были определены обобщённо жёсткие или r -группы. Для них, однако, многие вопросы алгебраической геометрии и теории моделей оказались более сложными, чем для жёстких групп.

В [3]–[4] изучались 2-ступенно разрешимые r -группы. Поскольку и в настоящей работе речь пойдёт в основном о 2-ступенно разрешимых группах, то удобно будет рассмотреть подкласс класса 2-ступенно разрешимых обобщённо жёстких групп, который в [4] обозначался через

$\mathcal{R}_2$. Прежде, чем его определить, напомним, что если в группе G есть абелева нормальная подгруппа C , то на C можно смотреть как на правый модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G/C]$, действие элемента

$$u = \alpha_1(g_1C) + \dots + \alpha_n(g_nC) \in \mathbb{Z}[G/C] (\alpha_i \in \mathbb{Z})$$

на $c \in C$ определяется формулой $c^u = (c^{g_1})^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (c^{g_n})^{\alpha_n}$, здесь $c^{g_i} = g_i^{-1}cg_i$.

Говорят, что 2-ступенно разрешимая группа G является *жёсткой* (2-*жёсткой*), если в ней есть нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \rho_3(G) = 1, \quad (1)$$

с абелевыми факторами $A = G / \rho_2(G)$, $\rho_2(G)$, причём группа A не имеет $\mathbb{Z}$ -кручения, а модуль $\rho_2(G)$ не имеет $\mathbb{Z}A$ -кручения.

Откажемся теперь от последнего ограничения и предполагаем, что модуль $\rho_2(G)$ может иметь $\mathbb{Z}A$ -кручение. Возьмём тогда аннулятор $\text{An}(\rho_2(G))$ модуля $\rho_2(G)$ в $\mathbb{Z}A$ и рассмотрим фактор-кольцо $R = \mathbb{Z}A / \text{An}(\rho_2(G))$. Понятно, что $\rho_2(G)$ можно рассматривать как R -модуль. Если в определении 2-жёсткой группы заменить условие “ $\rho_2(G)$ не имеет $\mathbb{Z}A$ -кручения” на “ $\rho_2(G)$ не имеет R -кручения и группа A канонически вкладывается в мультипликативную группу обратимых элементов R^* кольца R ,” то получим определение группы класса $\mathcal{R}_2$. В такой группе ряд (1), если вообще существует, определяет-

¹ Институт математики имени С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: rnmvski@math.nsc.ru

ся однозначно и называется *жестким*. Поэтому для его членов используется обозначение $\rho_i(G)$. Легко видеть, что кольцо R является областью целостности, а централизатор любого нетривиального элемента из $\rho_2(G)$ совпадает с $\rho_2(G)$. В частности, подгруппа $\rho_2(G)$ равняется централизатору любого неединичного коммутатора двух элементов и поэтому может быть определена в сигнатуре теории групп как $\exists$ -формулой, так и $\forall$ -формулой. В рассматриваемой ситуации будем говорить, что пара (A, R) ассоциируется с группой G . В ней по построению R — коммутативная область целостности, A — подгруппа без кручения из R^* , порождающая всё R как кольцо.

Разрешимая группа Баумслэга—Солитера

$$\text{BS}(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n \rangle (n > 1)$$

не будет жесткой, но принадлежит классу $\mathcal{R}_2$. Для неё $R = \mathbb{Q}_n$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями n , $A = n^{\mathbb{Z}}$ — бесконечная циклическая группа с порождающим n , сама группа отождествляется с группой матриц

$$\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \mathbb{Q}_n & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа $G \in \mathcal{R}_2$ называется *делимой*, если A — делимая абелева группа (она тогда представляется в виде прямой суммы копий $\mathbb{Q}$), и модуль $\rho_2(G)$ является делимым R -модулем, тогда на $\rho_2(G)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем частных кольца R . Пусть $\mathcal{D}_2$ обозначает класс делимых групп из $\mathcal{R}_2$. Из [2] и [3] можно извлечь следующие факты.

Предложение 1. *Всякая группа из класса $\mathcal{R}_2$ вкладывается в делимую.*

Предложение 2. *Всякая группа $G \in \mathcal{D}_2$ расщепляется в полупрямое произведение $A \cdot \rho_2(G)$.*

Предложение 3. *Существуют рекурсивные системы аксиом в сигнатуре теории групп, определяющие каждый из классов $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{D}_2$.*

Непосредственно проверяется полезное для реализации каких-то условий в виде формул

Предложение 4. *Пусть $G \in \mathcal{R}_2$ и (A, R) — ассоциированная с G пара. По определению всякий элемент из R может быть выражен через какие-то элементы $x_1, \dots, x_s$ из A , то есть представлен в виде линейной комбинации $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_q u_q$ мономов $u_1, \dots, u_q$ от $x_1^{\pm 1}, \dots, x_s^{\pm 1}$ с целыми коэффици-*

циентами $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Тогда формула от переменных $x_1, \dots, x_s$

$$\bigwedge_i (x_i \in A) \wedge (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_q u_q = 0)$$

интерпретируется над G в сигнатуре теории групп как $\forall$ -формула

$$\forall z_1 \forall z_2 \left(([z_1, z_2]^{u_1})^{\alpha_1} \dots ([z_1, z_2]^{u_q})^{\alpha_q} = 1 \right),$$

или как $\exists$ -формула

$$\exists z_1 \exists z_2 \left(([z_1, z_2] \neq 1) \wedge \left(([z_1, z_2]^{u_1})^{\alpha_1} \dots ([z_1, z_2]^{u_q})^{\alpha_q} = 1 \right) \right).$$

Имеется ввиду, что первоначальная формула выполняется на наборе $(a_1, \dots, a_s)$ элементов из A тогда и только тогда, когда интерпретация выполняется на любом наборе $(g_1, \dots, g_s)$, состоящем из образов элементов a_i в G .

Группа Баумслэга—Солитера $\text{BS}(1, n) (n > 1)$ вкладывается в делимую группу

$$\text{BSd}(1, n) = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Q}} & 0 \\ \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}}) & 1 \end{pmatrix},$$

представленную матрицами над полем $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$.

Легко доказывается

Предложение 5. *Если группа $G \in \mathcal{D}_2$ содержит в качестве подгруппы $\text{BS}(1, n) (n > 1)$, то она содержит группу $\text{BSd}(1, n)$, которая будет наименьшей делимой подгруппой в G , содержащей $\text{BS}(1, n)$.*

Поэтому мы можем назвать $\text{BSd}(1, n)$ *делимым пополнением группы Баумслэга—Солитера $\text{BS}(1, n)$* . Отметим, что эта группа будет полной в терминологии теории групп, то есть в ней из любого элемента (однозначно) извлекается корень любой натуральной степени.

Известная теорема Носкова [5] утверждает, что элементарная теория конечно порождённой разрешимой группы алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда группа почти абелева (является расширением абелевой группы с помощью конечной). В частности, теория группы $\text{BS}(1, n)$ неразрешима. Иная картина для делимого пополнения $\text{BSd}(1, n)$. Сформулируем полученные нами результаты, которые, правда, доказаны не для любого $n > 1$, а при условии $\circledast$:

найдётся простое число p такое, что p делит n и p^2 не делит n . Это условие позволяет использовать признак Эйзенштейна неприводимости над $\mathbb{Q}$ для любого многочлена $x^m - n$ ($m \in \mathbb{N}$).

Сначала обозначим через $\mathcal{B}_n$ класс групп $G \in \mathcal{D}_2$, содержащих в качестве подгруппы $\text{BSd}(1, n)$ и удовлетворяющих требованию: если (A, R) — ассоциированная с G пара и множество $\{n\} \cup Y$ составляет базу A как $\mathbb{Q}$ -группы, тогда элементы из Y алгебраически независимы (над $\mathbb{Z}$ в R). В этой ситуации R можно отождествить с групповой алгеброй над кольцом $\mathbb{Q}_n$ свободной абелевой $\mathbb{Q}$ -группы с базой Y . Группа G отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$, где V — некоторое векторное пространство над полем частных кольца R .

Теорема 1. При ограничении $\circledast$, если группа G элементарно эквивалентна группе $\text{BSd}(1, n)$, то $G \in \mathcal{B}_n$.

Из доказательства извлекается рекурсивная система аксиом Σ , которая определяет класс групп $\mathcal{B}_n$.

Теорема 2 При ограничении $\circledast$ теория класса $\mathcal{B}_n$, то есть определённая аксиомами Σ , является полной и разрешимой, она совпадает с теорией группы $\text{BSd}(1, n)$.

Мы планируем в дальнейшем показать, что изучаемая теория будет ω -стабильной, а также исследовать другие аспекты этой теории.

2. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ТЕОРЕМ 1 И 2

В доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи из работы [6], а в доказательстве теоремы 2 идеи из работы [7].

Пусть согласно условию теоремы 1 группа G элементарно эквивалентна $\text{BSd}(1, n)$. Тогда по предложению 3 $G \in \mathcal{D}_2$. Если (A, R) — ассоциированная с G пара, то по предложению 2 имеется расщепление $G = A \cdot \rho_2(G)$. Легко понять, что кольцо R содержит $\mathbb{Q}_n$ и $n \in A$, откуда группа $\text{BS}(1, n)$ содержится в качестве подгруппы в G , а тогда и группа $\text{BSd}(1, n)$ содержится в G (предложение 5). Группа A является делимой абелевой группой без кручения, пусть $\{n\} \cup Y$ — её база как $\mathbb{Q}$ -группы. Надо доказать, что элементы из Y алгебраически независимы.

Допустим противное, найдётся набор $(y_1, \dots, y_s)$ различных элементов из Y и нетривиальный многочлен $f(x_1, \dots, x_s)$ с целыми коэф-

фициентами, для которого $f(y_1, \dots, y_s) = 0$. По многочлену f мы строим некоторую $\exists$ -формулу σ_f без свободных переменных, это построение является наиболее принципиальным моментом в доказательстве теоремы 1. Затем доказывается, что формула σ_f истинна на группе G , но ложна на $\text{BSd}(1, n)$, в результате получается противоречие с элементарной эквивалентностью групп G и $\text{BSd}(1, n)$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что если группа $G \in \mathcal{D}_2$ содержит $\text{BSd}(1, n)$ и не принадлежит классу $\mathcal{B}_n$, то на ней истинна одна из формул вида σ_f , в то время как все такие формулы ложны на $\text{BSd}(1, n)$. По предложению 3 существует рекурсивная система аксиом Σ_1 в сигнатуре теории групп, которая определяет класс групп $\mathcal{D}_2$. Несложно определить систему аксиом Σ_2 , которая для группы $G \in \mathcal{D}_2$ реализует условие: G содержит в качестве подгруппы $\text{BS}(1, n)$ (тогда она содержит и $\text{BSd}(1, n)$). Обозначим также через Σ_3 — множество аксиом $\neg\sigma_f$ по всем нетривиальным целочисленным многочленам f от любого конечного числа переменных. Система аксиом $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ эквивалентна некоторой рекурсивной системе аксиом, которую обозначим через Σ . По построению группа $\text{BSd}(1, n)$ удовлетворяет аксиомам Σ . Доказывается, что система аксиом Σ в точности определяет класс $\mathcal{B}_n$.

Назовём размерностью группы $G \in \mathcal{B}_n$ с соответствующей парой (A, R) набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где d_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, d_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R . Несложно доказывается

Предложение 6. Две группы из класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Теорема 2 выводится из следующего утверждения.

Предложение 7. Пусть U — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, H — счётная группа из класса $\mathcal{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень, число n удовлетворяет условию $\circledast$. Тогда $d(G) = (2^{\omega}, 2^{\omega})$.

Из предложений 6 и 7 вытекает, что ультрастепени по неглавному ультрафильтру на счётном множестве любых двух счётных моделей теории класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны, а тогда по теореме Кейслера—Шелаха эта теория полна и совпадает с теорией группы $\text{BSd}(1, n)$. Так как теория имеет рекурсивную аксиоматику, то она разрешима.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН I.1.1, проект 0314-2019-0001

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Groups and model theory: GAGTA Book 2. De Gruyter, 2021.
2. Романовский Н.С. Обобщённо жёсткие группы: определение, базисные факты, проблемы // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59. № 4. С. 891–896.
3. Романовский Н.С. Обобщённо жёсткие метабелевы группы // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 1. С. 194–200.
4. Романовский Н.С. Об универсальных теориях метабелевых обобщённо жёстких групп // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61. № 5. С. 1101–1107.
5. Носков Г.А. Об элементарной теории конечно порожденной почти разрешимой группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 3. С. 498–517.
6. Романовский Н.С. Группы, универсально эквивалентные разрешимой группе Баумслэга–Солитера // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63. № 1. С. 197–201.
7. Романовский Н.С. Делимые жёсткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория // Алгебра и логика. 2017. Т. 56. № 5. С. 593–612.
8. Marker D. Model Theory: an Introduction. New York: Springer-Verlag, 2002.
9. Hodges W. Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

ON ELEMENTARY THEORY OF COMPLETION OF SOLVABLE BAUMSLAG–SOLITAR GROUP

N. S. Romanovskiy^a

^a*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.S. Goncharov

We define a divisible completion of the solvable Baumslag–Solitar group $BS(1, n)$ and prove that under certain restrictions on n the elementary theory of this completion is decidable.

Keywords: Baumslag–Solitar group, solvable, elementary theory

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКАХ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

© 2024 г. А. В. Арутюнов¹, С. Е. Жуковский^{1, *}

Представлено академиком РАН А.А. Шананиным

Поступило 09.02.2024 г.

После доработки 03.06.2024 г.

Принято к публикации 03.06.2024 г.

В работе представлены условия существования решений в терминах λ -укорочений отображения F в окрестности точки $\bar{x}$.

Ключевые слова: обратная функция, λ -укорочение, аномальная точка

DOI: 10.31857/S2686954324030165, **EDN:** XZZTYE

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть заданы отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{y} := F(\bar{x})$. Рассмотрим конечномерное уравнение $F(x) = y$ относительно неизвестного x и параметра y . В настоящей статье исследуется следующий вопрос. При каких условиях при всех y близких к $\bar{y}$ существует решение этого уравнения $x(y)$ с априорными оценками на $(x(y) - \bar{x})$ через $(y - \bar{y})$, которые гарантируют, что $x(y) \rightarrow \bar{x}$ при $y \rightarrow \bar{y}$.

Если отображение F достаточно гладко, а исходная точка $\bar{x}$ нормальна, т. е. $F'(\bar{x}) = \mathbb{R}^m$, то существование указанного решения гарантирует классическая теорема об обратной функции (см. например, [1, 2]). Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда F действует из одного бесконечномерного пространства в другое (см., например, [3]).

Если отображение F достаточно гладкое, но точка $\bar{x}$ аномальна, т. е. $F'(\bar{x}) \neq \mathbb{R}^m$, то и в этом случае известны теоремы существования решения. Соответствующие результаты сформулированы в терминах первой и второй производных в точке $\bar{x}$. Точнее, если $F'(\bar{x})$ и $F''(\bar{x})$ удовлетворяют некоторым условиям невырожденности, то для всех y из некоторой окрестности точки $\bar{y}$ искомое решение $x(y)$ существует, причем при

весьма общих естественных предположениях оно непрерывно (см. например, [4] – [7] и т.д.).

В этой работе приведены условия существования решений в терминах λ -укорочений отображения F в окрестности точки $\bar{x}$. Эти условия применимы к рассматриваемому уравнению и в случае, когда упомянутые выше условия невырожденности в терминах первой или первой и второй производных нарушаются. Приводимые результаты являются естественным развитием [8], [9] и содержательны также и в предположении гладкости отображения F .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Координаты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать нижними индексами, т. е. положим $x = (x_1, \dots, x_n)$, а скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ – через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Для $r \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ через $B(x, r)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . Эти же обозначения будем использовать и в пространстве $\mathbb{R}^m$. Под окрестностью заданной точки x будем понимать любое открытое непустое множество, которое ее содержит. Далее const – это положительные константы, конкретный вид которых нас не интересует.

Через D обозначим множество ненулевых n -мерных векторов d , у которых все координаты d_k неотрицательны, а через $\hat{D} \subset D$ – множество всех ненулевых целочисленных векторов $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$.

¹ Институт проблем управления РАН
имени В.А. Трапезникова, Москва

*E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \widehat{D}$ и $d \in D$ положим

$$x^z = \prod_{k=1}^n x_k^{z_k}, |x|^d = \prod_{k=1}^n |x_k|^{d_k}.$$

При этом будем полагать, что если $l = 0$, то $x_k^l = |x_k|^l = 1$, включая также и $x_k = 0$. Вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ — это мультииндекс монома x^z , а $z_1 + \dots + z_n$ — его степень.

Пусть заданы натуральные числа j_i , $i = 1, \dots, m$ и вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$, где неотрицательность вектора означает неотрицательность всех его координат. Пусть для каждого номера $i = 1, \dots, m$ задано непустое конечное множество n -мерных векторов $s_{i,j} \in \widehat{D}$, $j = 1, \dots, j_i$, которые попарно различны по j , т.е. если $l_1 \neq l_2$, то $s_{i,l_1} \neq s_{i,l_2}$. Будем также предполагать, что существуют такие числа $\alpha_i > 0$, что имеют место равенства

$$\langle \lambda, s_{i,j} \rangle = \alpha_i \quad \forall j = 1, \dots, j_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Положим $S_i = \{s_{i,1}, \dots, s_{i,j_i}\}$, а через $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ обозначим семейство множеств S_i , $i = 1, \dots, m$.

