



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 514, 2023

МАТЕМАТИКА

Функция условной стоимости и необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом

С. М. Асеев 5

Динамика систем с односторонними дифференциальными связями

Т. В. Сальникова, Е. И. Кугушев, А. А. Демидов 12

Алгоритм вычисления верхних границ для задачи конкурентного размещения в условиях неопределенности спроса

В. Л. Береснев, А. А. Мельников 20

Регуляризованные уравнения динамики гетерогенных бинарных смесей “сжатых” газов Ноубла-Абея и их применение

А. А. Злотник, Т. А. Ломоносов 26

Оценка устойчивости в задаче об источнике для уравнения переноса излучения

В. Г. Романов 34

О промежуточных асимптотиках Баренблатта–Зельдовича

В. А. Костин, Д. В. Костин, А. В. Костин 39

Оценка вырождения тетраэдра в тетраэдральном разбиении трехмерного пространства

Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин 44

Об аппроксимации граничных условий повышенного порядка в сеточно-характеристических схемах

И. Б. Петров, В. И. Голубев, А. В. Шевченко, И. С. Никитин 52

Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах

Е. В. Винников, А. А. Давыдов, Д. В. Туницкий 59

Существование и релаксация решений дифференциальных включений с максимально монотонными операторами и возмущениями

А. А. Толстоногов 65

О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна-Маккри и о точках Лагранжа

В. В. Веденяпин, А. А. Бай, А. Г. Петров 69

Связность локусов Прима в роде 5

М. Ненашева 74

Операторная группа, порожденная одномерной системой Дирака

А. М. Савчук, И. В. Садовничая 79

Цифровая стабилизация переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями <i>А. В. Ильин, А. С. Фурсов</i>	82
Приближенные алгоритмы с фиксированными оценками точности для серии асимметричных задач маршрутизации <i>Е. Д. Незнахина, Ю. Ю. Огородников, К. В. Рыженко, М. Ю. Хачай</i>	89
Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией <i>М. В. Шамолин</i>	98
Многомерные кубатуры со сверхстепенной сходимостью <i>А. А. Белов, М. А. Тинтул</i>	107
Численно-статистическое исследование суперэкспоненциального роста среднего потока частиц, размножающихся в однородной случайной среде <i>Г. А. Михайлов, Г. З. Лотова</i>	112
Неравенство Бернштейна для производной Рисса дробного порядка, меньшего единицы, целых функций экспоненциального типа <i>А. О. Леонтьева</i>	118
Об аналогах теорем Эрбрана и Харропа для совместной логики задач и высказываний QHC <i>А. А. Оноприенко</i>	123

ИНФОРМАТИКА

Математическое моделирование переноса плазмы в винтовом магнитном поле <i>Г. Г. Лазарева, И. П. Оксогоева, А. В. Судников</i>	129
--	-----

CONTENTS

Volume 514, 2023

MATHEMATICS

Conditional Cost Function and Necessary Optimality Conditions
for Infinite Horizon Optimal Control Problems

S. M. Aseev 5

Dynamics of Systems with One-Sided Differential Constraints

T. V. Salnikova, E. I. Kugushev, and A. A. Demidov 12

Upper Bound for the Competitive Facility Location Problem with Demand Uncertainty

V. L. Beresnev, A. A. Melnikov 20

Regularized Equations for Dynamics of the Heterogeneous Binary Mixtures
of the Noble-Abel Stiffened-Gases and Their Application

A. A. Zlotnik and T. A. Lomonosov 26

A Stability Estimate in the Source Problem for the Radiative Transfer Equation

V. G. Romanov 34

On Intermediate Barenblatt-Zeldovich Asymptotics

V. A. Kostin, D. V. Kostin, and A. V. Kostin 39

Degeneration Estimation of a Tetrahedral in a Tetrahedral Partition of the Three-Dimensional Space

Yu. A. Kriksina and V. F. Tishkin 44

About the Boundary Condition Approximation in the Higher-Order Grid-Characteristic Schemes

I. B. Petrov, V. I. Golubev, A. V. Shevchenko, and I. S. Nikitin 52

Existence of Maximum of Time Averaged Harvesting in the KPP-Model on Sphere
with Permanent and Impulse Collection

E. V. Vinnikov, A. A. Davydov, and D. V. Tunitsky 59

Existence and Relaxation of Solutions for a Differential Inclusion
with Maximal Monotone Operators and Perturbations

A. A. Tolstonogov 65

On derivation of Equations of Gravitation from the Principle of Least Action,
Relativistic Milne-McCree Solutions and Lagrange Points

V. V. Vedenyapin, A. A. Bay, and A. G. Petrov 69

Connectivity of Prima Loci in Genus 5

M. S. Nenasheva 74

Operator Group Generated by a One-Dimensional Dirac System

A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya 79

Digital Stabilization of a Switchable Linear System with Commensurate Delays <i>A. V. Ilin and A. S. Fursov</i>	82
Approximation Algorithms with Constant Factors for a Series of Asymmetric Routing Problems <i>E. D. Neznakhina, Yu. Yu. Ogorodnikov, K. V. Rizhenko, and M. Yu. Khachay</i>	89
Invariants of Five-Order Homogeneous Dynamical Systems with Dissipation <i>M. V. Shamolin</i>	98
Multidimensional Cubatures with Superpower Convergence <i>A. A. Belov and M. A. Tintul</i>	107
Numerical-Statistical Investigation of Superexponential Growth of the Mean Particle Flux with Multiplication in a Homogeneous Random Medium <i>G. A. Mikhailov and G. Z. Lotova</i>	112
Bernstein Inequality for Riesz Derivative of Fractional Order Less Than 1 of Entire Function of Exponential Type <i>A. O. Leont'eva</i>	118
On Analogues of Herbrand's and Harrop's Theorems for the Joint Logic of Problems and Propositions QHC <i>A. A. Onoprienko</i>	123

COMPUTER SCIENCE

Mathematical Model of Plasma Transfer in a Helical Magnetic Field <i>G. G. Lazareva, I. P. Oksogoeva, and A. V. Sudnikov</i>	129
---	-----

УДК 517.977

ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН С. М. Асеев^{1,2,*}

Поступило 17.08.2023 г.

После доработки 07.09.2023 г.

Принято к публикации 24.10.2023 г.

Задача оптимального управления на бесконечном интервале времени с общими концевыми ограничениями сводится к семейству стандартных задач на конечных интервалах, содержащих величину условной стоимости фазового вектора в качестве терминального члена. При помощи развитого подхода для задачи с общим асимптотическим концевым ограничением получен новый вариант принципа максимума Понтрягина, содержащий явное описание сопряженной переменной. В случае задачи со свободным правым концом данный подход приводит к варианту принципа максимума в нормальной форме, сформулированному полностью в терминах функции условной стоимости.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, асимптотическое концевое ограничение, функция условной стоимости, принцип максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S2686954323700315, **EDN:** DDVDRJ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы непустое выпуклое открытое множество G из $\mathbb{R}^n$, непустые замкнутые множества $M_0 \subset G$ и $M_\infty \subset \mathbb{R}^n$, функции

$$f : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ f^0 : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$$

и многозначное отображение $U : [0, \infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ с непустыми значениями.

Предполагается, что при п.в. $t \in [0, \infty)$ производные $f_x(t, x, u)$ и $f_x^0(t, x, u)$ существуют для всех $(x, u) \in G \times \mathbb{R}^m$, а функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ измеримы по Лебегу-Борелю (LB -измеримы) по (t, u) для любого $x \in G$ (см. [1, Definition 6.33]) и непрерывны по x при п.в. $t \in [0, \infty)$ и всех $u \in \mathbb{R}^m$. График многозначного отображения $U(\cdot)$, т.е. множество $\text{graph } U(\cdot) = \{(t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m : u \in U(t)\}$, предполагается LB -измеримым множеством в

$\mathbb{R}^{m+1}$. Относительно функции $\varphi(\cdot)$ предполагается, что она локально липшицева.

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2)$$

$$u(t) \in U(t), \quad (3)$$

$$x(0) \in M_0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), M_\infty) = 0. \quad (4)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ – значения фазового вектора и вектора управления соответственно в момент времени $t \geq 0$, а $\rho(a, M) = \min_{\xi \in M} \|a - \xi\|$ – расстояние от точки $a \in \mathbb{R}^n$ до непустого замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Измеримую по Лебегу функцию $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющую при всех $t \geq 0$ включению (3), будем называть *управлением*. Для заданного управления $u(\cdot)$ соответствующая ему *траектория* $x(\cdot)$ определяется, как локально абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения (2), определенное в G на некотором конечном или бесконечном интервале времени $[0, \tau)$, $\tau > 0$ (если такое решение существует). Пару

¹Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: aseev@mi-ras.ru

$(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему траектория, будем называть *процессом*, если траектория $x(\cdot)$ определена в G на всем бесконечном интервале времени $[0, \infty)$. Процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть *допустимым* в (P) , если для траектории $x(\cdot)$ выполняются концевые ограничения (4), а функция $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ локально интегрируема на $[0, \infty)$.

Оптимальность допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем понимать в смысле слабо обгоняющей оптимальности (см. [4]). Именно, допустимый процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть *слабо обгоняюще оптимальным* (или просто *слабо обгоняющим*) в задаче (P) , если для любого другого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \Phi(x_*(0)) - \Phi(x(0)) + \\ & + \limsup_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt - \right. \\ & \left. - \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в общем случае слабо обгоняющая оптимальность допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ не подразумевает сходимость несобственного интеграла в (1). Однако, даже в случае, когда несобственный интеграл в (1) сходится для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, понятие слабо обгоняющей оптимальности слабее стандартного понятия сильной оптимальности [4].

Задачи оптимального управления вида (P) естественно возникают в экономике при исследовании процессов роста. Впервые задача оптимизации экономического роста, как вариационная задача максимизации интегрального функционала на бесконечном интервале времени (с бесконечным горизонтом), была рассмотрена в известной работе Рамсея [2]. Данной тематике посвящена обширная литература (см. [3–5]). В настоящее время рассмотрение моделей экономического роста в виде задач оптимального управления с бесконечным горизонтом является стандартным подходом в экономике (см. [6, 7]).

Основная сложность исследования задачи (P) связана с бесконечным интервалом планирования, на котором рассматривается процесс управления системой. Бесконечный интервал планирования вносит в задачу особенность, что является источником различных патологий в соотношениях принципа максимума Понтрягина для таких задач (подробнее см. [3, 8]). Асимптотическое концевое ограничение в (4) вносит в задачу дополнительные трудности. Заметим, что данное ограничение не предполагает, вообще говоря, су-

ществования предела у траектории $x(\cdot)$ на бесконечности. В моделях экономического роста выполнение асимптотических условий такого типа может рассматриваться как минимальное необходимое условие *устойчивого развития* (см. [9, 10]).

Для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ (не обязательно допустимого) будем использовать следующее *ослабленное условие регулярности* (см. [1, 3, 11]).

(A1) Существуют такие непрерывная функция $\gamma : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ и локально интегрируемая функция $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, что $\{x : \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$ для всех $t \geq 0$ и для п.в. $t \in [0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{\{x : \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}} \{ \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| + \\ & + \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| \} \leq v(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть (см. [11]), что выполнение условия (A1) обеспечивает применимость к задаче Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \quad x(\tau) = \xi \quad (5)$$

стандартных теорем на конечных интервалах времени о существовании и непрерывной зависимости решения $x(\tau, \xi; \cdot)$ от начальных данных (τ, ξ) (см. [12], § 2.5.5, теорема 1), а также о дифференцируемости решения $x(\tau, \xi; \cdot)$ по начальному значению ξ для всех $\tau \geq 0$ (см. [12], § 2.5.6). В дальнейшем для краткости в случае $\tau = 0$ первый аргумент в записи $x(0, \xi; \cdot)$ будет иногда опускаться и вместо $x(0, \xi; \cdot)$ будем писать просто $x(\xi; \cdot)$.

Следующее условие роста для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ было введено в [13], как обобщение условия доминирования дисконтирующего множителя (подробнее см. [3, 14]).

(A2) Существуют такие число $\beta > 0$ и суммируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$ существует в G на интервале $[0, \infty)$ и

$$\begin{aligned} & \max_{\theta \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \{ \|f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \| \} \leq \\ & \leq \|\zeta - x_*(0)\| \lambda(t). \end{aligned} \quad \text{п.в.}$$

Здесь $[x(\zeta; t), x_*(t)]$ — отрезок с вершинами $x(\zeta; t)$ и $x_*(t)$ из $\mathbb{R}^n$.