Отметим, что из равенств (1) и неравенств $\alpha_i > 0$ вытекает, что $\lambda \neq 0$.

Пусть заданы вещественные числа $p_{i,j}$, которые все предполагаются неравными нулю. Множество этих чисел обозначим через P . Для S и P определим полиномиальное отображение $P = (P_1, \dots, P_m) = P^{S,P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ так, что его i -ая координата $P_i(x)$ имеет следующий вид многочлена

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{j_i} p_{i,j} x^{s_{i,j}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1. Отображение $P = P^{S,P}$ называется λ -укорочением отображения $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в окрестности точки $\bar{x}$, если для каждого $i = 1, \dots, m$ существует такое конечное множество $D_i \subset D$, что

$$\langle \lambda, d \rangle > \alpha_i \quad \forall d \in D_i, \quad (2)$$

и для $x \in \mathbb{R}^n$ для отображения F справедливо представление

$$F(x) = F(\bar{x}) + P(x - \bar{x}) + \Delta(x - \bar{x}). \quad (3)$$

При этом для каждой i -ой координаты Δ_i отображения $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ существует окрестность точки $\bar{x}$, в которой выполняется оценка

$$|\Delta_i(x - \bar{x})| \leq \text{const} \sum_{d \in D_i} |x - \bar{x}|^d.$$

Из предположений о том, что S_i непусто, векторы $s_{i,j}$ попарно различны по j , а все числа $p_{i,j}$ не равны нулю вытекает, что любое λ -укорочение P является ненулевым полиномиальным отображением. Кроме того, очевидно, что $P(0) = 0$.

Пусть задан вектор $h \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2. Будем говорить, что λ -укорочение $P = P^{S,P}$ регулярно по направлению $h \in \mathbb{R}^n$, если имеет место

$$P(h) = 0, \quad \text{im } P'(h) = \mathbb{R}^m, \quad (4)$$

и, кроме того, для любого номера $k = 1, \dots, n$, если $\lambda_k = 0$, то $h_k = 0$.

Если оказалось, что $\lambda > 0$, то введенное определение несколько проще, и для регулярности по направлению h следует проверять лишь соотношение (4).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем достаточные условия существования решения уравнения $F(x) = y$ в окрестности точки $\bar{x}$.

Для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$ положим

$$J = J(\lambda) := \{k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k = 0\}.$$

Очевидно, что $J = \emptyset \Leftrightarrow \lambda > 0$.

Теорема 1. Пусть задан вектор $\lambda \geq 0$. Пусть задано непрерывное отображение F , а полиномиальное отображение $P = P^{S,P}$ является его λ -укорочением в окрестности точки $\bar{x}$, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$.

Тогда существуют такие число $\gamma > 0$, окрестность O точки $\bar{y} = F(\bar{x})$ и число $c > 0$, которые удовлетворяют следующим условиям. Для любых $y \in O$ и $p \in [0, \gamma]$ существует решение $x = x(y, p)$ уравнения

$$F(x) = y,$$

для которого имеют место априорные оценки

$$|x_k(y, p) - \bar{x}_k| \leq c \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{\lambda_k}{\alpha_i + p}}, \quad \text{при } k \notin J; \quad (5)$$

$$|x_k(y, p) - \bar{x}_k| \leq c \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{p}{\alpha_i + p}}, \quad (6)$$

при $k \in J$ и $p > 0$;

$$|x_k(y, 0) - \bar{x}_k| \leq c \quad \text{при } k \in J \text{ и } p = 0. \quad (7)$$

Здесь числа $\alpha_i > 0$ взяты из равенств (1).

Пусть дополнительно предполагается, что $\lambda > 0$. Тогда оценки (6) и (7) в приведенной теореме не нужны, а оценка (5) эквивалентна тому,

что $|x_k(y, p) - \bar{x}_k| \leq c \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{\lambda_k}{\alpha_i}}$ для всех k .

Без дополнительного предположения $\lambda > 0$ усилить теорему 1, взяв $p = 0$ в правой части неравенства (5), уже нельзя.

В теореме 1 предполагается регулярность по некоторому направлению h , но в утверждении теоремы оно не присутствует.

В силу оценок (5) и (6), фиксируя число $p > 0$ получаем, что все степени, стоящие в правых частях этих неравенств, положительны. Кроме того, при $p > 0$ функция $x(\cdot, p)$ непрерывна в точке $\bar{y}$. Следующее утверждение гарантирует существование непрерывного решения $x(\cdot, p)$ и, более того, дает асимптотическое представление решения $x(y, p)$ при $y \rightarrow \bar{y}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{n,m}(\bar{x})$ множество отображений $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих следующему условию: для любого $N \in \mathbb{N}$ существует окрестность $O_N(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n$ точки $\bar{x}$ такая, что отображение F является N раз непрерывно дифференцируемым на $O_N(\bar{x})$. Класс $\mathcal{F}_{n,m}(\bar{x})$ шире класса бесконечно дифференцируемых в окрестности точки $\bar{x}$ отображений, т.к. окрестности $O_N(\bar{x})$ могут стремиться к точке $\bar{x}$ при $N \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть задан целочисленный вектор $\lambda \geq 0$. Пусть задано отображение $F \in \mathcal{F}_{n,m}(\bar{x})$, а полиномиальное отображение $P = P^{S,P}$ является его λ -укорочением в окрестности заданной точки $\bar{x}$, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$.

Тогда существуют числа $\varepsilon \in (0, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$ и отображение $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, которое определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности компактного множества $[-\varepsilon, \varepsilon] \times B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ и принимает значения в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\omega(0, 0) = 0$, $\omega \in \mathcal{F}_{1+m,n}(0)$ и имеет место следующее утверждение.

Пусть $v_i \geq \alpha_i$, $i = 1, \dots, m$, где как и выше, числа $\alpha_i > 0$ взяты из равенств (1). Тогда существует такая окрестность O точки $\bar{y} = F(\bar{x})$, что для любых $y \in O$ и $p \in [0, \gamma]$ существует такое решение $x(y, p) = (x_1(y, p), \dots, x_n(y, p))$ удовлетворяющее уравнению

$$F(x) = y,$$

что при $k = 1, \dots, n$ справедливо представление

$$x_k(y, p) = \bar{x}_k + \left(d \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{1}{v_i+p}} \right)^{\lambda_k} \times \left(h_k + \omega_k \left(d \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{1}{v_i+p}}, g(y - \bar{y}, p) \right) \right). \quad (8)$$

Здесь $d > 0$ это фиксированное достаточно большое число, для которого выполняются неравенства $md \geq 1$ и $d^{\alpha_i} \geq m / \varepsilon$, $i = 1, \dots, m$. При этом $g = (g_1, \dots, g_m)$, где

$$g_i(y - \bar{y}, p) := (y_i - \bar{y}_i) \left(d \sum_{l=1}^m |y_l - \bar{y}_l|^{\frac{1}{v_l+p}} \right)^{-\alpha_i} \text{ при } y \neq \bar{y}$$

и $g(0, p) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 1 проводится сведением исходного уравнения при каждом y достаточно близком к $\bar{y}$ к задаче о неподвижной точке и последующем применении теоремы Брауэра. Доказательство теоремы 2 проводится с помощью классической теоремы о неявной функции, примененной к некоторому вспомогательному отображению в точке h .

Пусть выполнены предположения теоремы 2. Тогда для множества O и числа $\gamma \in (0, 1]$ для любых $y \in O$ и $p \in [0, \gamma]$ справедливы неравенства

$$d \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{1}{v_i+p}} \leq \varepsilon, \quad |g(y - \bar{y}, p)| \leq \varepsilon, \\ |y_i - \bar{y}_i| < 1, i = 1, \dots, m.$$

Поэтому в представлении (8) все композиции $\omega_k(t(y, p), g(y - \bar{y}, p))$ определены корректно и непрерывны при $y \approx \bar{y}$.

В связи с теоремой 1 и 2 представляется важным получение достаточных условий, при которых заданное полиномиальное отображение P автоматически является λ -укорочением себя, которое регулярно по некоторому направлению h . Но это тема последующих исследований.

4. ОБСУЖДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Теорема 1 имеет следующие преимущества в сравнении с известными результатами. В ней, во-первых, некоторые координаты неотрицательного вектора λ могут быть нулевыми. Это приводит к качественному изменению, в частности, к появлению в формулировке неотрица-

тельного параметра $p \in [0, \gamma]$. Это, в свою очередь, приводит не к одной, а уже к трём оценкам (5) – (7), полученным в зависимости от значения параметра p .

Если отображение F непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ и эта точка нормальна, то предположения теоремы 1 выполняются. Чтобы это показать (см. [9, §3]), надо взять $P(x) \equiv F'(\bar{x})x$, в качестве вектора λ -вектор, все n компонент которого равны единице, а в качестве h – нулевой вектор. Таким образом, из теоремы 1 вытекает классическая теорема об обратной функции, но без ее непрерывности в окрестности, которая легко проверяется другим методом.

Теорема 1 остается содержательной и в случае, когда точка $\bar{x}$ аномальна, но, самое главное, квадратичное отображение $F''(\bar{x})$ не имеет ни одного регулярного нуля. Это демонстрируют, в частности, примеры из [8].

Сравним теорему 1 с теоремой 1 из [8]. Напомним её.

Теорема 3. Пусть $\lambda > 0$, а отображение F непрерывно в окрестности точки $\bar{x}$, и $P^{S,P}$ является его λ -укорочением в окрестности точки $\bar{x}$, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда существуют такая окрестность O точки $\bar{y}$, что для любого $y \in O$ существует решение $x = x(y)$ уравнения $F(x) = y$, для которого справедливы оценки

$$|x_k(y) - \bar{x}_k| \leq \text{const} |y - \bar{y}|^{\lambda_k/\alpha}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Здесь $\alpha := \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} > 0$, а числа $\alpha_i > 0$ взяты из равенств (1).

Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и дополнительно $\lambda > 0$. Тогда $J = \emptyset$ и, значит, неравенства (6), (7) следует опустить. При этом из оценки (5) следует, что

$$|x_k(y, 0) - \bar{x}_k| \leq \text{const} \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{\lambda_k}{\alpha_i}},$$

$$k \in \{1, \dots, n\}, \forall y \in O.$$

Поэтому теорема 3 вытекает из теоремы 1.

Даже если $\lambda > 0$ и $p = 0$, то оценки в теоремах 1 и 2 вообще говоря лучше, чем в теореме 3, если только $m \geq 2$ и существует номер i , для которого $\max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} > \alpha_i$. Приведем соответствующий пример. Пусть

$$n = 3, \quad m = 2, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0,$$

$$F(x) = (x_1 - x_2, x_1^3 - x_2^2 x_3), \lambda = (1, 1, 1), h = (1, 1, 1).$$

Тогда при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$ выполнены все предположения теоремы 1. Поэтому из оценки (5) этой теоремы при $p = 0$ вытекает следующее. Для всех $y = (y_1, y_2)$ достаточно близких к нулю и таких, что выполнено дополнительное условие $|y_2| \leq \text{const} |y_1|^3$, система уравнений $F_1(x) = y_1, F_2(x) = y_2$ имеет решения $x(y)$, для которых справедлива линейная оценка $|x(y)| \leq \text{const} |y_1|$. В то же время из теоремы 3 вытекает всего лишь корневая оценка $|x(y)| \leq \text{const} \sqrt[3]{|y|}$.

Приведем пример отображения F , к которому применимы теоремы 1 и 2, но уже неприменима теорема 3. Пусть $n = 3, m = 1, \bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^3, \bar{y} = 0 \in \mathbb{R}^1, F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$$F(x) = x_1^4 - x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3 + x_2^4 + x_1^4 x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Положим $P := F$ и $\lambda := (1, 1, 0)$. Тогда $\alpha_1 = 4$. Непосредственно проверяется, что P является λ -укорочением отображения F в окрестности нуля, которое регулярно по направлению $h = (1, 1, 0)$. Поэтому отображение F в нуле удовлетворяет всем предположениям теорем 1 и 2. Можно также показать, что для любого $\lambda > 0$ соответствующее λ -укорочение не регулярно ни по какому направлению h . Следовательно, теорема 3 неприменима к этому отображению F нулю.

Кратко сравним теоремы 1 и 2. Пусть выполнены предположения теоремы 2, а числа $\varepsilon \in (0, 1], \gamma \in (0, 1]$ и отображение ω отвечают утверждению этой теоремы. Можно показать, что из частного случая теоремы 2, т. е. при $v_i = \alpha_i \forall i$, в ее предположениях вытекает утверждение теоремы 1 и ее оценки (5)–(7). Предположения гладкости теоремы 2 сильнее, чем в теореме 1, но в ней и утверждается большее.

Зафиксируем в теореме 2 числа $v_i \geq \alpha_i, p \in [0, \gamma]$ и предположим, что выполнено хотя бы одно из трех дополнительных условий: либо $\lambda > 0$, либо $v_i > \alpha_i$ для всех номеров $i = 1, \dots, m$, либо $p > 0$. Тогда в представлении (8) значения функций ω_k стремятся к нулю при $y \rightarrow \bar{y}$. Это дает асимптотическое представление решения $x_k(y)$ при $y \rightarrow \bar{y}$. Отсюда следует, что отображение $x(\cdot, p)$ непрерывно по переменной $y \in O$.

Теорема 1 и результаты § 3 получены первым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, <https://rscf.ru/project/20-11-20131/>). Теорема 2 получена вторым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.И.* Лекции по математическому анализу. М.: Высш. шк., 2004.
2. *Dontchev A.L., Rockafellar R.T.* Implicit Functions and Solution Mappings. 2nd edn. N.Y.: Springer, 2014.
3. *Bartle R.G., Graves L.M.* Mappings between function spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 3. P. 400–413.
4. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. М.: Физматлит, 1999.
5. *Аваков Е.Р.* Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 3–13.
6. *Арутюнов А.В.* Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи математических наук. 2012. Т. 67. № 3 (405). С. 3–62.
7. *Измаилов А.Ф.* Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 57–68.
8. *Арутюнов А.В.* Существование вещественных решений нелинейных уравнений без априорных предположений нормальности // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 1. С. 3–18.
9. *Арутюнова А.В., Жуковский С.Е.* Устойчивость вещественных решений нелинейных уравнений и ее приложения. Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. 2023. Т. 323. С. 1–12.

ON THE EXISTENCE AND ESTIMATES OF INVERSE FUNCTIONS IN THE DEGENERATE CASE

A. V. Arutyunov^a, S. E. Zhukovsky^a

Presented by RAS Academician A.A. Shananin

^a*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia*

The paper presents conditions for the existence of solutions in terms of λ -shortenings of the mapping F in a neighborhood of the point $\bar{x}$.

Keywords: inverse function, λ -truncation, abnormal point.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ДИФФУЗИЕЙ И НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2024 г. И. С. Кащенко^{1, *}, С. А. Кащенко^{1, **}, И. Н. Маслеников^{1, ***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 25.02.2024 г.

После доработки 28.03.2024 г.

Принято к публикации 14.05.2024 г.

Работа посвящена исследованию логистического уравнения с запаздыванием и диффузией с неклассическими краевыми условиями. Исследована устойчивость нетривиального состояния равновесия, численно изучены возникающие бифуркации.

Ключевые слова: логистическое уравнение, запаздывание, диффузия, неклассические краевые условия, устойчивость

DOI: 10.31857/S2686954324030172, **EDN:** XZUXPP

1. ВВЕДЕНИЕ

Логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r[1 - u(t - T, x)]u, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

и с классическими граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad (2)$$

возникает в задачах математической экологии. Они исследовались многими авторами (см. напр., [1–6]). В (1) $u(t, x)$ – нормированная численность (плотность) популяции, $d > 0$ – коэффициент диффузии (или подвижность вида), $r > 0$ – мальтузианский коэффициент, $T > 0$ – время запаздывания, которое связано с возрастом половозрелости особей популяции.

В качестве пространства начальных условий фиксируем пространство $C_{[-T, 0]} \cap W_2^2$.

Одним из наиболее важных вопросов относительно модели (1), (2) является вопрос о динамике решений в окрестности единичного состояния равновесия. В связи с этим обычно рассматривают другую форму записи этой краевой задачи в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t - T, x)[1 + u], \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (4)$$

к которой приходим в результате замены $u \rightarrow 1 + u$. Для (3), (4) ставится задача исследовать динамику в окрестности нулевого состояния равновесия. Известно [7, 8], что при условии $0 < r \leq \frac{\pi}{2T}$ нулевое решение в (3), (4) асимптотически устойчиво. При переходе значения r через $\frac{\pi}{2T}$ это состояние равновесия теряет устойчивость, и в его окрестности в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается устойчивое периодическое решение. При дальнейшем увеличении параметра r этот цикл становится релаксационным. Результаты о существовании и асимптотике релаксационного цикла при $r \gg 1$ приведены в [8].

В работе [6] исследовался вопрос о построении в пространстве параметров границы области устойчивости нулевого состояния равнове-

¹ Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова; РНОМЦ “Центр интегрируемых систем”, Ярославль, Россия

*E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

**E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

***E-mail: igor.maslеников16@yandex.ru

сия (3) в случае более общих, но классических граничных условий

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha u(t, 1), \quad (5)$$

где α является произвольным параметром. В плоскости (r, α) была построена кривая $\alpha = \alpha(r)$, которая делит пространство параметров на области устойчивости и неустойчивости нулевого решения (3), (5). В работе [9] исследованы динамические свойства уравнения (3) с граничными условиями, содержащими запаздывание:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha u(t - h, 1).$$

В настоящей работе уравнение (3) исследуется для двух типов неклассических граничных условий. Первый тип имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha u(t, x_0), \quad 0 \leq x_0 < 1. \quad (6)$$

Эти граничные условия имеют не только физический (см., например, [10]), но и биологический смысл: миграция из ареала $[0, 1]$ и в него через правую границу $x = 1$ зависит от плотности популяции в некоторой промежуточной точке $x_0 \in [0, 1]$. Обратим внимание, что для краевой задачи (3), (6) затруднительно воспользоваться результатами о свойствах соответствующего разрешающего оператора. Поэтому рассмотрим еще один тип граничных условий, “похожий” на (6) и отличающийся от (6) только наличием запаздывания в одном граничном условии:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \alpha u(t - h, x_0), \quad (7)$$

$$0 \leq x_0 < 1, 0 < h < T.$$

Для краевой задачи (3), (7) применимы результаты общего плана о существовании и единственности решений и др. [1] Устойчивость обеих краевых задач (3), (6) и (3), (7) исследовалась численными методами. Один из важных выводов состоит в том, что при малых значениях запаздывания h динамические свойства обеих краевых задач оказываются близки. Это является дополнительным аргументом для использования (3), (6) при моделировании поставленной задачи.

Построим при фиксированных d , T и r в плоскости параметров (x_0, α) множество Ω , для значений параметров из которого нулевое

состояние равновесия краевых задач (3), (6) и (3), (7) устойчиво. Кроме этого для параметров из области, примыкающей к Ω и находящейся достаточно близко от Ω , численно будет исследована задача о бифуркациях.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Исследуем сначала устойчивость нулевого решения задачи (3), (7) с запаздыванием в краевом условии. Линеаризуем ее на нулевом состоянии равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t - T, x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} &= \alpha u(t - h, x_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Для построения характеристического уравнения используем решение Эйлера $u(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$. В результате приходим к задаче

$$\lambda v = dv'' - re^{-\lambda T} v, \quad v'(0) = 0, \quad v'(1) = \alpha e^{-\lambda h} v(x_0).$$

Решения этой краевой задачи можно записать в виде

$$v(x) = c \operatorname{ch} \left(\sqrt{d^{-1} \mu} x \right),$$

где c — произвольная постоянная, μ определяется по формуле

$$\mu = \lambda + re^{-\lambda T}, \quad (9)$$

а λ — это корень уравнения

$$\sqrt{d^{-1} \mu} \operatorname{sh} \left(\sqrt{d^{-1} \mu} \right) = \alpha e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \left(\sqrt{d^{-1} \mu} x_0 \right). \quad (10)$$

Система (9), (10) задает характеристическое уравнение для задачи (8). Отметим, что она имеет счетное число корней на комплексной плоскости λ_n ($n \in \mathbb{Z}$). Их расположение относительно мнимой оси определяет поведение решений линейной задачи (8) [1].

Утверждение 1. Пусть все значения λ_n имеют отрицательные вещественные части, тогда все решения (8) экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, а нулевое состояние (3), (7) асимптотически устойчиво.

Утверждение 2. Пусть существует такое значение λ_n , вещественная часть которого положительна. Тогда краевая задача (8) имеет экспоненциально растущее при $t \rightarrow +\infty$ решение, а нулевое состояние (3), (7) неустойчиво.

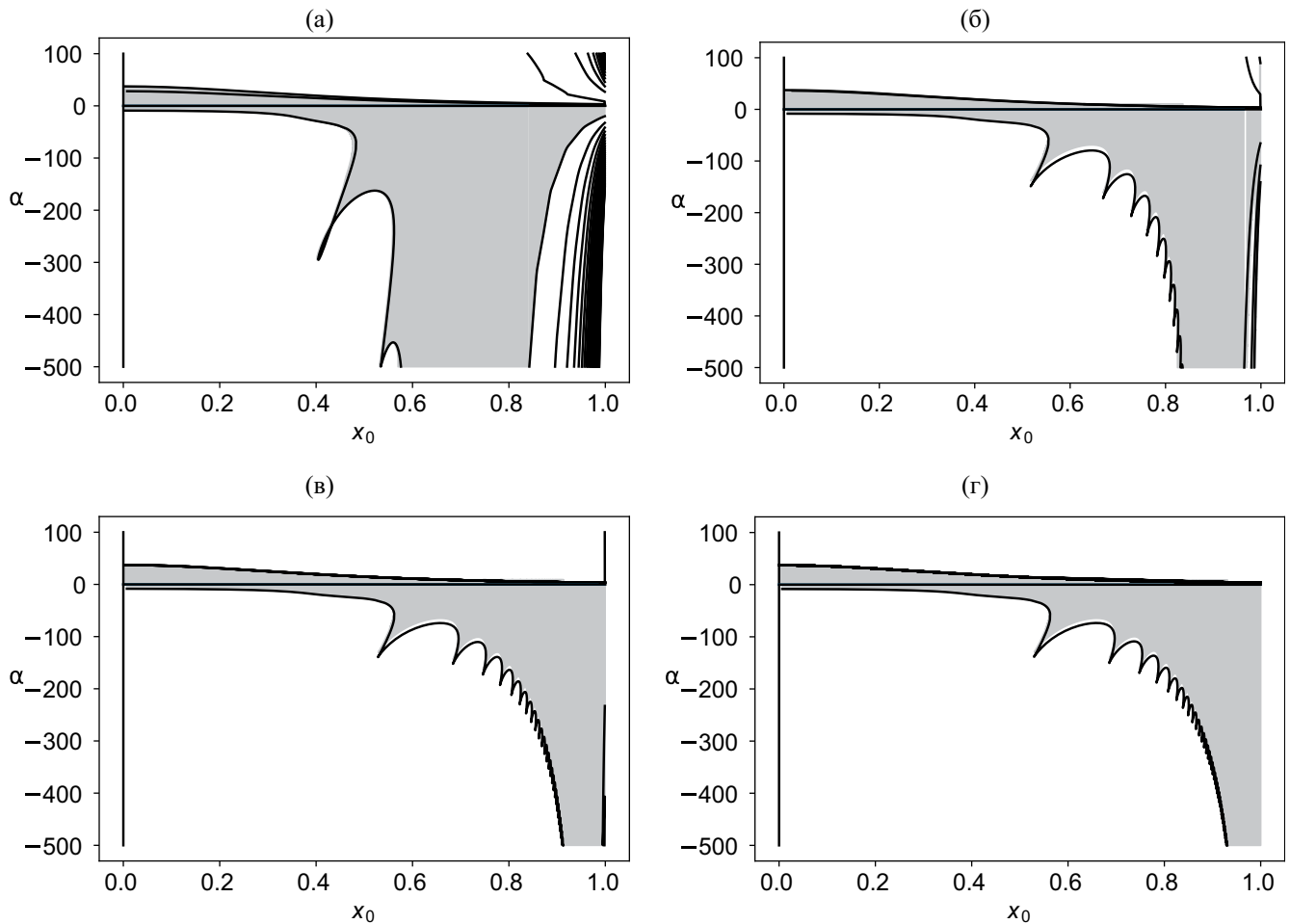


Рис. 1. Изображения кривых (11). Серым цветом выделена область устойчивости нулевого решения (3), (7). Значения параметров: $T = 1$, $r = 1$, $d = 10^{-1}$ и а) $h = 10^{-1}$, б) $h = 10^{-2}$, в) $h = 10^{-3}$, г) $h = 0$.

Для того, чтобы определить параметры, при которых будут выполняться условия утверждения 1 или утверждения 2, рассмотрим промежуточную ситуацию. Пусть у системы (9), (10) существует чисто мнимый корень λ и не существует корней с положительной вещественной частью.

Положим $\lambda = i\omega$, тогда из (9)

$$\mu = \mu(\omega) = i\omega + re^{-i\omega T}.$$

Здесь сразу отметим, что $\mu(0) = r$. При $rT < 1$ и $\omega \neq 0$ значение $\mu(\omega)$ имеет ненулевую мнимую часть. В случае $rT > 1$ появляются ненулевые значения ω , при которых $\mu(\omega)$ вещественно. Если $1 < rT < \pi/2$, то такое значение $\omega = \omega_+ \in (0, \frac{\pi}{2T})$ единственно и $\mu(\omega_+) = r \cos(\omega_+ T) > 0$.

Подставляя $\mu = \mu(\omega)$ в (10), получим соотношение на параметры α и x_0 :

$$\sqrt{d^{-1}\mu} \operatorname{sh}(\sqrt{d^{-1}\mu}) = \alpha e^{-i\omega h} \operatorname{ch}(\sqrt{d^{-1}\mu} x_0). \quad (11)$$

Отметим, что это уравнение в зависимости от ω может иметь несколько корней вида $(\alpha(\omega, h), x_0(\omega, h))$. На рис. 1 приведены кривые $(\alpha(\omega, h), x_0(\omega, h))$, полученные из уравнения (11) при $h = 10^{-1}$ (рис. 1а), $h = 10^{-2}$ (рис. 1б), $h = 10^{-3}$ (рис. 1в) и $h = 0$ (рис. 1г). Обратим внимание, что последний случай относится к крайним условиям (6). Как видно, рисунки при уменьшении значения параметра h приближаются к рисунку в случае $h = 0$.

Полученные кривые делят плоскость (α, x_0) ($x_0 \in [0, 1]$) на области, в которых количество корней (9) с положительной вещественной частью одинаково. На рис. 1 серым цветом выделена область Ω , которая содержит отрезок $\alpha = 0$. При $rT < \pi/2$ нулевое решение (3), (6) с параметрами из Ω устойчиво.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧЕ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Исследование устойчивости нулевого состояния задачи (3), (6) производится по той же схеме. Сначала линеаризуем задачу на нулевом состоянии равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t - T, x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \alpha u(t, x_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Формальное характеристическое уравнение совпадает с (9), (10) при $h = 0$:

$$\mu = \lambda + re^{-\lambda T}, \quad \sqrt{d^{-1}\mu} \operatorname{sh}(\sqrt{d^{-1}\mu}) = \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{d^{-1}\mu}x_0). \quad (13)$$

Для построения области устойчивости, как и выше, положим $\lambda = i\omega$. Тогда из (13) получаем $\mu = \mu(\omega) = i\omega + re^{-i\omega T}$ и соотношение на параметры α и x_0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{d^{-1}(i\omega + re^{-i\omega T})} \operatorname{sh}(\sqrt{d^{-1}(i\omega + re^{-i\omega T})}) &= \\ &= \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{d^{-1}(i\omega + re^{-i\omega T})}x_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что это уравнение, как и (11), в зависимости от ω может иметь несколько решений.

Разберем отдельно случай, когда значение μ вещественное. Тогда при каждом x_0 найдется единственное $\alpha(x_0)$, удовлетворяющее (14). В частности, если $\omega = 0$, то $\mu(0) = r$, а из уравнения (14) получаем, что

$$\alpha = \alpha_+(x_0) = \frac{\sqrt{d^{-1}r} \operatorname{sh}(\sqrt{d^{-1}r})}{\operatorname{ch}(\sqrt{d^{-1}r}x_0)}.$$

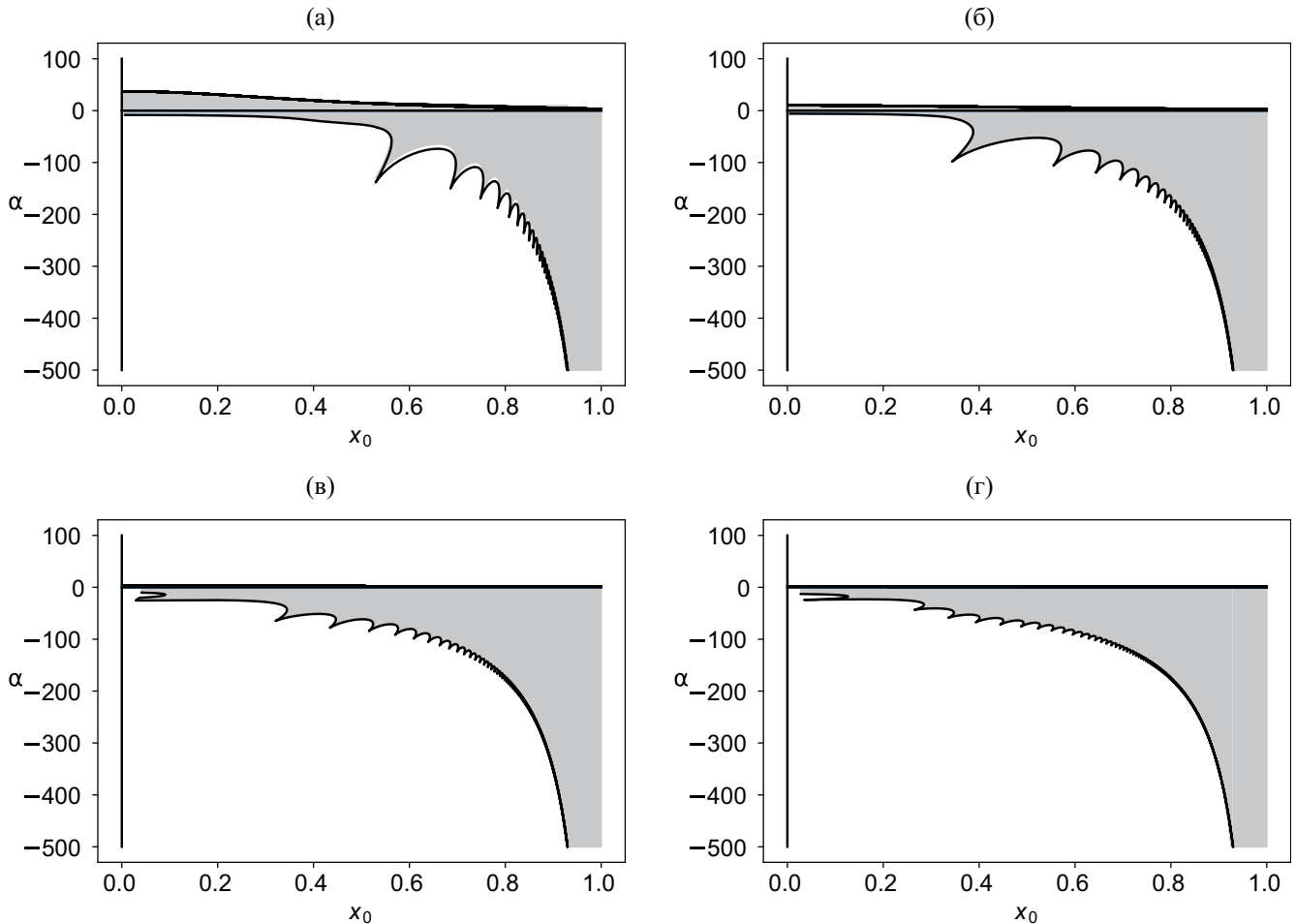


Рис. 2. Область Ω при параметрах $T = 1$, $r = 1$ и а) $d = 0.1$, б) $d = 0.2$, в) $d = 0.5$, г) $d = 1$.