Для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ введем усиленный вариант условия (A2).

(A2') Существуют такие число $\beta > 0$ и суммируемая функция $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$ существует в G на ин-

тервале $[0, \infty)$ и, кроме того, для любых ζ_i , $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, выполняется неравенство

$$\max_{\theta \in [x(\zeta_1; t), x(\zeta_2; t)]} \|f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta_1; t) - x(\zeta_2; t)\| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta_1 - \zeta_2\| \lambda(t).$$

Здесь $[x(\zeta_1; t), x(\zeta_2; t)]$ — отрезок с вершинами $x(\zeta_1; t)$ и $x(\zeta_2; t)$.

Для заданных управлений $u(\cdot)$ и $u_*(\cdot)$, и момента времени $\tau > 0$ определим соответствующее составное управление $u_*^\tau(\cdot)$ равенством

$$u_*^\tau(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \tau), \\ u_*(t), & t \in [\tau, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

Наконец, для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ введем условие, характеризующее его устойчивость относительно малых возмущений траектории $x_*(\cdot)$ вблизи множества M_∞ .

(A3) Существует такое $\varepsilon > 0$, что если для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в момент времени $\tau \geq 0$ выполняется условие $\rho(x_*(\tau), M_\infty) \leq \varepsilon$, то существует такое $\delta(\tau, x_*(\tau)) > 0$, что если $x(\cdot)$ — решение дифференциального уравнения (2), соответствующее некоторому управлению $u(\cdot)$ на интервале $[0, \tau]$ в G с начальным состоянием $x(0) \in M_0$, и удовлетворяющее условиям $\|x(\tau) - x_*(\tau)\| \leq \delta(\tau, x_*(\tau))$ и $\rho(x(\tau), M_\infty) \leq \rho(x_*(\tau), M_\infty)$, то пара $(x_*^\tau(\cdot), u_*^\tau(\cdot))$, где $u_*^\tau(\cdot)$ составное управление, соответствующее $u(\cdot)$, $u_*(\cdot)$ и τ (см (6)), а $x_*^\tau(\cdot)$ — соответствующая ему траектория, является допустимым процессом в (P) .

Заметим, что в случае задачи (P) без асимптотического конечного ограничения в (4) (т.е. в случае, когда $M_\infty = \mathbb{R}^n$) выполнение для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ условия (A2) автоматически влечет и выполнение условия (A3).

2. ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — процесс, для которого выполняется условие (A2'). Тогда любое решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$, лежащим в β -окрестности точки $x_*(0)$, т.е. таким, что $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, определено в G на всем интервале $[0, \infty)$ и, следовательно, пара $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ является процессом. В дальнейшем будем считать, что процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ фиксирован, и для любого процесса с начальным состоя-

нием ζ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1) (для каждого процесса со своими функциями $\gamma(\cdot)$ и $v(\cdot)$). В этом случае в силу условия (A1) траектория $x(\zeta; \cdot)$ определена однозначно (см. [15, Глава 1, теорема 2]).

Определим множество $\Omega \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ равенством

$$\Omega = \bigcup_{\zeta: \|\zeta - x_*(0)\| < \beta} \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi = x(\zeta; \tau) : \tau \geq 0\}. \quad (7)$$

В силу условия (A2') следующий результат не сложно вытекает из стандартной теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

Лемма 1. Множество Ω , определенное равенством (7), открыто в $[0, \infty) \times G$.

Пусть $(\tau, \xi) \in \Omega$ и $0 \leq \tau < s$. Определим функцию мгновенной межвременной полезности $\pi(\tau, \cdot, s)$ на множестве

$$G_\tau = \{x \in G : (\tau, x) \in \Omega\} \quad (8)$$

равенством

$$\pi(\tau, \xi, s) = f^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)), \quad \xi \in G_\tau.$$

Содержательно, величина $\pi(\tau, \xi, s)$ есть мгновенная полезность, получаемая в момент s в зависимости от состояния системы $\xi \in G_\tau$ в предыдущий момент времени τ , при условии, что на интервале времени $[\tau, s]$ траектория системы $x(\tau, \xi; \cdot)$ определяется заданным управлением $u_*(\cdot)$ (см. (5)).

Предположим теперь, что несобственный интеграл в (1) сходится на процессе $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$. В этом случае в силу условий (A1) и (A2') для любых значений $(t, \xi) \in \Omega$ интеграл

$$W(\tau, \xi) = \int_\tau^\infty \pi(\tau, \xi, s) ds, \quad (9)$$

также сходится. Величина $W(\tau, \xi)$ имеет экономический смысл условной стоимости фазового вектора $\xi \in G$ в момент времени $\tau \geq 0$, т.е. это агрегированная межвременная полезность, получаемая при движении системы из состояния ξ в момент τ на интервале $[\tau, \infty)$ при условии, что используется заданное управление $u_*(\cdot)$. Функцию $W(\cdot, \cdot)$, определенную на множестве Ω равенством (9) будем называть функцией условной стоимости. Заметим, что функция условной стоимости была введена в работе автора [16] в связи с вопросом об экономической интерпретации сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом. Использование функции условной стоимости позволяет придать экономи-

ческий смысл сопряженной переменной без каких-либо предположений о дифференцируемости функции оптимального значения (см. [16]). В настоящей работе функция условной стоимости используется для получения полного варианта принципа максимума Понтрягина для задачи (P).

Для фиксированного $\tau \geq 0$ и процесса $(x(\tau, \xi; \cdot), u_*(\cdot))$ (см. (5)) через $Z(\tau, \xi; \cdot)$ будем обозначать фундаментальное матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x(\tau, \xi; t), u_*(t))]^* z(t), \quad (10)$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(\tau, \xi; 0) = I$, где I — единичная матрица размера $n \times n$. Заметим, что функция $Z(\tau, \xi; \cdot)$ определена на всем интервале $[0, \infty)$. Если $\xi = x_*(\tau)$, то $x(\tau, \xi; \cdot) = x_*(\cdot)$ (см. (5)). В этом случае для краткости функцию $Z_*(\tau, x_*(\tau); \cdot)$ будем обозначать через $Z_*(\cdot)$.

Следующий результат вытекает из [11, Lemma 3.2].