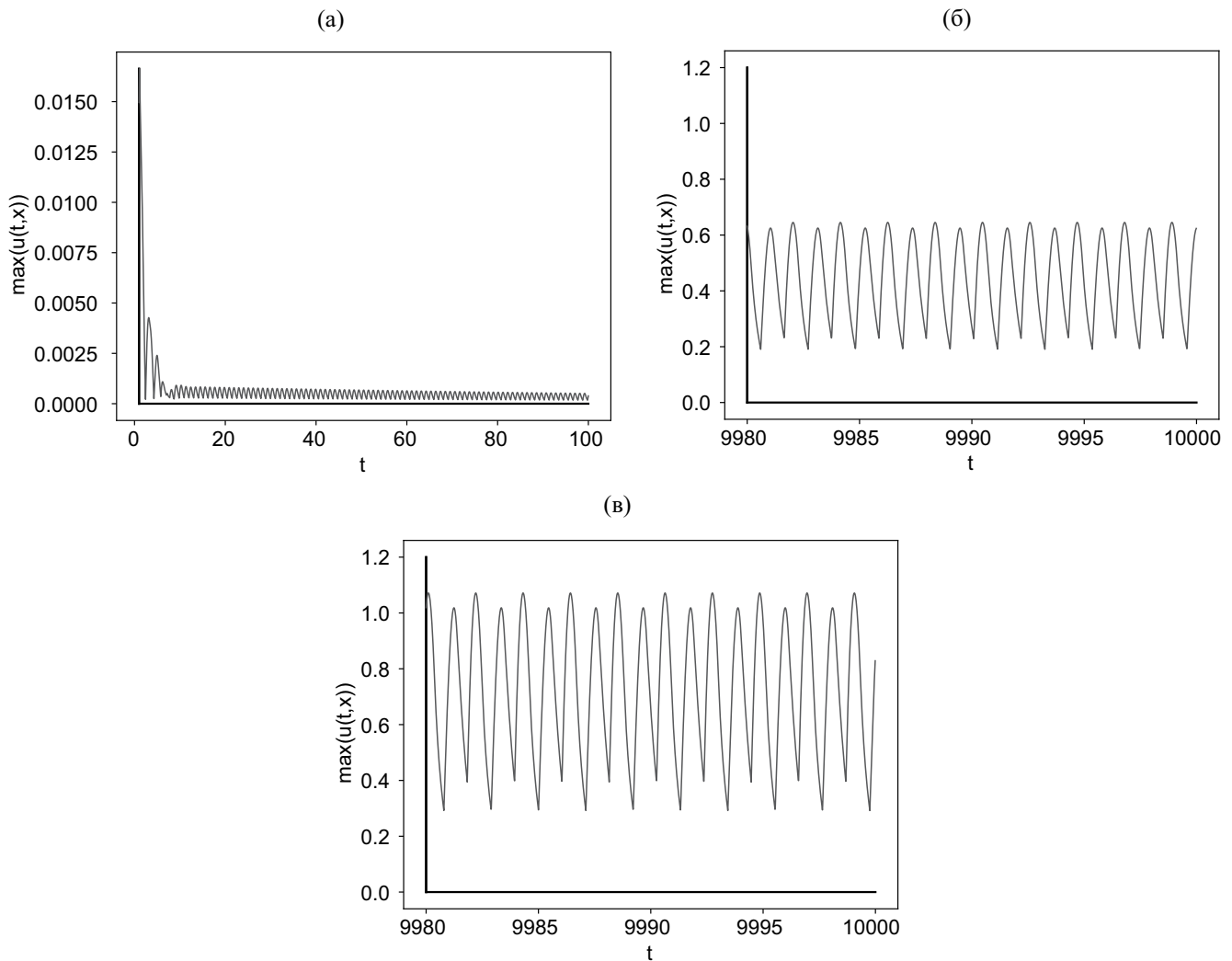


Рис. 3. Графики амплитуды решения решения (3), (6) при $d = 0.1$, $T = 1$, $r = 1$, $x_0 = 0.5$, а) $\alpha = -26,5$, б) $\alpha = -26,9$, в) $\alpha = -27$.

Отметим, что $\alpha_+(x_0) > 0$. В случае $1 < rT < \pi/2$, как отмечалось выше, существует еще одно значение ω_+ , при котором $\mu(\omega_+)$ вещественное. Для $\omega = \omega_+$ уравнение (14) имеет еще одно семейство решений

$$\alpha = \frac{\sqrt{d^{-1}r \cos(\omega_+ T)} \operatorname{sh}\left(\sqrt{d^{-1}r \cos(\omega_+ T)}\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{d^{-1}r \cos(\omega_+ T)} x_0\right)} > \alpha_+(x_0).$$

В остальных случаях, когда $\mu \notin \mathbb{R}$, уравнение (14) имеет только конечное количество корней с $x_0 \in [0, 1]$.

Далее исследуем численно уравнение (14). В результате получим кривые, которые делят плоскость (α, x_0) ($x_0 \in [0, 1]$) на области, в которых количество корней (9) с положительной веще-

ственной частью одинаково. Область Ω , содержащая отрезок $\alpha = 0$, при $rT < \pi/2$ является областью устойчивости нулевого решения (3), (6).

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСХОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Приведем наиболее важные результаты, полученные при численном анализе краевых задач (3), (6) и (3), (7).

На рис. 2 при $r = 1$, $T = 1$ и при различных значениях параметра d на плоскости параметров (x_0, α) изображены полученные численно решения уравнения (14). Видно, что граница области Ω состоит из двух кривых $\alpha_{\pm}(x_0)$. Нулевое решение (3), (6) для параметров, удовлетворяющих условиям

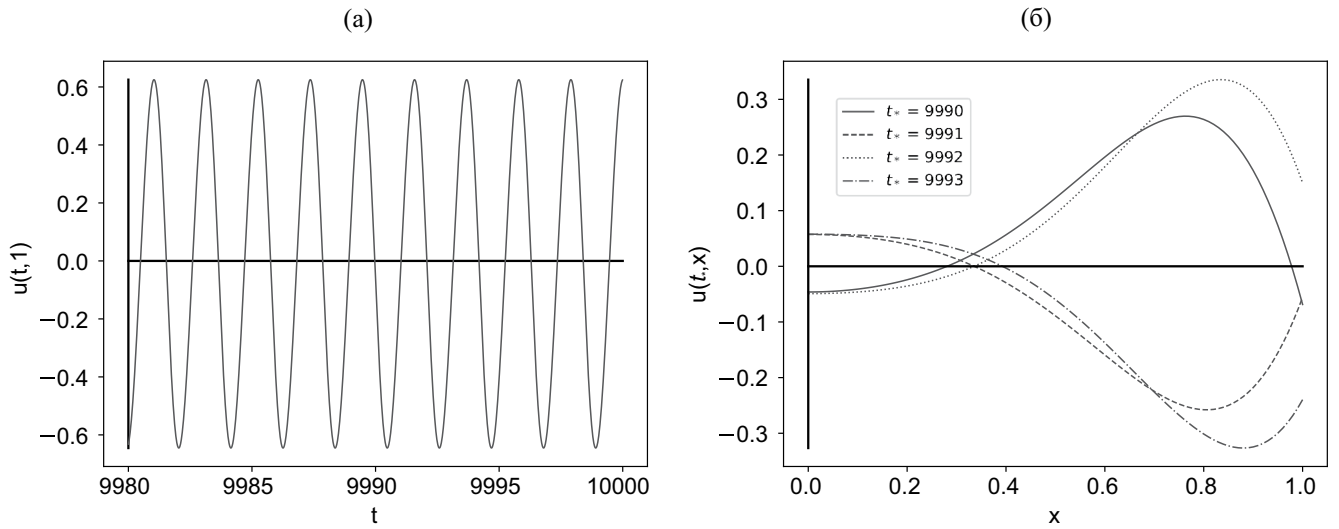


Рис. 4. Графики зависимости $u(t, 1)$ (слева) и $u(t_*, x)$ (справа) решения (3), (6) при $d = 0.1$, $T = 1$, $r = 1$, $x_0 = 0.55$, $\alpha = -26.9$.

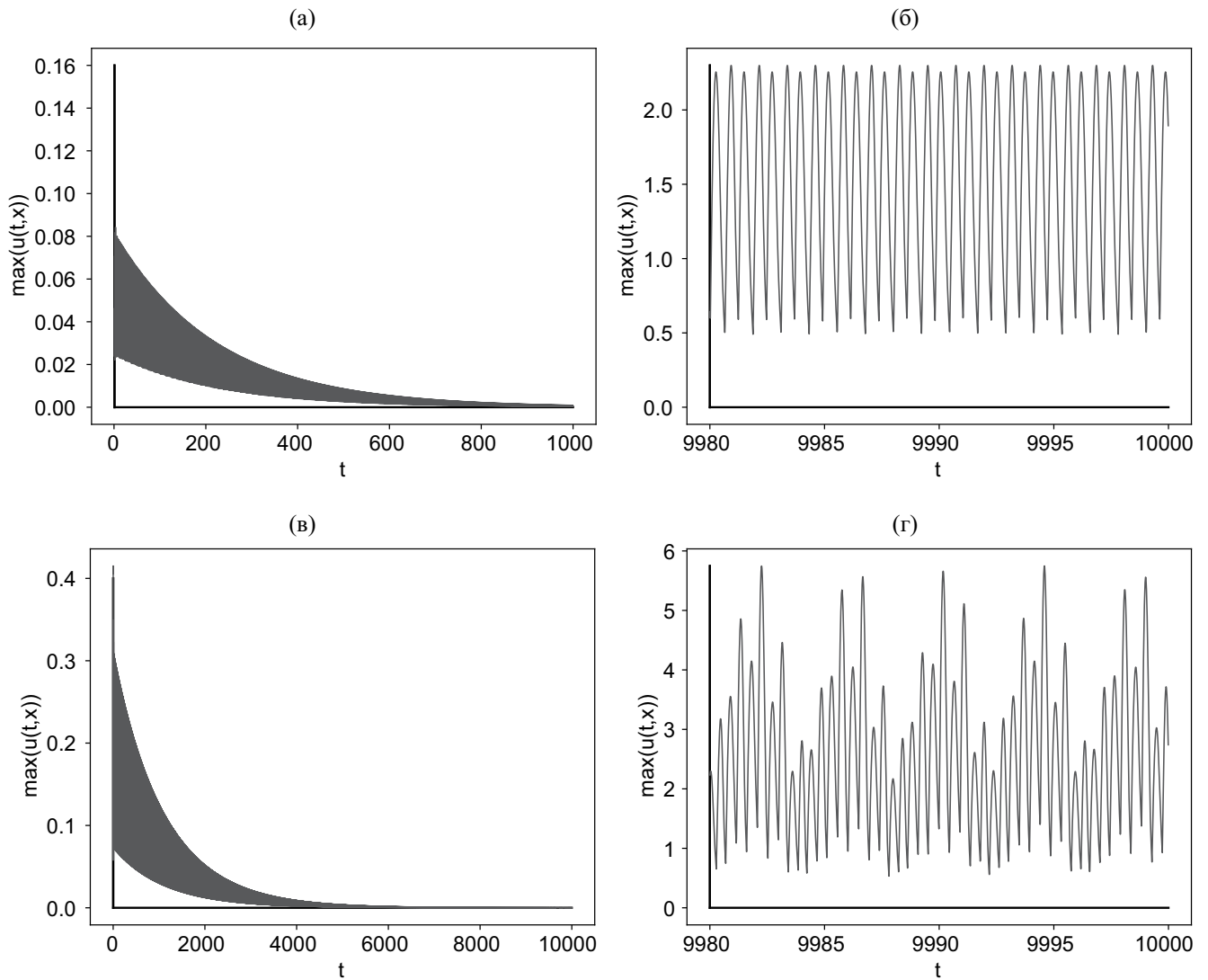


Рис. 5. Графики амплитуды решения решения (3), (6) при $d = 0.1$, $T = 1$, $r = 1$, $x_0 = 0.55$, а) $\alpha = -38$, б) $\alpha = -100.5$, в) $\alpha = -101$, г) $\alpha = -118$.

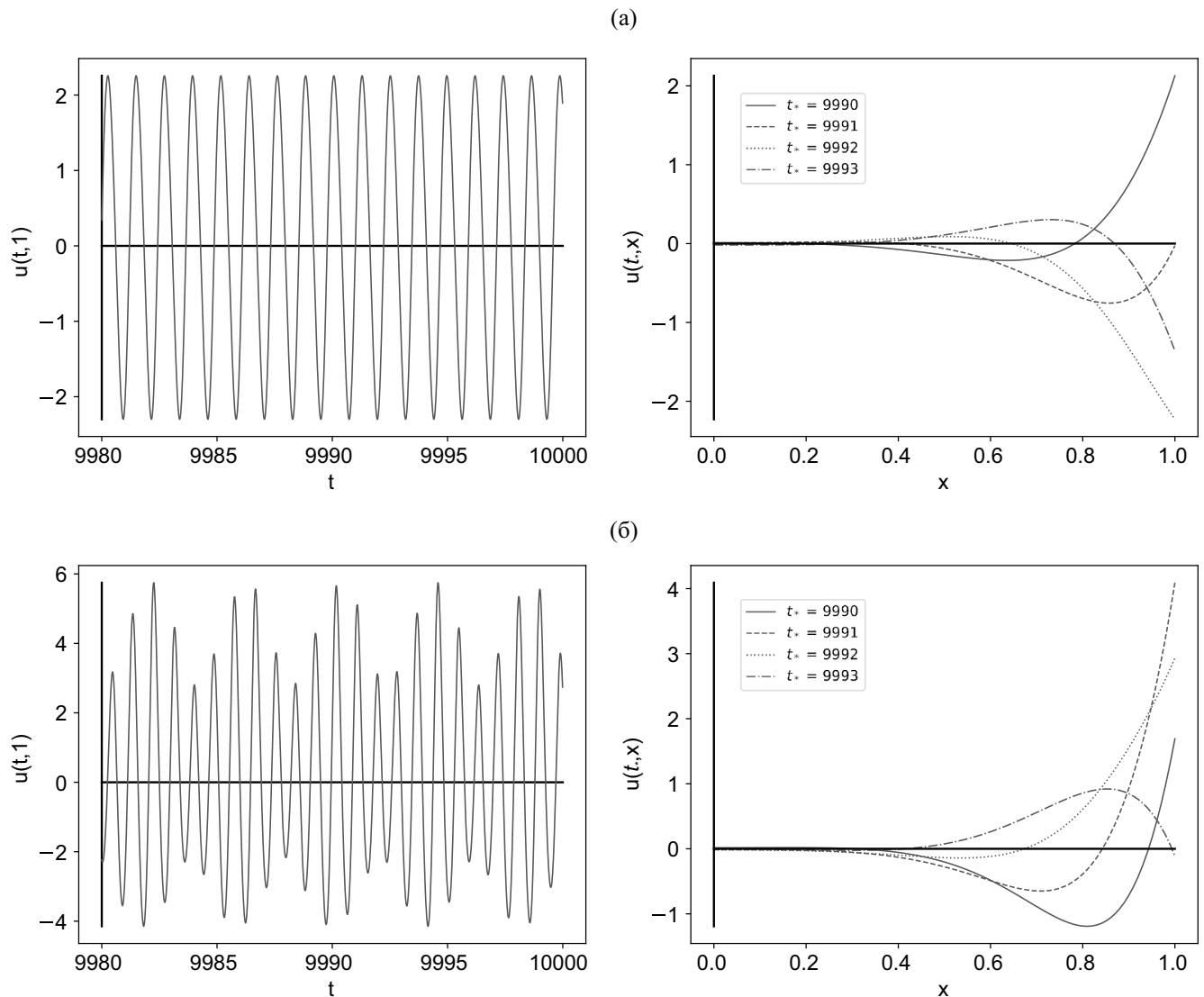


Рис. 6. Графики зависимости $u(t, 1)$ (слева) и $u(t_*, x)$ (справа) решения (3), (6) при $d = 0.1, T = 1, r = 1, x_0 = 0.55$, а) $\alpha = -100.5$, б) $\alpha = -118$.

$$\alpha_-(x_0) < \alpha < \alpha_+(x_0), \quad (15)$$

является устойчивым, а при

$$\alpha < \alpha_-(x_0) \text{ или } \alpha > \alpha_+(x_0) \quad (16)$$

неустойчивым.

Отметим, что присутствует тенденция сужения области Ω при уменьшении параметра x_0 . Отметим также, что при увеличении параметра d кривые $\alpha_{\pm}$ сглаживаются.

На рис. 3 приведены графики изменения амплитуды решения $\left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u(t, x)|\right)$ при $x_0 = 0.5$ и различных значениях α , как внутри области устойчивости Ω (рис. 3а) так и вне ее (рис. 3б и 3в). Обратим внимание, что при удалении α от критических значений амплитуда

решения увеличивается. Результаты численного счета говорят о том, что происходит бифуркация Андронова–Хопфа. На рис. 4 приведены графики $u(t, 1)$ и $u(t_*, x)$ для установившихся режимов для тех же значений параметров, что и на рис. 3б при некоторых фиксированных t_* .

На рис. 2 видно, что кривая $\alpha_-(x_0)$ имеет сложную структуру. Это, в частности, означает, что при некотором фиксированном x_0 и при уменьшении α несколько раз может происходить смена устойчивости и неустойчивости нулевого решения в (3), (6). Аналогично при изменении x_0 при фиксированном значении α могут произойти несколько прямых и обратных бифуркаций. Этот эффект проиллюстрирован на рис. 5, где приведены графики амплитуды

установившихся режимов при $x_0 = 0.55$ и различных значениях α . Из рисунка видно, что сначала при $\alpha = -38$ решение стремится к нулю (рис. 5а), затем при уменьшении α появляется устойчивый цикл (рис. 5б), который сменяется устойчивым нулевым решением (рис. 5в), а при дальнейшем уменьшении α опять появляется устойчивое периодическое решение, как на рис. 5г. Графики $u(t, x_*)$ и $u(t_*, x)$ при значениях параметров, соответствующим рис. 5б и 5г приведены на рис. 6. Обратим внимание, что при $\alpha = -118$ (рис. 6б) характер колебаний стал более сложным, что объясняется удаленностью точки (x_0, α) от области устойчивости.

При пересечении верхней границы области устойчивости — кривой $\alpha = \alpha_+(x_0)$, — задача, как показывает численный анализ, становится нелокальной.

Динамические свойства задачи (3), (7), содержащей запаздывание в граничном условии при малых значениях величины запаздывания h повторяют описанные результаты для задачи (3), (6), т. е. для случая $h = 0$.

5. ВЫВОДЫ

Исследованы области устойчивости состояний равновесия логистического уравнения с запаздыванием и диффузией (3) и двумя видами неклассических краевых условий: (7), в котором дополнительно содержится запаздывание по времени h , и (6) в котором запаздывание отсутствует ($h = 0$). Показано, что при малых значениях h область устойчивости для задачи (3), (7) переходит в область устойчивости нулевого решения задачи (3), (6).

Численными методами исследовано поведение решений в окрестности границы области устойчивости. Из полученных результатов следует, что при пересечении нижней границы устойчивости происходит бифуркация Андро-

нова—Хопфа, т. е. рождается устойчивое периодическое решение.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996.
2. Cushing J. M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Springer, 1977.
3. Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dynamics. Academic Press, 1993.
4. Murray J.D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. New York : Springer, 2001. V. 3.
5. Gourley S.A., So J.W-H., Wu J.H. Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 124. P. 5119–5153.
6. Кащенко С.А., Логинов Д.О. Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Математические заметки. 2019. Т. 106. № 1. С. 138–143.
7. Wright E.M. A non-linear difference-differential equation // J. für die reine und angewandte Math. (Crelles Journal). 1955. V. 194. P. 66–87.
8. Кащенко С.А. Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием. М.: КРАСАНД, 2020.
9. Кащенко С.А., Толбей А.О. Бифуркации в логистическом уравнении с диффузией и запаздыванием в граничном условии // Матем. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 940–944.
10. Rudyi A.S. Theoretical fundamentals of the method for thermal diffusivity measurements from auto-oscillation parameters in a system with a thermal feedback // International J. of Thermophysics. 1993. V. 14. P. 159–172.

STABILITY OF SOLUTIONS TO THE LOGISTIC EQUATION WITH DELAY, DIFFUSION AND NONCLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

I. S. Kashchenko^a, S. A. Kashchenko^a, I. N. Maslenikov^a

aP. G. Demidov Yaroslavl State University, Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The work is devoted to the logistic equation with delay and diffusion with non-classical boundary conditions. The stability of a nontrivial equilibrium state is investigated, and the resulting bifurcations are studied numerically.

Keywords: logistic equation, delay, diffusion, non-classical boundary conditions, stability

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЯКОБИ О ПОСЛЕДНЕМ МНОЖИТЕЛЕ

© 2024 г. Е. И. Кугушев^{1, *}, Т. В. Сальникова^{1, **}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 05.03.2024 г.

После доработки 28.05.2024

Принято к публикации 05.06.2024

Для выполнения условий теоремы Якоби о последнем множителе требуется существование инвариантной меры и наличие достаточного количества независимых первых интегралов. В этом случае система локально интегрируется в квадратурах. Известны примеры систем, в которых для возможности интегрирования в квадратурах оказалось достаточно существования частных первых интегралов. При этом интегрирование в квадратурах происходит на уровнях частных первых интегралов. В настоящей работе теорема Якоби о последнем множителе распространяется на общую ситуацию, когда среди первых интегралов присутствуют частные интегралы.

Ключевые слова: инвариантная мера, инвариантные множества, частные первые интегралы, интегрируемость в квадратурах

DOI: 10.31857/S2686954324030187, **EDN:** XZFDUZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической теореме Якоби о последнем множителе требуется существование инвариантной меры и наличие достаточного количества независимых первых интегралов. В этом случае система локально интегрируется в квадратурах. Обобщения и модификации теоремы Якоби о последнем множителе рассматривались в различных работах. Среди последних работ можно указать [8, 11] в которых обсуждается круг вопросов, связанных с условиями точной интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, выраженными через свойства тензорных инвариантов и полей симметрий. В [3] приводятся примеры систем, в которых для возможности интегрирования в квадратурах оказалось достаточно существования частных первых интегралов. При этом интегрирование в квадратурах происходит на уровнях частных первых интегралов.

В настоящей работе рассматривается общая ситуация, когда инвариантное множество, на котором система интегрируется в квадратурах, определяется как частный уровень некоторой

функции на фазовом пространстве системы, т. е. на уровне частного интеграла системы.

2. ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА НА УРОВНЕ ЧАСТНОГО ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$v(x) = (v_1, \dots, v_n)$ — векторное поле в R^n .

Точку $x_0 \in R^n$ будем называть *неособой*, если $v(x_0) \neq 0$.

Пусть $F(x), x \in R^n$ — гладкая функция в R^n . Для константы $a \in R$ обозначим через M_a *уровень* функции F :

$$M_a = \{x \in R^n : F(x) = a\}.$$

Точку $x_0 \in R^n$ будем называть *некритической*, если $dF(x_0) \neq 0$, т. е. градиент функции F отличен от нуля.

Определение. Множество $W \subseteq R^n$ называется *инвариантным* для уравнения (1), если любое решение $x(t)$ этого уравнения, начавшееся на W (т.е. $x(0) \in W$), остается на нем во все время существования решения: $x(t) \in W, \forall t$.

Определение. Будем говорить, что функция $F(x)$ — это *частный интеграл* системы (1) на уровне $a \in R$, если уровень M_a является инвариантным множеством.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: kugushevei@yandex.ru

**E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com

Утверждение 1.

Пусть $F(x)$ — частный интеграл системы (1) на уровне $a \in R$. Тогда в окрестности любой некритической и неособой точки $x_0 \in M_a$ существует гладкая функция $G(x)$, которая является первым интегралом системы (1), причем $F(x) = G(x)$ и $dF = dG$ на M_a (т.е. в точках $x \in M_a$).

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что $a = 0$, и $x_0 = 0$. Поскольку $x_0 = 0$ неособая точка, то в ее окрестности векторное поле $v(x)$ можно выпрямить. Введем вектор $e = (1, 0, \dots, 0) \in R^n$. Для выпрямленного векторного поля и частного интеграла оставим те же обозначения. Поэтому, не нарушая общности, считаем, что в окрестности нуля имеем

$$v(x) = e = (1, 0, \dots, 0).$$

Пусть $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in M_0$ — точка из окрестности нуля, лежащая на уровне M_0 . Решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальными условиями $x(0) = x^*$ имеет вид $x(t) = x^* + te$:

$$x_1(t) = x_1^* + t, \quad x_2(t) = x_2^*, \dots, x_n(t) = x_n^*.$$

Поскольку M_0 инвариантное множество, то для небольших по модулю значений t , точки $x(t)$ также лежат на M_0 . В частности, при $t = -x_1^*$ имеем $x_1(t) = 0$, т.е. точка $(0, x_2^*, \dots, x_n^*)$ лежит на M_0 .

Введем в окрестности нуля функцию $G(x) = F(x)|_{x_1=0} = F(0, x_2, \dots, x_n)$. Это первый интеграл уравнения (1).

Обозначим через N_0 нулевой уровень функции $G(x)$ в окрестности нуля:

$$N_0 = \{x \in R^n : G(x) = 0\}.$$

Тогда $N_0 = M_0$. Действительно, пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in N_0$, то есть пусть $G(x) = 0$. Поскольку $G(x)$ не зависит от x_1 , то $G(0, x_2, \dots, x_n) = G(x) = 0$. Тогда $F(0, x_2, \dots, x_n) = G(x) = 0$, значит, $(0, x_2, \dots, x_n) \in M_0$. В силу инвариантности M_0 точка $x = (0, x_2, \dots, x_n) + x_1 e$ также лежит на M_0 .

Обратно, пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in M_0$, то есть пусть $F(x) = 0$. В силу инвариантности M_0 точка $(0, x_2, \dots, x_n) = x - x_1 e$ также лежит на M_0 . Значит, $F(0, x_2, \dots, x_n) = 0$. Тогда $G(0, x_2, \dots, x_n) = 0$. Поскольку $G(x)$ не зависит от x_1 , то $G(x) = 0$, значит, $x \in N_0$.

$$G(x) \text{ не зависит от } x_1, \text{ следовательно, } \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0.$$

$$F \text{ — частный первый интеграл, поэтому } \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

при $F(x) = 0$, то есть при $x \in M_0$. Поэтому $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x}$ на M_0 . Следовательно, $dF = dG$ на M_0 .

Утверждение 1 доказано.

Замечание 1.

Пусть система (1) допускает инвариантную меру с гладкой плотностью, и $F(x)$ — частный интеграл этой системы на уровне $M_a = \{x : F(x) = a\}$. Пусть x_0 — некритическая и неособая точка системы (1), лежащая на этом уровне. Из утверждения 1 следует, что в окрестности точки x_0 существует первый интеграл $G(x)$ системы (1) такой что $G(x_0) = F(x_0) = a$, и его уровень $N_a = \{x : G(x) = a\}$ локально, в окрестности точки x_0 , совпадает с уровнем $M_a = \{x : F(x) = a\}$ частного интеграла. На уровне N_a общего интеграла $G(x)$ существует инвариантная мера [12]. Следовательно, инвариантная мера с гладкой плотностью существует и на уровне M_a частного интеграла.

Из утверждения 1 следует, что общий интеграл $G(x)$ существует локально, поэтому и инвариантная мера на уровне частного интеграла существует локально. Однако при некоторых предположениях о невырожденности можно доказать и глобальное существование инвариантной меры на всем уровне M_a . В следующем утверждении следуем схеме соответствующих рассуждений [12].

Утверждение 2.

Пусть μ — инвариантная мера с гладкой плотностью для системы (1), пусть $F(x)$ — частный интеграл системы (1) на некритическом уровне $a \in R$. Тогда M_a — это гладкое многообразие. Пусть многообразие M_a не содержит особых точек векторного поля $v(x)$. Тогда ограничение системы (1) на уровень M_a имеет инвариантную меру ν . Если мера μ задается дифференциальной формой $\tilde{\mu}$, то ν задается дифференциальной формой $\tilde{\nu}$ такой, что для точек, лежащих на M_a

$$dF \wedge \tilde{\nu} = \tilde{\mu}. \quad (2)$$

Доказательство. Уровень M_a некритический, $\text{grad} F|_{M_a} \neq 0$. Локально, в окрестности любой точки $x \in M_a$, существует первый интеграл $G(x)$ (см. утверждение 1). Используя теорему о неявной функции, введем локальные координаты $y = (y_1, \dots, y_n)$ такие, что $y_1 = G(x) - a$. Тогда локально M_a задается уравнением $y_1 = 0$.

Покажем, что найдется форма $\tilde{v}$ ранга $n-1$ такая, что для точек, лежащих на M_a

$$\tilde{\mu} = dG \wedge \tilde{v}. \quad (3)$$

Пусть $\alpha(y)$ — плотность меры μ в координатах y . Запишем уравнения (1) в координатах y :

$$\dot{y}_1 = f_1(y) = 0, \quad \dot{y}_2 = f_2(y), \quad \dots, \quad \dot{y}_n = f_n(y). \quad (4)$$

Согласно теореме Лиувилля,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial(\alpha f_j)}{\partial y_j} = \sum_{j=2}^n \frac{\partial(\alpha f_j)}{\partial y_j} = 0. \quad (5)$$

Локально в координатах y имеем $\tilde{\mu} = \alpha(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, где $\alpha(y)$ некая функция (плотность меры). Поскольку $dG = dy_1$, то уравнение (3) в координатах y принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= dy_1 \wedge \dot{v} = \alpha(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \\ &= dy_1 \wedge (\alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) есть сумма двух слагаемых:

$$\dot{v} = \alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n + dy_1 \wedge \lambda,$$

где λ — произвольная $(n-2)$ -форма. Второе слагаемое оказывается равным нулю при ограничении на M_a . Поэтому

$$\dot{v}|_{M_a} = \alpha(y)|_{y_1=0} dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Ограничение системы (4) на M_a имеет вид

$$\dot{y}_2 = f_2|_{y_1=0}, \dots, \dot{y}_n = f_n|_{y_1=0}.$$

Проверка того, что $\dot{v}|_{M_a}$ — форма инвариантной меры, или, другими словами, что $\alpha|_{y_1=0}$ — плотность инвариантной меры в координатах y , теперь сводится к применению теоремы Лиувилля и использованию равенства (5).

Посмотрим, что происходит на пересечении координатных окрестностей. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ — другие координаты (вместо x). Уровень M_a не критический ($\text{grad} F|_{M_a} \neq 0$). Локально в окрестности любой точки $z \in M_a$ существует первый интеграл $G^*(z)$ (см. утверждение 1). Используя теорему о неявной функции, введем локальные координаты $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ такие, что $y_1^* = G^*(z) - a$. Тогда локально M_a задается уравнением $y_1^* = 0$.

Аналогично вышеизложенному, локально в координатах y^* имеем $\tilde{\mu} = \beta(y^*) dy_1^* \wedge \dots \wedge dy_n^*$,

где $\beta(y^*)$ некая функция (плотность меры). Поскольку $dG^* = dy_1^*$, то уравнение (3) в координатах y^* принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= dy_1^* \wedge \hat{v} = \beta(y^*) dy_1^* \wedge \dots \wedge dy_n^* = \\ &= dy_1^* \wedge (\beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (6) получаем

$$\begin{aligned} dy_1 \wedge (\alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n) &= \\ &= dy_1^* \wedge (\beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*). \end{aligned}$$

По утверждению 1 в точках M_a выполнено $dG = dF$ и $dG^* = dF$. Следовательно, в точках M_a имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= dy_1 \wedge \hat{v} = dy_1 \wedge (\alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n) = \\ &= dy_1 \wedge (\beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*). \end{aligned}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n + dy_1 \wedge \lambda = \\ &= \beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^* + dy_1 \wedge \lambda^*, \end{aligned}$$

где λ и λ^* — произвольные $(n-2)$ -формы. При этом вторые слагаемые оказываются равными нулю при ограничении на M_a . Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{v}|_{M_a} &= \alpha(y)|_{y_1=0} dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n = \\ &= \beta(y^*)|_{y_1^*=0} dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*. \end{aligned}$$

Таким образом, форма $\dot{v}$ определена на уровне M_a глобально.

Утверждение 2 доказано.

Замечание 2.

Дифференциальные уравнения, допускающие частные первые интегралы, можно найти в задачах динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [2, 3, 6].

Имеется еще один класс уравнений, допускающих частные первые интегралы. Пусть на движение лагранжевой системы наложена линейная по скоростям связь. Уравнения движения такой системы — это уравнения Лагранжа второго рода с множителями. Если множители найти как функции обобщенных координат и скоростей, то получатся уравнения в исходном фазовом пространстве, для которых наложенные связи будут частными первыми интегралами, линейными по скоростям. Можно показать наличие инвариантной меры на уровнях этих интегралов в случае интегрируемых связей. Если же связи

неинтегрируемы, то, как показано в [5], наличие инвариантной меры на этих уровнях нетипично.

3. ТЕОРЕМА ЯКОБИ О ПОСЛЕДНЕМ МНОЖИТЕЛЕ

Первое обобщение теоремы Якоби о последнем множителе на случай существования частных интегралов дано в работе С.А. Чаплыгина [10]. Приведем его в формулировке работы [7].

Утверждение 3.

Предположим, что в окрестности неособой точки x_0 система $\dot{x} = v(x)$ имеет инвариантную меру с гладкой плотностью $\rho(x) > 0$. Пусть $F_1, \dots, F_k$ — общие, а $F_{k+1}, \dots, F_{n-2}$ — частные первые интегралы, такие, что

$$\dot{F}_i = \sum_{j=k+1}^{n-2} g_{ij} F_j^{n_{ij}}, \quad (8)$$

где $\dot{F}_i = (\text{grad} F_i, v)$ — производная в силу системы, g_{ij} — функции класса C^1 , величины $n_{ij} \geq 0$ и $n_{ii} > 1$. Если функции $F_1, \dots, F_n$ независимы, то система интегрируема в квадратурах на уровне частных первых интегралов.

Динамические уравнения Эйлера—Пуассона движения твердого тела с неподвижной точкой допускают инвариантную меру с постоянной плотностью. Поэтому для нахождения квадратур, дающих общее решение уравнений Эйлера—Пуассона, достаточно найти еще один общий первый, либо частный первый интеграл, независимый от трех классических интегралов (энергии, площадей и геометрического). Примеры нахождения и анализа квадратур в таких системах см. в [2, 3, 6]. Однако, в этих случаях условия теоремы Чаплыгина о последнем множителе не выполняются.

В работе [7] задача об интегрируемости систем с инвариантной мерой при наличии общих и частных интегралов рассмотрена в гамильтоновом формализме, когда число первых интегралов равно числу степеней свободы гамильтоновой системы. Условия (8) заменены на условия коммутруемости интегралов и обращения в ноль их попарных скобок Пуассона. Доказанное общее утверждение позволяет сформулировать обобщение теоремы Чаплыгина о последнем множителе в применении к уравнениям Эйлера—Пуассона в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой. Условия (8) заменяются на условия коллинеарности градиентов интеграла

энергии и производной в силу системы частного интеграла на их совместном уровне. Обобщение теоремы Якоби применяется к случаю Горячева—Чаплыгина и другим задачам.

Замечание 3. В рамках теоремы Якоби о последнем множителе размерность совместного уровня равна двум, и для анализа динамики системы на этом уровне можно воспользоваться общей теоремой Колмогорова о динамических системах с инвариантной мерой на двухмерном торе [9].

4. ДИНАМИКА НА ДВУМЕРНЫХ ЧАСТНЫХ УРОВНЯХ

Пусть система $\dot{x} = v(x)$ порядка n обладает инвариантной мерой с гладкой положительной плотностью и имеет $n-2$ общих или частных первых интеграла $F_1, \dots, F_{n-2}$, для которых выполнены условия Утверждения 2. Рассмотрим совместный уровень первых интегралов

$$M_a = \{x : F_i(x) = a_i, \quad i = 1, \dots, m-2\}$$

(для краткости рассуждений считаем, что он связан, иначе возьмем его связную компоненту).