Лемма 2. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — процесс, для которого выполняется условие (A2') и для любого процесса с начальным состоянием ζ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1). Тогда для любой точки $(\tau, \xi) \in \Omega$ имеем

$$\| [Z(\tau, \xi; t)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau, \xi; t), u_*(t)) \| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \\ \text{при } n.в. \quad t \geq 0.$$

Следующий результат дает достаточные условия непрерывной дифференцируемости функции $\xi \mapsto W(\tau, \xi)$ на множестве G_τ (см. (8)).

Лемма 3. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — процесс, для которого выполняется условие (A2') и несобственный интеграл в (1) сходится. Пусть, кроме того, для любого процесса с начальным состоянием ζ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1). Тогда для любого $\tau \geq 0$ функция $\xi \mapsto W(\tau, \xi)$ непрерывно дифференцируема на множестве G_τ и

$$W_\xi(\tau, \xi) = \int_\tau^\infty \pi_\xi(\tau, \xi, s) ds = \\ = Z(\tau, \xi; \tau) \int_\tau^\infty [Z(\tau, \xi; s)]^{-1} f_x^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)) ds. \quad (11)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\tau \geq 0$. В силу [16, теорема 2, и теорема 3], производная (Фреше) $W_\xi(\tau, \xi)$ существует для любого $\xi \in G_\tau$ и определяется формулой (11). В силу теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных матричная функция $\xi \mapsto Z(\tau, \xi; \tau)$ непрерывна на G_τ . Аналогично, функции $\xi \mapsto [Z(\tau, \xi; s)]^{-1}$ и

$s \mapsto f_x^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s))$ непрерывны на G_τ для любого $s > \tau$. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что последний несобственный интеграл в (11) сходится равномерно по $\xi \in G_\tau$ (см. [17, §54.3, теорема 5]). В силу леммы 2 этот факт следует из того обстоятельства, что функция $\lambda(\cdot)$ не зависит от ξ .

Заметим, что в случае $\xi = x_*(\tau)$ равенство (11) принимает вид

$$W_x(\tau, x_*(\tau)) = \\ = Z_*(\tau) \int_\tau^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad \tau \geq 0. \quad (12)$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в задаче (P), для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняется условие (A2'). Предположим также, что для любого процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ с начальным состоянием $x(0) = \zeta$ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1). Предположим также, что выполняется условие (A3).

Пусть $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ — такая возрастающая последовательность положительных чисел, что $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_*(T_k), M_\infty) = 0$. В силу допустимости процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ такая последовательность $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ существует (см. (4)). Переходя при необходимости к подпоследовательности будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняется условие $\rho(x_*(T_k), M_\infty) \leq \varepsilon/k$, где число $\varepsilon > 0$ определено в условии (A3). Пусть $\delta(T_k, x_*(T_k)) > 0$ — число, определенное в (A3). Уменьшая при необходимости число $\delta(T_k, x_*(T_k)) > 0$, будем считать, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ замкнутая $\delta(T_k, x_*(T_k))$ -окрестность точки $x_*(T_k)$ содержится в множестве G_{T_k} (см. (8)), и для любого решения $x(T_k, \xi; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(T_k) = \xi$, $\|\xi - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))$, имеем $\|x(T_k, \xi; 0) - x_0\| < \beta$.

Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$M_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, M_\infty) \leq \rho(x_*(T_k), M_\infty), \\ \|x - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))\}.$$

В силу леммы 3 функция $W_k(\cdot) := W(\cdot, T_k)$ непрерывно дифференцируема на множестве $G_{T_k} \supset M_k$.

Для $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим следующую задачу (P_k) , соответствующую процессу $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, с фиксированным конечным временем T_k :

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + W_k(x(T_k)) + \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (13)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (14)$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T_k) \in M_k, \quad (15)$$

$$u(t) \in U(t). \quad (16)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, векторная функция $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, скалярные функции $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\varphi(\cdot)$, многозначное отображение $U(\cdot)$ и множество G — те же самые, что и в исходной задаче (P) .

Множество всех измеримых по Лебегу функций $u : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих для любого $t \in [0, T_k]$ включению (16), будем рассматривать в качестве управлений в задаче (P_k) . Соответствующее управлению $u(\cdot)$ абсолютно непрерывное решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (14) будем называть допустимой траекторией, если решение $x(\cdot)$ определено в G на интервале $[0, T_k]$, удовлетворяет конечным условиям (15) и интеграл в (13) сходится. В этом случае пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть допустимой в задаче (P_k) . Допустимая пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ является оптимальной в задаче (P_k) , если функционал (13) достигает на ней своего максимального значения на множестве всех допустимых в (P_k) пар. Нетрудно видеть, что для любого $k = 1, 2, \dots$ сужение процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ на интервал $[0, T_k]$ является допустимой парой в задаче (P_k) .

Лемма 4. Для любого $k = 1, 2, \dots$ сужение процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ на интервал $[0, T_k]$ является оптимальной допустимой парой в задаче (P_k) .

Определим функцию Гамильтона—Понтрягина $\mathcal{H} : [0, \infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ задачи (P) стандартным образом

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle + \psi^0 f^0(t, x, u),$$

$$H(t, x, \psi^0, \psi) = \sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi).$$

Далее через $\hat{\partial}\varphi(x)$ будем обозначать предельный субдифференциал локально липшицевой функции $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ в точке $x \in G$ (см. [1], Definition 11.10), а через $\hat{N}_A(a)$ — предельный нормаль-

ный конус к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in A$ (см. [1]).

Следующий результат дает необходимые условия оптимальности для задачи (P) . Предварительные результаты в этом направлении получены в работах автора [18, 19]. Другие варианты принципа максимума для задач с асимптотическими конечными ограничениями при дополнительном априорном предположении о существовании предела у оптимальной траектории на бесконечности см. в [20, 21].