Поскольку в точках $x \in M_a$ первые интегралы независимы, то M_a является гладким двумерным многообразием с векторным полем $v(x)$ на нем.

Можно показать, что если фазовое пространство системы ориентируемо, то неособые уровни гладких функций также являются ориентируемыми многообразиями. В этом случае M_a также ориентируемо.

Пусть ориентируемое двумерное многообразие M_a компактно и векторное поле v на нем не имеет особых точек. Тогда, в соответствии с известным утверждением из топологии, M_a является двумерным тором T^2 (см., например, [4]).

Динамику системы на нем проясняет следующее утверждение [9]:

Теорема Колмогорова. Пусть на двумерном торе T^2 задано гладкое неособое векторное поле, и соответствующая система дифференциальных уравнений допускает инвариантную меру с гладкой плотностью. Тогда на торе можно ввести угловые координаты $\phi_1, \phi_2 \bmod 2\pi$, в которых система будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\omega_1}{v(\phi_1, \phi_2)}, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{\omega_2}{v(\phi_1, \phi_2)},$$

где ω_i — некоторые константы, и v — плотность инвариантной меры. После замены времени $d\tau = v^{-1}dt$ система приобретет вид

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \omega_2.$$

Если в некоторых угловых координатах $u, v \bmod 2\pi$ на торе система имела вид

$$\dot{u} = f_1(u, v), \quad \dot{v} = f_2(u, v),$$

и плотность инвариантной меры задавалась функцией $\rho(u, v)$, то

$$\omega_i = \frac{1}{\mu} \int_{T^2} \rho f_i du dv, \quad \mu = \int_{T^2} \rho du dv, \quad i = 1, 2.$$

Если ω_i соизмеримы, то любая траектория на торе будет периодической. В несоизмеримом случае движение условно-периодическое, любая траектория будет заполнять тор всюду плотно.

В качестве модельного примера рассмотрим гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Пусть $(q, p) \in \mathbb{R}^4$ — канонические координаты $W(q, p)$ — произвольная гладкая функция. Пусть $F(q, p)$ и $G(q, p)$ — гладкие функции, такие что $\{F, G\} = 0$, где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона. Пусть функции F и G функционально независимы на уровне $F = 0$. Составим функцию Гамильтона $H(q, p) = WF + G$. Производная функции F в силу системы равна

$$\dot{F} = \{H, F\} = \{WF, F\} + \{G, F\} = F\{W, F\}.$$

Функция F является частным интегралом системы на своем нулевом уровне. Проверим функциональную независимость функций H и F на этом уровне

$$\begin{aligned} \text{grad} H &= F \text{grad} W + W \text{grad} F + \\ &+ \text{grad} G = W \text{grad} F + \text{grad} G \end{aligned}$$

Поскольку по предположению векторы $\text{grad} F$ и $\text{grad} G$ не коллинеарны на уровне $F = 0$, то не коллинеарны и векторы $\text{grad} H$ и $\text{grad} F$. Значит, функции H и F независимы на уровне $F = 0$. Уравнения Гамильтона допускают инвариантную меру с постоянной плотностью. При $F = 0$ имеем $H = G$. Пусть для константы h совместный уровень $\{H = h, F = 0\}$ имеет компактную связную компоненту, на которой вектор фазовой скорости не обращается в ноль. Тогда эта компонента представляет собой инвариантный двухмерный тор, и в данном случае применима теорема Колмогорова.

Рассмотрим конкретный пример — возмущенный плоский гармонический осциллятор. Пусть $W(q, p)$ — произвольная гладкая функция. Положим

$$\begin{aligned} F &= p_1 q_2 - p_2 q_1 - 1, \\ G &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2), \end{aligned}$$

Это интеграл кинетического момента и функция Гамильтона плоского гармонического осциллятора, поэтому $\{F, G\} = 0$, в чем можно убедиться и прямым вычислением. Проверим независимость F и G . Имеем

$$\text{grad} F = (-p_2, p_1, q_2, -q_1), \quad \text{grad} G = (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

Возьмем скалярное произведение этих векторов. На уровне $F = 0$ имеем

$$(\text{grad} F, \text{grad} G) = 2(q_2 p_1 - q_1 p_2) = 2. \quad (9)$$

На уровне $G = h > 1$ имеем $\|\text{grad} G\|^2 = 2h > 2$. Поскольку $\|\text{grad} F\| = \|\text{grad} G\|$, то на уровне $G = h > 1$ имеем $\|\text{grad} F\|^2 = \|\text{grad} G\|^2 > 2$. Тогда из (9) следует, что при $h > 1$ на совместном уровне $\{G = h > 1, F = 0\}$ векторы $\text{grad} F$ и $\text{grad} G$ не коллинеарны. Значит, на этом совместном уровне функции F и G независимы.

Уровень $G = h > 1$ компактен и представляет собой трехмерную сферу S^3 радиуса $\sqrt{2h}$. На уровне $F = 0$ имеем $H = G$. Поэтому совместный уровень $\{H = h > 1, F = 0\}$ совпадает с совместным уровнем $\{G = h > 1, F = 0\}$ и все его связные компоненты — это двухмерные торы.

Для гамильтониана $H = FW + G$ выпишем уравнения Гамильтона на уровне $F = 0$

$$\dot{q} = H_p = WF_p + G_p, \quad \dot{p} = -H_q = -WF_q - G_q.$$

На совместном уровне $\{G = h > 1, F = 0\}$ вектор фазовой скорости отличен от нуля, поскольку векторы $\text{grad} F$ и $\text{grad} G$ не коллинеарны.

На совместном уровне $\{H = h > 1, F = 0\}$ выполнены все условия теоремы Колмогорова. Таким образом, множество $\{H > 1, F = 0\}$ расслаивается на инвариантные двухмерные торы, и при некотором выборе координат (возможно, с заменой времени) движение на этих торах будет условно периодическим.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанные в работе утверждения обобщают известные классические теоремы о существовании инвариантной меры на системы с частными интегралами. Эти результаты дают больше возможностей для анализа поведения таких динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин С.В., Каранетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. М.: Издательский центр «Академия», 2010. 434 с.
2. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
3. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 424 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Т. 2: Геометрия и топология многообразий. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 296 с.
5. Козлов В.В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 3. С. 85—107.
6. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ РХД, 2000. 248 с.
7. Козлов В.В. О некоторых свойствах частных интегралов канонических уравнений // Вестник МГУ. Сер. мат.-мех. 1973. № 1. С. 81—84.
8. Козлов В.В. Теорема Эйлера—Якоби—Ли об интегрируемости // Нелинейная динам. 2013. Т. 9. № 2. С. 229—245.
9. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763—766.
10. Чаплыгин С.А. О принципе последнего множителя // Математический сборник. 1900. Т. 21. № 3. С. 479—489. — В кн.: Чаплыгин С.А. Собрание сочинений. Т. 1, М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
11. Nucci M.C., Leach P.G.L. Jacobi's Last Multiplier and the Complete Symmetry Group of the Euler—Poincaré System // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2002. V. 9. № 2. P. 110—121.

GENERALIZATION OF JACOBI'S THEOREM ON THE LAST MULTIPLIER

E. I. Kugushev^a, T. V. Salnikova^a

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

To satisfy the conditions of Jacobi's theorem on the last multiplier, it is needed the existence of invariant measure and the presence of a sufficient number of independent first integrals. In this case, the system is locally integrated in quadratures. There are known the examples of systems in which it turned out that for the possibility of integration in quadratures it is sufficient the existence of partial first integrals. In this case, integration in quadratures occurs at the levels of partial first integrals.

In this paper, Jacobi's theorem on the last multiplier is extended to the general situation, when among the first integrals there are partial integrals.

Keywords: invariant measure, invariant sets, particular first integrals, integrability in quadratures

О ПОСТРОЕНИИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В СЛУЧАЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. Академик РАН В. Б. Бетелин^{1, *}, В. А. Галкин^{2, 3, **}

Поступило в редакцию 15.04.2024

После доработки 15.05.2024

Принято к публикации 08.07.2024

Задачи анализа и визуализации динамики вязкой несжимаемой жидкости в условиях сложной геометрии течений на основе традиционных сеточных и проекционных методов связаны с существенными требованиями к производительности ЭВМ для достижения поставленных целей. Для снижения вычислительной нагрузки при решении этого класса задач могут быть использованы алгоритмы построения искусственных нейронных сетей (ИНС), использующие в качестве обучающих наборов точные решения системы уравнений Навье–Стокса на заданном множестве пространственных областей. Реализована ИНС для построения течения в областях, являющихся алгебраическими комплексами, составленными из обучающих наборов стандартных осесимметричных областей (цилиндров, шаров и т.п.). Для снижения объёма вычислений в случае 3-D задач используются инвариантные многообразия течений, имеющие меньшую размерность. Это позволяет выявить детальную структуру решений. Установлено, что типичными инвариантными областями таких течений являются фигуры вращения, в частности, гомеоморфные тору, образующие структуру топологического расслоения, например, в шаре, цилиндре и в общих комплексах, составленных из таких фигур. Исследованы структуры течений, получающихся аппроксимацией простейшими 3-D вихревыми нестационарными потоками. Выделены классы точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}_3$ на основе суперпозиции вышеуказанных топологических расслоений. Сравнительные вычислительные эксперименты указывают на значительное ускорение выполнения вычислительной работы в случае использования предложенного класса ИНС, что позволяет использовать вычислительную технику с низкой производительностью.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, вихревые осесимметричные течения, несжимаемая жидкость, искусственные нейронные сети, аппроксимация решений

DOI: 10.31857/S2686954324030194, EDN: ZWTLMD

Общий подход, лежащий в основе построения ИНС, состоит в принятии гипотезы возможности создания устройства, которое можно обучить на серии примеров принятию решений. Эта размытая формулировка предполагает наличие некоторой связи между выбранными параметрами объектов $(x, y) \in X \times Y$, определяющей некоторое отношение $R \subset X \times Y$ (гипотетический

закон) [1]. Обычно предполагается, что R является функцией (т.е. каждому значению $x \in X$ соответствует ровно одно значение $y \in Y$), при этом аргументы X называются причинами, а множество значений Y — следствиями. Схематически ИНС является параллельной системой распределенной обработки информации в виде ориентированного графа, где вершины графа называются обрабатывающими элементами (искусственные нейроны), а связи между ними называются соединениями. Таким образом, ИНС представляет собой граф — систему узлов, соединённых связями и обменивающихся между собой входными–выходными данными (см., например, рис. 1).

Настройка ИНС (аналог процедуры автоматизированного программирования структуры ИНС) состоит в подборе семейства искусственных нейронов (преобразований, обозначаемых на рис. 1 значками $\odot_1, \odot_2, \dots, \odot_n$ в вершинах

¹ Федеральное государственное учреждение

“Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”

² Сургутский государственный университет

³ Федеральное государственное учреждение

“Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”,

Сургутский филиал

* E-mail: betelin@niisi.msk.ru

** E-mail: val-gal@yandex.ru

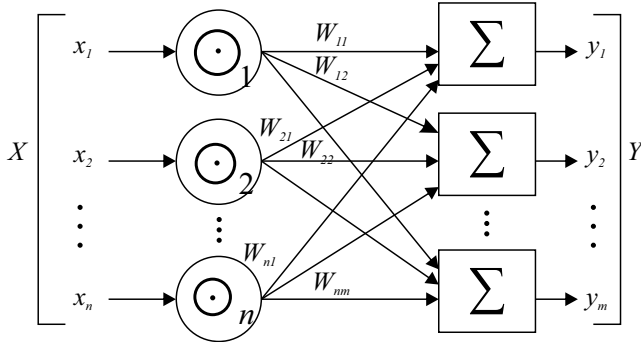


Рис. 1. Пример мнемосхемы структуры элементарной ячейки одного слоя ИНС.

графа) и коэффициентов $w_{i,j}$ умножения значений преобразованных величин вдоль линий соединения вершин на основе дополнительно декларируемых принципов (например, оптимизации). Набор обучающих примеров составляет заданное подмножество $\tilde{R} \subset R$, где отношение R априори неизвестно.

Процесс “обучения” является процедурой настройки весов w_k функций активации $\odot_k$ с целью уменьшения “расстояния” в некоторой заданной метрике между желаемыми (целевыми) и получаемыми векторами на выходе. В конечном счете — это решение задачи синтеза преобразования R , для которого на заданном множестве “обучающих” пар (x, y) выполняется соотношение $y = R(x)$. Отысканию подлежат веса w_k и функции активации $\odot_k$ относительно априори выбранной процедуры оптимизации для заданного функционала (метрики).

Ниже рассматривается реализация этого подхода для построения решений системы уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в случае осесимметричных пространственных областей течения. В частности, на этой базе можно рассматривать подход к построению приближенных решений системы Навье—Стокса для несжимаемой жидкости на основе серии точных решений [1]. Точные решения в заданном наборе областей течения являются в этом случае обучающим множеством для соответствующей ИНС. Вопросы декомпозиции области течения на элементарные подобласти с заданными в них гидродинамическими полями, используемых для аппроксимации решений системы уравнений Навье—Стокса, и соответственно, точности получаемых приближений, их эффективности в настоящее время является, по большей мере, областью инженерных вычислительных экспериментов.

Целью Y рассматриваемой в настоящей работе ИНС, схематически изображенной на рис. 1,

является построение решения V системы Навье—Стокса в заданной пространственной области течения $D \subset \mathbb{R}_n$, при значениях размерности $n = 1, 2, 3$.

Алгоритм работы ИНС состоит из следующих этапов:

а) Область пространственных аргументов $D \subset \mathbb{R}_n$, аппроксимируется алгебраическим комплексом подобластей $\{D_k\}$, в каждой из которых известно точное решение V_k системы Навье—Стокса. Совокупность $X = \{D_k\}_1^n$ образует набор входных параметров ИНС (подаваемым по стрелочкам в левой части на рис. 1).

б) Функции активации ИНС определяются соотношениями $\odot_k \stackrel{\text{def}}{=} V_k$.

в) Решение V на комплексе $D = \sum_k w_k D_k$ — выходная информация ИНС, обозначаемая на рис. 1 множеством Y , представляется в виде линейной комбинации

$$V = \sum_{k=1}^n w_k V_k,$$

где настроечные коэффициенты ИНС w_k определяются по входным данным (начальным и краевым условиям, которые аппроксимируются разложением по заданному набору элементарных решений V_k в метрике, “оптимальной” в некотором смысле для исследовательских целей в случае конкретной задачи для системы Навье—Стокса в области $D \subset \mathbb{R}_3$).

Вышеприведенный алгоритм функционирования ИНС основывается на следующих математически обоснованных построениях [2, 3].

В координатном пространстве $\mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$ рассматривается динамика во времени $t \in \mathbb{R}$ гладкого поля скоростей течения $V: \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_3$ ($V \in C^2$), удовлетворяющего системе Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \frac{1}{\rho} \nabla P(x, t) = G(x, t) + \varepsilon^2 \Delta V, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad (2)$$

где $P: \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — давление жидкости, ρ и ε^2 — постоянные, характеризующие плотность и вязкость жидкости, $G(x, t)$ — плотность объемных сил. В настоящей работе рассматривается класс решений $\{V, P\}$, обладающих свойством симметрии относительно некоторой оси L , которую без потери общности направим вдоль вектора $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$, $(\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3$ — ортонормированный базис

в $\mathbb{R}_3$). Проекцию вектора x на ось L обозначим в дальнейшем $z = (x, \bar{e}_3)$, положим $x_i = (x, \bar{e}_i)$. Предположение об осевой симметрии функции u относительно оси L означает, что ее зависимость от пространственных аргументов x_1, x_2 осуществляется через величину $\rho(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$. Для этого класса задач наряду с декартовыми координатами удобно использовать цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) . Для функции u , обладающей осевой симметрией, положим $u(x) \equiv \bar{u}(\rho, z)$, и в этом случае оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u(x) = \Delta_\rho \bar{u} + \bar{u}_{zz}, \quad \Delta_\rho \bar{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{u}_\rho).$$

Пусть множество $M = \mathbb{R}_3 \setminus L$ и функция $F \in C^4(M)$ при некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta F(x) + \lambda^2 F(x) = 0, \quad x \in M. \quad (3)$$

Определение. Предположим, что функция F удовлетворяет соотношению (3) при некотором $\lambda \neq 0$ и обладает на множестве M осевой симметрией: $F(x) \equiv \bar{F}(\rho, z)$. Назовем осесимметричным вихревым полем, порожденным функцией F на множестве M , отображение $U : M \rightarrow \mathbb{R}_3$, заданное соотношением

$$U(x) = \lambda^{-2} \rho^{-1} \left[\begin{aligned} &(\bar{F}_{\rho,z} x_1 + \lambda \bar{F}_\rho x_2) \bar{e}_1 + \\ &+ (-\lambda \bar{F}_\rho x_1 + \bar{F}_{\rho,z} x_2) \bar{e}_2 - (\rho \Delta_\rho \bar{F}) \bar{e}_3 \end{aligned} \right], \quad (4)$$

$$\rho = \rho(x_1, x_2), \quad x \in M.$$

Замечание 1. Отметим, что произвольные линейные комбинации осесимметричных полей вида (3), (4) сохраняют это свойство для результирующего поля.

Теорема 1. Пусть рассматривается произвольная линейная комбинация с коэффициентами $w_k \in \mathbb{R}$

$$U(x) = \sum_k w_k U_k(x), \quad (5)$$

осесимметричных полей $U_k(x)$, заданных формулами (3), (4) при помощи функций $F_k = \bar{F}_k(\rho, z)$, соответствующих в уравнении (3) фиксированному значению параметра $\lambda \neq 0$. Тогда инвариантные многообразия для динамической системы T_t , порожденной полем (4), удовлетворяют соотношению

$$\bar{\Phi}(\rho, z) \equiv \rho \sum_k w_k \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{F}_k(\rho, z) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Примеры решений системы (1), (2) с инвариантными многообразиями, имеющих форму

цилиндров, симметричных относительно оси L , дают векторные поля (4), соответствующие функциям F в соотношении (3), определенных формулами

$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \sum_k \left\{ A_k J_0(a_k \rho) \sin[b_k(z - z'_k)] + B_k J_0(c_k \rho) \cos[d_k(z - z''_k)] \right\}, \quad (7)$$

где J_0 — функция Бесселя, постоянные $A_k, B_k, a_k, b_k, c_k, d_k, z'_k, z''_k$ подчинены условию достаточно быстрой сходимости ряда (7), обеспечивающей его гладкость в классе $C^4(M)$ для выполнения дифференциальных операций в формулах (3), (7), и выполняются соотношения

$$a_k^2 + b_k^2 = \lambda^2, \quad c_k^2 + d_k^2 = \lambda^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0. \quad (8)$$

В силу замечания 1 линейные комбинации вышеупомянутых осесимметричных полей, определяемых формулами (6) и (7), позволяют рассматривать широкий класс бесконечно гладких решений системы (1), (2), имеющих структуру расслоения (6) на $\mathbb{R}_3$.

Множество векторных полей, порожденных функциями (4), (5), которые естественно называть цилиндрическими, можно расширить, добавив к ним линейные комбинации полей, порожденных функциями с особенностями на оси L :

$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \sum_k \left\{ A'_k N_0(a'_k \rho) \sin[b'_k(z - z'_k)] + B'_k N_0(c'_k \rho) \cos[d'_k(z - z''_k)] \right\}, \quad (9)$$

$$(a'_k)^2 + (b'_k)^2 = \lambda^2, \quad (c'_k)^2 + (d'_k)^2 = \lambda^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0, \quad (10)$$

где N_0 — функция Неймана. Требования к сходимости рядов (9), (10) аналогичны вышеупомянутому случаю рядов (7).

Расслоение $\mathbb{R}_3$ на инвариантные многообразия для решений системы (1), (2), порожденных приведенными выше функциями $F = \bar{F}(\rho, z)$, получается вращением вокруг оси L семейства многообразий

$$\begin{aligned} &\rho \sum_k \left\{ A_k J_1(a_k \rho) \sin[b_k(z - z'_k)] + \right. \\ &+ B_k J_1(c_k \rho) \cos[d_k(z - z''_k)] + \\ &+ A'_k N_1(a'_k \rho) \sin[b'_k(z - z'_k)] + \\ &+ B'_k N_1(c'_k \rho) \cos[d'_k(z - z''_k)] \left. \right\} = c, \end{aligned} \quad (11)$$

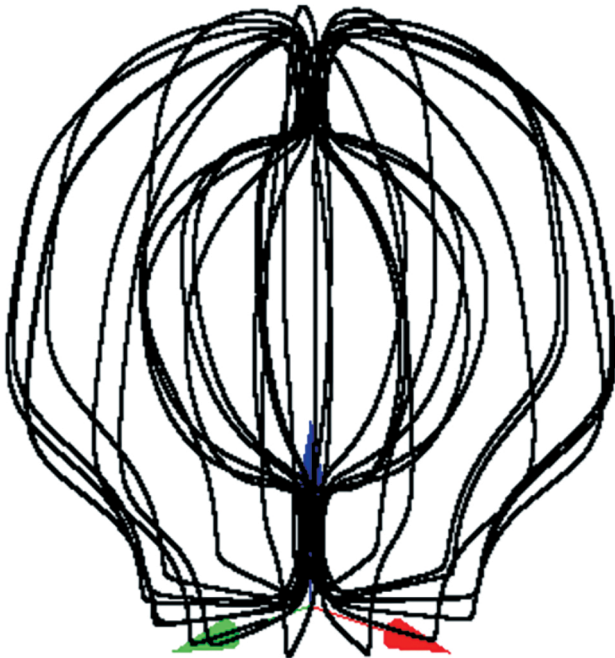


Рис. 2. Построение ИНС 3-D линий тока в изометрической пространственной проекции, полученных на комплексе из двух шаров с симметричным сдвигом центров вдоль вертикальной оси с коэффициентами смешивания $w_1 = 2, w_2 = -2$.

с произвольными постоянными $c \in \mathbb{R}$. Эти семейства естественным образом можно расширить за счет использования аналогичных комбинаций функций Бесселя и Неймана мнимого аргумента в сочетании с гиперболическими синусами и гиперболическими косинусами.

Отметим, что построенные таким образом течения являются касательными к многообразиям (11).

Замечание 2. Наличие вращательной симметрии относительно оси L для рассматриваемых гидродинамических течений позволяет выделить инвариантные компоненты, диффеоморфные торам, для решений в шаре и цилиндре [2, 3]. Более того, таким свойством обладают произвольные линейные комбинации этих решений при одинаковых значениях параметра $\lambda \neq 0$ в областях, составленных из шаров и цилиндров, для которых оси симметрии течений совпадают с L . Пример осевого сечения семейства инвариантных многообразий, диффеоморфных шарам и торам, для смеси решений в двух шарах из [2], с центрами, симметрично смещёнными по вертикали в точки $z = \pm 8$ (коэффициенты “смешивания” $w_1 = 2, w_2 = -2$, время построения визуализации траектории вязкого течения на ноутбуке “Acer” равно около 30 сек.) приведен ниже на рис. 2, 3.

Замечание 3. Сравнительные вычислительные эксперименты указывают на значительное

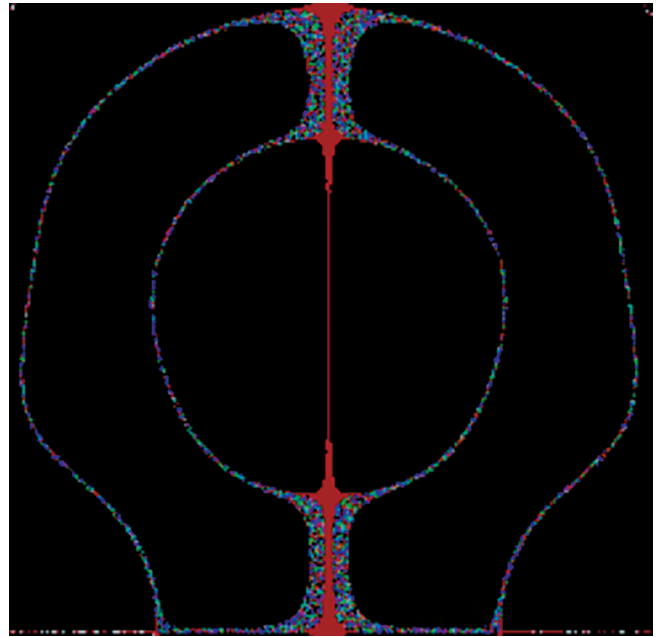


Рис. 3. Построение ИНС плоского осевого вертикального сечения линий тока на комплексе из двух шаров с симметричным сдвигом центров вдоль вертикальной оси с коэффициентами смешивания $w_1 = 2, w_2 = -2$.

ускорение выполнения вычислительной работы в случае использования предложенного класса ИНС, что позволяет использовать вычислительную технику с достаточно низкой производительностью (ноутбук).

Отметим, что важным моментом для исследований математической природы этого класса ИНС является отыскание связанных с ними топологических инвариантов (гомотопических групп) и отыскание условий эквивалентности структуры различных математических моделей, реализующих ИНС.

Следует подчеркнуть, что в некотором смысле наиболее адаптированной к технологии ИНС, разработанной и универсальной является теория вычислительных методов для линейных задач. Поэтому с этой точки зрения важными являются процедуры “погружения” нелинейных задач в общие классы линейных за счет изменения исходной размерности описания и расширения функциональных пространств [4].

Отмеченное выше погружение нелинейных систем в линейную динамику может быть универсальным образом реализовано в рамках концепции функциональных решений для квазилинейных систем на основе вложения Янга соболевских обобщенных решений в пространство линейных функционалов, снабженное тихоновской топологией [5, 6].

Заметим, что условие слабой устойчивости [5, 6] по своей природе значительно проще понятия

устойчивости в теории разностных схем для нелинейных задач, оно отражает “правильное” воспроизведение основных законов сохранения. Поэтому предложенный метод погружения нелинейных законов сохранения в линейные задачи на пространстве функциональных решений, снабжённом топологией А.Н. Тихонова, имеет универсальный вычислительный характер, реализуемый в рамках локально выпуклых ИНС, соответствующих мнемосхеме на рис. 1. Это обусловлено тем, что определение функционального решения естественным образом продолжается на минимальную выпуклую оболочку, содержащую функциональные решения для заданных начальных данных интегральной формы задачи Коши.

Таким образом, исследователь, используя предложенный класс ИНС, получает возможность быстрого и эффективного анализа структуры гидродинамических течений, включая их достаточно быструю визуализацию на вычислительной технике малой производительности.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2024-0001 “Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах” (1023032100070-3-1.2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями // Успехи кибернетики. 2021. Т. 2. № 4. С. 6–14. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2021-2-4-1>.
2. Galkin V.A. On a class of exact solutions to the incompressible Navier–Stokes system in a ball and a spherical layer // Comput. Math. Math. Phys. 2023. V. 63. P. 1064–1069. <https://doi.org/10.1134/s0965542523060088>
3. Galkin V.A., Dubovik A.O. On One Class of Exact Solutions of the Navier–Stokes System of Equations for an Incompressible Fluid // Math. Models and Comp. Simulations. 2023. V. 15. № 1. P. S78–S85. ISSN 2070-0482. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023. Галкин В.А., Дубовик А.О. Об одном классе точных решений системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. № 8. С. 3–13.
4. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Математические и вычислительные проблемы, связанные с образованием структур в сложных системах // Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14. Вып. 4. С. 805–815.
5. Галкин В.А. Теория функциональных решений квазилинейных систем законов сохранения // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 2000. Вып. 20. С. 81–120.
6. Galkin V.A. Background of mathematical models, based on conservation laws systems // Industrial Mathematics. New Delhi, India: Narosa Publishing House, 2006. P. 159–178.

ON THE CONSTRUCTION OF AN ARTIFICIAL NEURAL NETWORK FOR SOLVING A SYSTEM OF EQUATIONS NAVIER–STOKES IN THE CASE OF INCOMPRESSIBLE FLUID

Academician of the RAS V. B. Betelin^a, V. A. Galkin^{b,c}

^aScientific Research Institute for System Analysis

^bSurgut State University

^cSurgut Branch of SRISA

The tasks of analyzing and visualizing the dynamics of a viscous incompressible fluid in conditions of complex flow geometry based on traditional grid and projection methods are associated with significant requirements for computer performance to achieve the set goals. To reduce the computational load in solving this class of problems, algorithms for constructing artificial neural networks (ANNs) can be used, using exact solutions of the Navier–Stokes equation system on a given set of spatial regions as training sets. An ANN is implemented to construct flows in areas that are complexes made up of training sets of standard axisymmetric regions (cylinders, balls, etc.). To reduce the amount of calculations in the case of 3-D problems, invariant flow manifolds with smaller dimensions are used. This allows you to identify the detailed structure of solutions. It is established that the typical invariant regions of such flows are rotation figures, in particular, homeomorphic torus, forming the structure of a topological bundle, for example, in a ball, a cylinder and in general complexes composed of such figures. The structures of the flows obtained by approximation by the simplest 3-D vortex unsteady flows are investigated. Classes of exact solutions of the Navier–Stokes system for an incompressible fluid in bounded regions of space based on the superposition of the above topological bundles are distinguished. Comparative computational experiments indicate a significant acceleration of computational work in the case of using the proposed class of ANNs, which allows the use of computing equipment with low performance.

Keywords: Navier–Stokes equations, vortex axisymmetric flows, incompressible fluid, artificial neural networks, approximation of solutions

СПОСОБЫ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖУЩИМСЯ В $\mathbb{R}^3$ ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ ЕГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

© 2024 г. Академик РАН В. И. Бердышев^{1, *}

Поступило 14.06.2024 г.
После доработки 08.07.2024 г.
Принято к публикации 08.07.2024 г.

Предлагаются способы действия наблюдателя f при слежении за объектом t , движущимся в $\mathbb{R}^3$ по кратчайшей траектории $\mathcal{T}$, огибающей набор $\{G_i\}$ выпуклых множеств. Объект имеет скоростные мини-объекты, представляющие опасность для наблюдателя. Способы наблюдения зависят от геометрических свойств множеств G_i и траектории $\mathcal{T}$. Задача наблюдателя — отследить движение объекта на возможно большей части траектории $\mathcal{T}$.

Ключевые слова: навигация, движущийся объект, наблюдатель, локатор, видеоискатель, кратчайшая траектория

DOI: 10.31857/S2686954324030205, **EDN:** ZWOYDI

1. Траектория $\mathcal{T}$ движущегося объекта t огибает набор выпуклых множеств G_i с непустой внутренностью, соединяет пару точек t_0, t^0 , лежащих вне $\cup G_i$ и является кратчайшей в классе таких кривых.

Она состоит из дуг Λ_i и отрезков Δ_i (рис. 1)

$$\Lambda_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i}, \quad \Delta_i = [\bar{t}_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, \dots, n),$$

соединяющих эти дуги. Длина дуги обозначается через $|\cdot|$.

Объект движется с постоянной по величине скоростью v_t . Он обладает набором автономных мини-объектов m , способных двигаться прямолинейно с постоянной скоростью v_m , видя перед собой наблюдателя. Далее предполагается, что объект имеет возможность запустить очередной мини-объект только через промежуток времени τ , больший, чем заданный $\tau_m > 0$. Наблюдатель изображается шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса $\varepsilon \geq 0$ с локатором f в центре. Скорость v_f наблюдателя ограничена константой $K > 0$, при этом $|v_t| < |v_f| \leq K < |v_m|$. Попадание мини-объекта в открытый шар $V_\varepsilon(f)$ означает гибель наблюдателя. Задача наблюдателя — отследить лучом локатора движение объекта на возможно большей части траектории $\mathcal{T}$. Далее будем использовать обозначения

$$l(t)^+ = \{t + \eta \vec{v}(t) : \eta > 0\},$$

$$\text{где } \vec{v}(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow +0} \frac{t(\tau + \Delta\tau) - t(\tau)}{\Delta\tau} \quad (1)$$

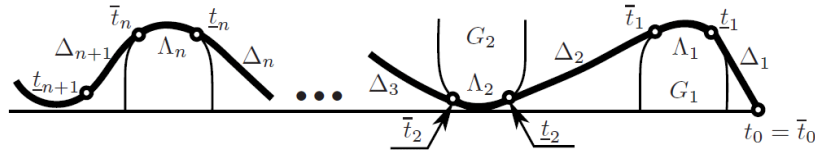
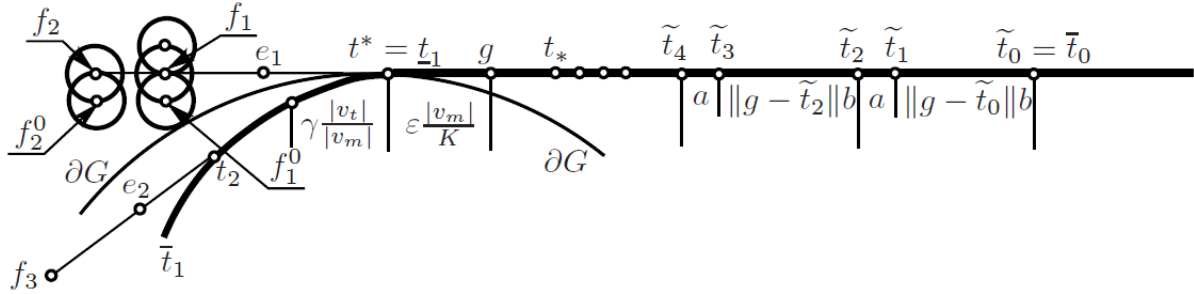
— вектор скорости объекта в точке $t \in \mathcal{T}$, $l = l(t)$ — вектор, касательный к ∂G в точке $t \in \partial G$, $l \cap \overset{\circ}{G} = \emptyset$: если $q \in l$ и $q \rightarrow t$, то $\rho(q, G) = o(\|q - t\|)$, где ρ — расстояние. Для луча $l(t)$, касательного к ∂G в точке t , числа $r > 0$ и точки $f \in l(t)$ обозначим через $T = T(t, f, r)$ тор, полученный вращением вокруг луча $l(t)$ шара радиуса r , касающегося луча $l(t)$ в точке f .