Теорема 1. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в задаче (P) , для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Предположим также, что для любого $\zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется условие $(A1)$. Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль число $\psi^0 \geq 0$ и вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, что выполняются следующие условия:

(i) Функция $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = -Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума, т.е. $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)), \quad (18)$$

и выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)). \quad (19)$$

(ii) Выполняются включения

$$\psi(0) \in -\psi^0 \hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

$$\xi \in \text{Ls}_{t \rightarrow \infty; \rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0} \left\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \right\}.$$

Здесь

$$N_*(t) = \{\lambda \zeta : \lambda \geq 0, \zeta \in \hat{\partial}\rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty))\},$$

а множество

$$\text{Ls}_{t \rightarrow \infty; \rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0} \left\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \right\} =$$

$$= \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n : \exists \{t_k\}_{k=1}^\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_*(t_k), M_\infty) = 0, \right.$$

$$\left. \exists \{\zeta_k\}_{k=1}^\infty, \zeta_k \in N_*(t_k) : \zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} [Z_*(t_k)]^{-1} \zeta_k \right\}$$

– верхний топологический предел многозначного отображения $t \mapsto [Z_*(t)]^{-1} N_*(t)$ при $t \rightarrow \infty$, удовлетворяющих условию $\rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы 1 основано на лемме 4, применении к задачам (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, расширенного варианта принципа максимума Понтрягина для задач на конечных интервалах времени [1, Theorem 22.26] и непрерывной дифференцируемости функции условной стоимости (лемма 3). Аналогичный вариант принципа максимума в нормальной форме ($\psi^0 = 1$) для задачи (P) с фиксированным начальным состоянием и без асимптотических конечных ограничений был получен в [11] при помощи метода игольчатых вариаций в более общем случае, когда несобственный интеграл в функционале (1) не обязательно сходится и при более слабом условии $(A2)$ (подробнее см. [3, 11]).

В заключение приведем вытекающий из теоремы 1 вариант принципа максимума для задачи (P) в случае отсутствия асимптотических конечных ограничений. Особенность данного варианта принципа максимума состоит в том, что он формулируется полностью в терминах функции условной стоимости.

Теорема 2. *Предположим, что в задаче (P) асимптотическое конечное ограничение в (4) отсутствует (т.е. $M_\infty = \mathbb{R}^n$). Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – слабо обгоняюще оптимальный процесс в задаче (P) , для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняется условие $(A2')$. Предположим также, что для любого $\zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется условие $(A1)$. Тогда для любого $t \geq 0$ функция $W(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$ и выполняются следующие условия:*

(i) Функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = W_x(t, x_*(t)), \quad t \geq 0, \quad (20)$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума в нормальной форме (18) и (19) (при $\psi^0 = 1$).

(ii) Выполняется условие трансверсальности

$$\psi(0) \in -\hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

(iii) Частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$ и

$$W_t(t, x_*(t)) + \sup_{u \in U(t)} \{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \} \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0. \quad (21)$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы (3) функция $W(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$. В силу $(A2')$ в случае $M_\infty = \mathbb{R}^n$ условие $(A3)$ выполняется автоматически. Для любого $t \geq 0$ имеем $x_*(t) \in \text{int} M_\infty$ и, следовательно, $\hat{\partial}\rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty)B_1^n(0)) = 0$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы 1 выполняется с $\xi = 0$ и без ограничения общности можно считать, что $\psi^0 = 1$. При этом равенство (20) вытекает из поточечного представления (17) и равенства (12). Таким образом, выполнение условий (i) и (ii) является непосредственным следствием утверждения теоремы 1. Далее, в силу (9) частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$, а равенство (21) вытекает из условия $(A2')$ и того факта, что для функции $\psi(\cdot)$, определенной равенством (20), выполняется условие максимума (19) в нормальной форме. Таким образом, условие (iii) также выполняется.

Заметим, что аналогичный вариант принципа максимума для задачи (P) с фиксированным начальным состоянием и без каких-либо асимптотических ограничений был получен автором в [16].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clarke F. Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics. V. 264. London: Springer-Verlag, 2013.
2. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. V. 38. P. 543–559.
3. Асеев С.М., Вельов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // УМН. 2019. Т. 74. № 6. С. 3–54.
4. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer, 1991.
5. Seierstad A., Sydsæter K. Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987.
6. Acemoglu D. Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
7. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995.
8. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P. 267–272.
9. Valente S. Sustainable development, renewable resources and technological progress // Environmental and Resource Economics. 2005. V. 30. № 1. P. 115–125.

10. Valente S. Optimal growth, genuine savings and long-run dynamics // Scottish Journal of Political Economy. 2008. V. 55. № 2. P. 210–226.
11. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 41–57.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979.
13. Aseev S.M., Veliov V.M. Needle variations in infinite-horizon optimal control. Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains. Contemporary Mathematics. 2014. V. 619. Wolansky G., Zaslavski A.J., Eds., Providence: Amer. Math. Soc. 1–17.
14. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms. 2012. V. 19. № 1–2. P. 43–63.
15. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985.
16. Асеев С.М. Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 239–253.
17. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов в 3 тт. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. М.: Дрофа, 2004.
18. Aseev S.M. The Pontryagin maximum principle for optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint under weak regularity assumptions // J. Math. Sci. 2023. V. 270. № 4. P. 531–546.
19. Асеев С.М. Принцип максимума для задачи оптимального управления с асимптотическим конечным ограничением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 35–48.
20. Бродский Ю.И. Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени // Матем. сб. 1978. Т. 105(147). № 3. С. 371–388.
21. Seierstad A. A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity. // Open J. Optim. 2015. V. 4. P. 100–130.

CONDITIONAL COST FUNCTION AND NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR INFINITE HORIZON OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Corresponding member of the RAS S. M. Aseev^{a,b}

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Infinite horizon optimal control problem with general endpoint constraints is reduced to a family of standard problems on finite time intervals containing the value of the conditional cost of the phase vector as a terminal term. New version of the Pontryagin maximum principle containing an explicit characterization of the adjoint variable is obtained for the problem with a general asymptotic endpoint constraint. In the case of the problem with free final state this approach leads to a normal form version of the maximum principle formulated completely in the terms of the conditional cost function.

Keywords: optimal control, infinite horizon, asymptotic endpoint constraint, conditional value function, Pontryagin's maximum principle

УДК 531.01

ДИНАМИКА СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

© 2023 г. Т. В. Сальникова^{1,*}, Е. И. Кугушев^{1,**}, А. А. Демидов^{1,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 22.03.2023 г.

После доработки 21.09.2023 г.

Принято к публикации 13.10.2023 г.

Рассматривается динамическая система с ограничениями в виде линейных дифференциальных неравенств. Доказано, что в общем случае при наличии таких связей движение является безударным. Показана возможность реализации таких связей силами вязкого трения. Приведен пример неголономной системы, для которой с помощью численного моделирования показано, как с увеличением степени анизотропии происходит переход от системы с анизотропным вязким трением к системе с односторонними дифференциальными связями.

Ключевые слова: неголономные системы, односторонние дифференциальные связи, анизотропное вязкое трение

DOI: 10.31857/S2686954323600167, **EDN:** ZCARVS

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются вопросы динамики механических систем, на движение которых наложены ограничения в виде дифференциальных неравенств. Связи такого вида называются односторонними, или неголономными дифференциальными связями. Они упоминаются в работах [1, 2], однако конкретный интерес к ним проявился лишь в начале текущего века [3, 4]. В указанных работах предлагался вывод уравнений движения таких систем, основанный на локальных или интегральных вариационных принципах [5, 6], и приводился пример такой системы — односторонний конек Чаплыгина. В [3] показывается безударность односторонних дифференциальных связей в однородном случае. В [4] ставится вопрос о реализации таких связей силами анизотропного вязкого трения, и дается пример такой реализации для конька Чаплыгина.

В данной работе показывается безударность односторонних дифференциальных связей в общем случае. Показывается возможность реализации таких связей силами анизотропного вязкого трения. Для некоторых систем методами компьютерного моделирования показывается, как с

ростом анизотропности происходит предельный переход от систем с анизотропным вязким трением к системе с односторонними дифференциальными связями.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И БЕЗУДАРНОСТЬ

Классический подход к теории односторонних связей состоит в распространении понятия пространства виртуальных перемещений на односторонние связи. В этом случае к виртуальным перемещениям относятся перемещения, направленные не только по касательной к границе связей, но и внутрь области допустимой для движения. Такой подход предлагается в работах [1, 2]. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек с радиус-векторами $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Объединим их радиус-векторы $\vec{r}_i$, $i = 1, \dots, N$ в один вектор $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in R^{3N}$.

Пусть на систему наложены k двухсторонних дифференциальных связей $A(x, t)\dot{x} + b(x, t) = 0$, где A — матрица размером $3N \times k$, $b \in R^k$ — вектор. Пусть также на систему наложено s односторонних дифференциальных связей

$$W(x, t)\dot{x} + h(x, t) \leq 0, \quad (1)$$

где W — матрица размером $3N \times s$, $h \in R^s$ — вектор. Здесь и далее для вектора $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com

**E-mail: kugushevi@yandex.ru

***E-mail: ademich8@gmail.com

выражение $u \leq 0$ означает, что неотрицательны все его координаты $u_i \leq 0, i = 1, \dots, n$.

Если все неравенства (1) строгие, то мы находимся внутри области, допускаемой односторонними связями. В этом случае односторонние связи не влияют на движение системы. Если в момент времени t в точке фазового пространства $(x, \dot{x})$ хотя бы одно из неравенств (1) становится равенством, то будем говорить, что система вышла на границу односторонних связей. В этом случае на движение системы влияют только те неравенства, которые стали равенствами. Отметим особо, что в дальнейшем, при использовании неравенств (1) в граничных точках, будет подразумеваться, что в данную систему неравенств входят только неравенства, обращающиеся в равенство.

Введем пространство виртуальных перемещений как множество векторов $\delta x = (\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N)$ из R^{3N} . Для заданного положения точек системы x и заданного момента времени t вектор $\delta x \in R^{3n}$ называется виртуальным перемещением, если для него выполняются равенства $A(x, t)\delta x = 0$, а также, но только для граничных точек, выполняются неравенства $W(x, t)\delta x \leq 0$. Эти неравенства означают, что виртуальные скорости сдвига вдоль виртуального перемещения направлены внутрь области, допускаемой для движения односторонними связями, или же по касательной к границе связей.

Касательными перемещениями будем называть виртуальные перемещения, для которых выполняются строгие равенства $W(x, t)\delta x = 0$. Касательные перемещения образуют гиперплоскость в R^{3N} , которую мы будем называть плоскостью удара.

Мы считаем, что при выходе на границу односторонних дифференциальных связей возникают ударные реакции, импульсы которых будем обозначать $R^{(p)} = (R_1^{(p)}, \dots, R_N^{(p)})$. Связи будем называть идеальными, если ударные импульсы направлены внутрь области, допускаемой для движения односторонними связями. Это значит, что для любых виртуальных перемещений выполняется неравенство

$$(R^{(p)}, \delta x) \geq 0. \quad (2)$$

Заметим, что если δx касательное перемещение, то $-\delta x$ тоже касательное перемещение. Поэтому для касательных перемещений в случае идеальных связей выполнено равенство $(R^{(p)}, \delta x) = 0$.

Сформулируем теперь принцип виртуальных перемещений Даламбера–Лагранжа. Пусть в момент t система выходит на границу односторонних дифференциальных связей. Применяя прин-

цип освобождения от связей, освободим систему от связей, заменив их реакциями связей. В соответствии с классической теорией удара постулируем, что существуют пределы справа и слева скоростей точек системы $V^- = \dot{x}(t-0)$, $V^+ = \dot{x}(t+0)$. Тогда

$$A(x, t)V^+ + b(x, t) = 0, \quad W(x, t)V^+ + h(x, t) \leq 0$$

$$A(x, t)V^- + b(x, t) = 0, \quad W(x, t)V^- + h(x, t) = 0.$$

В соответствии с теоремой об изменении импульса системы в момент выхода на границу односторонних связей, изменение импульсов точек системы равно ударным импульсам реакций связей:

$$MV^+ = MV^- + R^{(p)}.$$

Здесь M – матрица масс системы.

Введя обозначение $\Delta V = V^+ - V^-$, получаем $R^{(p)} = M\Delta V$. Тогда условие идеальности (2) можно записать следующим образом

$$(M\Delta V, \delta x) \geq 0 \quad (3)$$

Выполнение этого соотношения для любых виртуальных перемещений

$$A\delta x = 0, \quad W\delta x \leq 0 \quad (4)$$

будем называть принципом виртуальных перемещений в нашем случае. Для касательных перемещений выполнено

$$(M\Delta V, \delta x) = 0, \quad \forall \delta x : A\delta x = 0, \quad W\delta x = 0. \quad (5)$$

В соответствии с правилом множителей Лагранжа получаем отсюда, что найдутся векторы $\lambda^{(p)} \in R^k$, $\mu^{(p)} \in R^s$ такие, что

$$M\Delta V = A^T \lambda^{(p)} + W^T \mu^{(p)}. \quad (6)$$

Здесь выражение B^T означает транспонирование матрицы B .