2. Рассмотрим задачу слежения за объектом на дуге, образованной первой парой $[t_0, t_1] \cup \bar{t}_1, t_1$ (рис. 2). Указанная дуга является кратчайшей дугой на множестве $G^* = \text{conv}(t_0 \cup G)$, соединяющей точки t_0 и $\bar{t}_1$, где $\text{conv}(\cdot)$ — выпуклая оболочка множества $(\cdot)$, $G = G_1$.

Пусть $[\bar{t}_0, t^*] \subset \mathcal{T}$ — максимальный прямолинейный отрезок траектории $\mathcal{T}$, содержащий точку t_1 (рис. 2). Из теоремы 7 [4] следует, что t_1 либо гладкая точка на ∂G^* , либо она лежит на ребре поверхности ∂G^* , которое пересекается с $\mathcal{T}$ трансверсально. В первом случае, в соответствии с теоремой Бернулли (см. [5]), главная нормаль траектории $\mathcal{T}$ в точке t_1 есть нормаль к поверхности ∂G^* в точке t_1 , и плоскость $R = R(t_1)$, содержащая эту нормаль и касательную, является соприкасающейся для траектории $\mathcal{T}$ в точке t_1 . Переобозначим $t_1 = t_1$.

¹ Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

*E-mail: bvi@imm.uran.ru

Рис. 1. Жирной линией изображена траектория T .Рис. 2. Жирной линией изображена траектория T , тонкой – круги радиуса ε и граница ∂G .

Во втором случае R – плоскость, содержащая векторы $l^\pm(t_1)$. Ясно, что в окрестности точки t_1 кривые T и $\partial G^* \cap R$ близки: для $t \in T$ имеем $\rho(t, \partial G^* \cap R) = o(\|t - t_1\|)$. Обозначим через f_1 точку на луче $l^+(\bar{t}_0)$, ближайшую к t_1 среди точек $f \in l^+(t_1)$, для которых (см. рис. 2)

$$T(t_1, f, \varepsilon) \cap \overset{\circ}{G} = \emptyset. \quad (2)$$

Далее $R^+ \subset R(t_1)$ – полуплоскость, граница которой содержит вектор $l^+(\bar{t}_0)$ и которая содержит ортогональную проекцию на R дуги $T \cap V_\varepsilon(t_1)$. Найдем шар $V_\varepsilon(f_1^0) \subset T(t_1, f_1, \varepsilon)$, для которого $f_1^0 \in R^+(t_1)$.

Сформулируем (пошаговый) алгоритм слежения за объектом t , движущимся по отрезку $[\bar{t}_0, g]$. Будем обозначать $\bar{t}_0 = \bar{t}_0$. Пусть

$$\|t_1 - \bar{t}_0\| \geq \frac{\varepsilon |v_m|}{K},$$

точка $g \in [t^*, \bar{t}_0]$ такова, что

$$\|t_1 - g\| = \frac{\varepsilon |v_m|}{K}.$$

Исходная позиция наблюдателя – точка f_1 . Обнаружив наблюдателя, объект t и мини-объект m стартуют из точки $\bar{t}_0$ по отрезку $[\bar{t}_0, g]$, а наблюдатель следит за t из точки f_1 . Заметим, что для перехода из точки f_1 в точку f_1^0 на скорости K наблюдателю требуется время ε/K , за которое мини-объект пройдет расстояние $(\varepsilon |v_m|)/K$. Мини-объект, находясь на отрезке $[\bar{t}_0, t_1)$, видит фрагмент шара $V_\varepsilon(f)$, когда

$f \in [f_1, f_1^0)$. В момент прибытия мини-объекта m в точку g наблюдатель начинает движение со скоростью K из точки f_1 в точку f_1^0 , а мини-объект движется далее к t_1 . Наблюдатель занимает позицию $V_\varepsilon(f_1^0)$, и одновременно мини-объект – позицию t_1 , из которой шар $\overset{\circ}{V}(f_1^0)$ уже не виден, и мини-объект прекращает преследование. Наблюдатель следил за t с позиции f_1 , пока m двигался от $\bar{t}_0$ до точки g , потратив время $\|\bar{t}_0 - g\| (1/|v_m|)$. Наблюдателю удалось отследить движение объекта на участке траектории от $\bar{t}_0$ длины

$$\left(\|\bar{t}_0 - t_1\| - \varepsilon \frac{|v_m|}{K} \right) \frac{|v_t|}{|v_m|}.$$

Точку на отрезке $[g, \bar{t}_0]$, отстоящую на указанную величину от точки $\bar{t}_0$, обозначим через $\tilde{t}_1$ и

$$a = 2\varepsilon \left(\frac{|v_t|}{K} \right), \quad b = \frac{|v_t|}{|v_m|}.$$

В завершении первого шага наблюдатель возвращается в позицию f_1 , потратив на визит в точку f_1 и обратно время $2\varepsilon/K$, за которое объект преодолевает расстояние до точки $\tilde{t}_2$ такой, что

$$\|\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1\| = 2\varepsilon \frac{|v_t|}{K}.$$

Участок $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$ объект преодолел под наблюдением за время $\|\bar{t}_0 - g\| / |v_m|$, участок $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ – вне наблюдения за время $2\varepsilon/K$. На первом шаге алгоритма построены два отрезка $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1], [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$. Следующие шаги выполняются аналогично. На k -м шаге строится пара отрезков

$$\{\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}\} \cup [t_{2k+1}, t_{2(k+1)}] \subset [\tilde{t}_0, g]. \quad (3)$$

Движение объекта по первому отрезку пары контролируется наблюдателем, движение по второму выполняется вне наблюдения. При этом

$$\begin{aligned} \|\tilde{t}_{2k+1} - \tilde{t}_{2k}\| &= \|\tilde{t}_{2k} - g\| \frac{|v_t|}{|v_m|}, \\ \|\tilde{t}_{2k} - \tilde{t}_{2k-1}\| &= 2\varepsilon \frac{|v_t|}{K}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $[t_{2k+1}, t_{2k}] \subset [g, \tilde{t}_0]$ – ближайший к точке g контролируемый отрезок. Обозначим $t_* = \tilde{t}_{2k+1}$ (рис. 2). Изложенный способ наблюдения будем обозначать цифрой I. Его эффективность зависит от величин ε и $|v_m|$. Он не позволяет отследить движение объекта на отрезке $[t^*, g]$. В самом деле, допустив, что $t \in [f_1, g]$ и t виден с позиции f_1 , мы позволяем объекту посредством мини-объекта уничтожить наблюдателя, который не успевает укрыться в позиции $V_\varepsilon(f_1^0)$.

3. Задача слежения за движением на дуге
 $\Lambda = \widehat{t_1, t_1}$ усложняется при наличии длинных участков, близких к прямолинейным. Выпуклая поверхность ∂G называется строго выпуклой, если она не содержит прямолинейных отрезков. Для определения "степени" выпуклости ограниченного телесного множества в $\mathbb{R}^3$ введем характеристику $C(d)$, близкую к известному понятию модуля выпуклости (см. J. A. Clarkson [3]). Пусть $t \in \partial G$ и $l = l(t)$ – касательный к ∂G вектор в точке t , $f \in l, f \neq t$, P_f – ортогональная лучу l плоскость, $f \in P_f$, $r > 0$, $T = T(t, f, r)$ – тор, определенный в п. 1 (см. также (2)),

$$\left. \begin{aligned} P(t, f) &= \sup\{r : T(t, f, r) \cap G = \\ &= \emptyset, P_f \cap G \neq \emptyset\}, \\ C(d) &= C(G, d) = \inf\{P(t, f) : \|t - f\| \geq \\ &\geq d, t \in \Lambda, f \in l(t)\}, 0 < d < |\Lambda| \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Для построения алгоритма слежения за объектом, движущимся по дуге $\Lambda \subset T$, надо знать, что в d -окрестности $\{V_d(t) : t \in \Lambda\}$ дуги нет телесных множеств кроме $\cup_i G_i$, и часть поверхности ∂G , попавшая в указанную d -окрестность, является строго выпуклой. Далее d таково, что $C(d) > \varepsilon$.

Предлагаемый далее пошаговый способ II слежения за объектом (шаги 2, 3, ...), движущимся по дуге $\Lambda = \widehat{t_1, t_1} \subset \partial G$, позволяет отследить движение объекта на коротких участках (см. (7)) траектории.

По завершению алгоритма I, приступая к выполнению шага 1 алгоритма II слежения за объектом на дуге t_1, t_1 , имеем: объект t находится в позиции $t_* = t_{2k+1}$, определим позицию $V_\varepsilon(f_2)$ наблюдателя $f_2 \in l^+(t_1)$ (где $t_1 = t_1$) так, что

$$\begin{aligned} T(t_1, f_2, \varepsilon) \cap G &= \emptyset, \\ d = \|f_2 - t_1\| &= \gamma + \frac{\varepsilon |v_m|}{K}, \\ \text{где } \gamma &= \tau_m |v_m|, \end{aligned} \quad (6)$$

τ_m – заданный минимальный временной промежуток между очередными пусками мини-объектов, точка $e_1 \in [f_2, t_1]$ такова, что $\|e_1 - t_1\| = \gamma$. Определим шар $V_\varepsilon(f_2^0)$ из тора $T(t_1, f_2, \varepsilon)$, для которого $f_2^0 \in R^+(t_1)$, и точку $t_2 \in T$, ближайшую к точке f_2^0 .

Наблюдатель в позиции f_2 ждет прибытия объекта в точку t_1 .

В момент прибытия объекта в точку t_1 наблюдатель включает локатор, мини-объект стартует из точки t_1 по лучу $l^+(t_1)$, а объект продолжает движение по T . Наблюдатель следит за объектом с позиции f_2 в течение времени $\gamma / |v_m|$ – до прибытия мини-объекта из точки t_1 в точку e_1 . За это время объект проходит расстояние

$$\gamma \cdot \frac{|v_t|}{|v_m|}, \quad (7)$$

начиная с точки t_1 , но, ввиду неравенства $\gamma \leq \tau_m |v_m|$, он не может запустить мини-объект в сторону наблюдателя. Затем наблюдатель на скорости K перемещается из точки f_2 в точку f_2^0 (см. рис. 2). Мини-объект за это время проходит от точки e_1 по лучу $l(t_0)$ расстояние $\varepsilon |v_m| / K$, касается уже занявшего позицию $V_\varepsilon(f_2^0)$ наблюдателя, не разрушая его. Итак, объект на первом шаге проходит расстояние

$$\|t^* - f_2\| \frac{|v_t|}{|v_m|},$$

при этом начальный участок длины (7) преодолевается под наблюдением.

На шаге $n = 2$ в точке $t_2 \in T$, ближайшей к f_2^0 , строится касательный луч $l^+(t_2)$ и определяется точка $f_3 \in l^+(t_2)$, для которой

$$\begin{aligned} d = \|f_3 - t_2\| &= \gamma + \varepsilon \frac{|v_m|}{K}, \\ \gamma &= \|e_2 - t_2\|, \quad e_2 \in [t_2, f_3]. \end{aligned}$$

Среди шаров, образующих тор $T(t_2, f_3, \varepsilon)$, найдем шар $V_\varepsilon(f_3^0)$, для которого $f_3^0 \in R^+(t_2)$, и точку $t_3 \in T$, ближайшую к f_3^0 . Максимальная скорость K наблюдателя должна обеспечить ему возможность пройти расстояние $\|f_2^0 - f_3\|$ быстрее, чем объект проходит дугу $\widehat{t_1, t_2}$. Например, когда

$$\frac{\|f_2^0 - t\|_2 + d}{K} \leq \frac{\|t_2 - t_1\|}{|v_t|}.$$

Наблюдатель, находясь в позиции f_3 , ждет прибытия объекта в точку t_2 , затем включает локатор и, повторяя действия, выполненные на первом шаге, отслеживает движение объекта на участке траектории длины (7), начиная от t_2 , и переходит в позицию f_3^0 , и т. д.

Далее объект переходит на прямолинейный отрезок $[t_1, t_2]$. Пусть $t_n \in t_1, t_1$ и $\{t_n, f_{n+1}\}$ — последняя пара, удовлетворяющая условиям алгоритма II, тогда точка $t_{n+1} \in T$, ближайшая к f_{n+1}^0 , лежит на отрезке $[\bar{t}_1, t_2]$ (см. рис. 3). Движение объекта на отрезке $[\bar{t}_1, t_2]$, соединяющем G_1 и G_2 , будет контролироваться посредством алгоритма I. По завершению алгоритма II, объект занимает позицию t_n , а наблюдатель — f_{n+1} . По аналогии с предыдущим случаем (см. рис. 2) исходной позицией наблюдателя назначается точка $f_{n+2} \in l^+(\bar{t}_1)$. В начальной стадии алгоритма I объект движется по T от точки t_n , а наблюдатель — на максимальной скорости с позиции $V_\varepsilon(f_{n+1}^0)$ в позицию $V_\varepsilon(f_{n+2}^0)$. В этой позиции наблюдатель либо ждет прибытия объекта в точку $\bar{t}_1$, если еще $t \in t_n, \bar{t}_1$, либо включает радар, вызывая на себя мини-объект, если уже $t \in [t_1, t_2]$, и т. д.

Замечание. Из теоремы 7 [1] следует, что множество гладких точек кратчайшей траектории T всюду плотно на ней, поэтому на каждом шаге i , вместо ближайшей к f_i^0 точки t_i из T , можно взять близкую гладкую точку из T .

Теорема. Пусть для каждого i :

$$- |\Delta_i| > \frac{\varepsilon |v_m|}{K} = \|t_i - g_i\|, g_i \in \Delta_i,$$

— существует $d, 0 < d < |\Delta_i|$ такое, что d — окрестность $\{V_d(t) : t \in \Delta_i\} \cap \partial G_i$ является строго выпуклой поверхностью и $C(G_i, d) \geq \varepsilon$ (см. (5)).

Способ I наблюдения за движущимся по отрезку $[t_{i-1}, g_i]$ объектом t позволяет построить последовательность пар отрезков

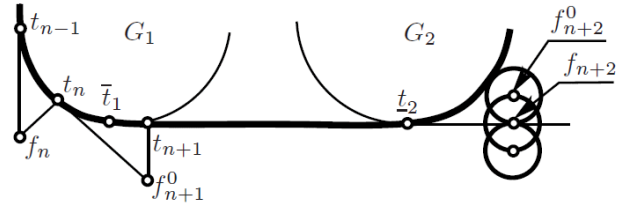


Рис. 3. Жирной линией изображена траектория T , окружности тора — тонкой.

$$\{[\tilde{t}_{2k}, \tilde{t}_{2k+1}] \cup [\tilde{t}_{2k+1}, \tilde{t}_{2(k+1)}], k = 0, \dots\} \subset [\bar{t}_i, g_i],$$

движение по первому (ближнему к $\bar{t}_i$) отрезку каждой пары контролируется наблюдателем, а движение по второму отрезку происходит вне наблюдения; длины отрезков приведены в (4).

Способ II позволяет последовательно построить набор троек

$$\{t_n \in \Delta_i, f_{n+1} \in l^+(t_n), f_{n+1}^0\}_n,$$

где t_{n+1} — ближайшая к f_{n+1}^0 точка из Δ_i , $\|f_{n+1} - f_{n+1}^0\| = \varepsilon$, и наблюдатель, двигаясь по отрезку $[f_{n+1}, f_{n+1}^0]$, контролирует движение объекта на участке длины $\gamma |v_t| / |v_m|$ (см. (6), (7)), принадлежащем дуге Δ_i .

В частном случае $\varepsilon = 0$ наблюдатель может получить изображение объекта t на сколь угодно большой сетке $\{t_n \in \Delta\}$. Имеет место

Следствие. Пусть поверхность ∂G в окрестности дуги $\Delta \subset T \subset \partial G$ является строго выпуклой, наблюдатель f изображается точкой, т. е. $\varepsilon = 0$; $K > 2 |v_t|$ и задано число $\delta, 0 < \delta < |\Delta|$. Способ II позволяет построить набор пар $\{t_n \in \Delta, f_{n+1} \in l^+(t_n)\}_{n=1, \dots}$ таких, что точка t_n — ближайшая к f_n на T и $|\widehat{t_n, t_{n+1}}| \leq \delta$. Наблюдатель f_{n+1} снимает информацию, касающуюся объекта в точке $t = t_n$, и уходит к точке t_{n+1} , избегая встречи с мини-объектом, стартовавшим с позиции t_n в сторону точки f_{n+1} .

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.Б. Костоусову за обсуждение тематики исследования.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Милка А.Д.* Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях // Мат. заметки. 1984. Т. 35. Вып. 4. С. 617–635.
2. *Люстерник Л.А.* Геодезические линии. М.—Л.: Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 1940. 50 с.
3. *Clarcson J.A.* Uniformly convex spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 396–414.

METHODS FOR OBSERVING AN OBJECT MOVING IN $\mathbb{R}^3$ UNDER CONDITIONS OF ITS OPPOSITION

Academician of the RAS **V. I. Berdyshev^a**

^a*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

We propose ways of action of the observer f when tracking an object t moving in $\mathbb{R}^3$ along the shortest trajectory $\mathcal{T}$ enveloping the set $\{G_i\}$ of convex sets. The object has velocity mini-objects that pose a hazard to the observer. The means of observation depend on the geometric properties of the sets G_i and the trajectory $\mathcal{T}$. The observer's task – to track the motion of the object over as much of the $\mathcal{T}$ trajectory as possible.

Keywords: navigation, moving object, observer, locator, viewfinder