Для V^+ , V^- и ΔV имеем

$$AV^+ + b = 0, \quad AV^- + b = 0,$$

$$WV^+ + h \leq 0, \quad WV^- + h = 0.$$

Значит

$$A\Delta V = 0, \quad W\Delta V \leq 0. \quad (7)$$

Для краткости введем несколько обозначений. Пусть Φ – матрица размером $3N \times (k + s)$, составленная из строк матриц A и W , так, что сверху расположены строки матрицы A , а под ними – строки матрицы W . Также введем вектор $v^{(p)}$, составленный из последовательно расположенных компонент векторов $\lambda^{(p)}$ и $\mu^{(p)}$

$$\Psi = \begin{pmatrix} A \\ W \end{pmatrix} \quad v^{(p)} = (\lambda_1^{(p)}, \dots, \lambda_k^{(p)}, \mu_1^{(p)}, \dots, \mu_s^{(p)}).$$

Тогда $M\Delta V = A^T \lambda^{(p)} + W^T \mu^{(p)}$ и $A\Delta V = 0$, $W\Delta V = 0$ запишутся следующим образом

$$M\Delta V = \Phi^T v^{(p)}, \quad \Phi\Delta V \leq 0.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для $v^{(p)}$

$$\Phi M^{-1} \Phi^T v^{(p)} \leq 0. \quad (8)$$

Связи, наложенные на систему будем называть независимыми, если ранг матрицы Φ максимален, т.е. равен $k + s$. Матрица масс M симметрическая, положительно определенная. Если связи независимы, то матрица $\Phi M^{-1} \Phi^T v^{(p)}$ также симметрическая и положительно определенная, т.е., в частности, невырожденная. В этом случае из $\Phi M^{-1} \Phi^T v^{(p)} \leq 0$ следует, что $v^{(p)} = 0$ и, значит, $\Delta V = 0$. Это означает, что в системе с односторонними дифференциальными связями удары отсутствуют.

При выводе мы пользовались постулатом, что при нахождении на границе односторонних связей скорости точек имеют пределы слева и справа по времени. Обоснование этого предположения будет дано в следующих разделах.

При выходе на границу односторонних связей помимо ударных реакций с импульсами R_i^p на точки системы будут действовать обычные реакции связей, и уравнения движения в форме уравнений Лагранжа первого рода будут выглядеть следующим образом

$$M\ddot{x} = F + A^T \lambda + W^T \mu.$$

Множители Лагранжа μ отличны от нуля только тогда, когда система находится на границе односторонних дифференциальных связей.

При лагранжевом рассмотрении движения системы интегрируемая часть двухсторонних связей заменяется геометрическими ограничениями на положения точек системы. При локальном рассмотрении на конфигурационном пространстве вводятся обобщенные координаты $q = (q_1, \dots, q_n)$. Двухсторонние связи задаются системой k равенств $A(q, t)\dot{q} + b(q, t) = 0$, где A — матрица размером $3N \times k$, $b \in R^k$ — вектор. Односторонние дифференциальные связи задаются системой s неравенств $W(q, t)\dot{q} + h(q, t) \leq 0$, где W — матрица размером $3N \times s$, $h \in R^s$ — вектор.

Будем считать, что система натуральная

$$L = T - V = \frac{M(q, t)\dot{q}, \dot{q}}{2} - V(q).$$

Тогда уравнения Лагранжа второго рода выглядят следующим образом

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A^T \lambda + W^T \mu. \quad (9)$$

Множители Лагранжа μ не положительны, и отличны от нуля только тогда, когда система находится на границе односторонних дифференциальных связей:

$$\mu(t) \leq 0, \quad (W\dot{q} + h)\mu \equiv 0.$$

Пусть связи однородны, т.е. $b = 0, h = 0$. Дожив уравнения Лагранжа на $\dot{q}$, получим

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}, \dot{q} \right) = 0.$$

Значит, если функция Лагранжа не зависит от времени, то выполняется обобщенный закон сохранения энергии (существует интеграл Якоби)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \text{const}.$$

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОСТОРОННИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ АНИЗОТРОПНЫМ ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрим натуральную механическую систему с лагранжианом

$$L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{(M(q)\dot{q}, \dot{q})}{2} - V(q).$$

Считаем, что на движение системы наложены только односторонние дифференциальные связи $W(q)\dot{q} + h(q) \leq 0$.

Пусть $a > 0$, и $q^*(t)$ — движение системы с начальными условиями $(q^*(0), \dot{q}^*(0))$ на отрезке $0 \leq t \leq a$. Тогда оно удовлетворяет уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = W^T \mu,$$

где $\mu(t) \leq 0$ некая функция времени, зависящая от движения, и принимающая ненулевые значения только в те моменты времени, в которые $W(q)\dot{q} + h(q) = 0$.

Обозначим через u_i строку i матрицы W , $i = 1, \dots, s$. Компоненты вектора h обозначим через h_i , т.е. $h = (h_1, \dots, h_s)$

Введем функцию $\xi(x), x \in R$:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Пусть ρ принимает натуральные значения $\rho = 1, 2, 3, \dots$. Отбросим односторонние дифференци-

альные связи $W\dot{q} + h \leq 0$ и добавим в систему обобщенные силы линейного вязкого трения

$$Q_p = -\rho \sum_{j=1}^s \xi(u_j \dot{q} + h_j)(u_j, \dot{q}) \times u_j.$$

Пусть $\dot{q}^*(0) \neq 0$, и $q_p(t)$ — движение системы с начальными условиями $(q^*(0), \dot{q}^*(0))$ на отрезке $0 \leq t \leq a$. Для движения системы выполняются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_p. \quad (10)$$

Мы покажем, что для достаточно малого $a > 0$, при $\rho \rightarrow +\infty$ решения $q_p(t)$ и скорости $\dot{q}_p(t)$ равномерно по t сходятся к решению $q_\infty(t)$ и скорости $\dot{q}_\infty(t)$.

В фазовом пространстве системы введем координаты $z = (z_1, \dots, z_{2n})$ так, что $z_i = q_i$, $z_{i+n} = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$. В этих координатах уравнения движения можно записать следующим образом

$$\dot{z} = F(z) = F^*(z) + F_p(z), \quad (11)$$

где $F_p(z)$ — слагаемое, отвечающее обобщенным силам вязкого трения, а F^* — остаток.

Односторонние дифференциальные связи задаются неравенствами

$$\varphi_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

где $\varphi_i(z)$ — некие функции. Обозначим через Σ_0 множество точек фазового пространства, допускаемых связями

$$\Sigma_0 = \{\varphi_1(z) \leq 0\} \cap \dots \cap \{\varphi_s(z) \leq 0\}.$$

Граница Γ_0 этих связей определяется как часть объединения гиперповерхностей

$$\Gamma_0 = \{\varphi_1(z) = 0\} \cup \dots \cup \{\varphi_s(z) = 0\} \cap \Sigma_0.$$

Мы предполагаем, что связи не вырождены, т.е. что матрица связей W имеет максимальный ранг, равный s . В этом случае, вблизи границы Γ_0 векторное поле $F_p(z)$ трансверсально соответствующим гиперповерхностям и направлено внутрь области $\Sigma_{<0}$

$$\Sigma_{<0} = \{\varphi_1(z) < 0\} \cup \dots \cup \{\varphi_s(z) < 0\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ введем множество $\Sigma_{<\varepsilon}$

$$\Sigma_{<\varepsilon} = \{\varphi_1(z) < \varepsilon\} \cup \dots \cup \{\varphi_s(z) < \varepsilon\}.$$

По построению составляющая F_p для точек из $\Sigma_{<\varepsilon}$ направлена внутрь этой области. С увеличением ρ составляющая F_p растет как $O(\rho)$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N(\varepsilon)$, такое, что при всех $\rho > N$ вектор F направлен внутрь области $\Sigma_{<\varepsilon}$. Следовательно, решение си-

стемы, начавшееся в области $\Sigma_{<\varepsilon}$, останется в ней во все время. При этом

$$N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1}), \quad \text{или, что то же самое,} \\ \varepsilon(N) = O(N^{-1}).$$

Из этого вытекает, что величины $\|F_p(z_p(t))\|$ ограничены равномерно по t и ρ .

Рассмотрим функции $z_p(t)$ как элементы пространства Соболева $W_1^2(0, a)$. Используя теорему вложения, получаем, что z_p сходится равномерно к некоторой функции $\tilde{z}(t)$, при этом производная $\tilde{z}(t)$ также сходится, но слабо. Отсюда получаем требуемое утверждение.

Однако можно и не использовать пространства Соболева, а применить критерий Арцела к семейству равномерно непрерывных функций. Строгое доказательство, для краткости, приведем в простом частном случае. Пусть есть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f^*(x) = (f_1, \dots, f_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n.$$

Пусть нас интересует ограничение $x_1 \leq 0$.

Для натурального ρ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad \dot{x}_1 = f_1^*(x) - \xi(x_1)\rho x_1, \\ \dot{x}_i &= f_i^*(x), \quad i \neq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $x_p(t)$ — решение системы, при $0 \leq t \leq a$, и начальное условие $x_p(0)$ таково, что $x_{p1}(0) \leq 0$.

Надо показать, что решения $x_p(t)$ при $\rho \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к некоторой функции $x^*(t)$, такой, что $x_1^*(t) \leq 0$ при всех t , и которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = F^*(x) + \mu(t)e, \quad (13)$$

где $e = (1, 0, \dots, 0)$, и $\mu(t) \leq 0$ некоторая функция, отличная от нуля только в те моменты времени, для которых $x_1^* = 0$.

Предположим, что $\|f(x)\| \leq b$. Тогда при $\rho x_1 > b$ будет $f_1^*(x) - \xi(x_1)\rho x_1 < 0$. Значит решение, начавшееся в области $x_1 \leq 0$, не сможет попасть в область $x_1 > \frac{b}{\rho}$.

Возьмем натуральное N достаточно большим, и введем множество K_N решений $x_p(t)$ для всех натуральных $\rho \geq N$. Введем обозначение $\Omega = (0, a)$ и будем рассматривать решения $x_p(t)$ как элементы пространства Соболева $K_N \subset K \subset W_2^1(\Omega)$. По построению множество K_N ограничено в $W_2^1(\Omega)$. Поскольку $W_2^1(\Omega)$ рефлексивно, и K_N ограниченное множество, то K_N слабо компактно [7]. По-

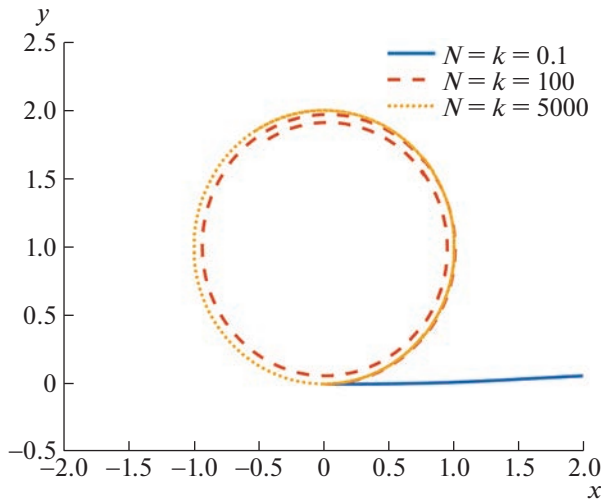


Рис. 1. Одинаковые значения коэффициентов трения с разных сторон.

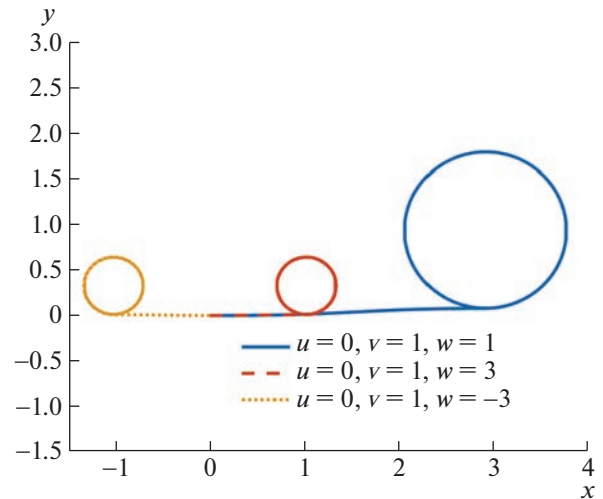


Рис. 2. Изменение начальных проекций скоростей u , v и начальной угловой скорости w .

этому из $\{x_p\}$ можно выделить последовательность слабо сходящуюся к некоторой функции $x_* \in \bar{K}_N$. Будем нумеровать эту подпоследовательность теми же индексами: $x_k \rightarrow x_*$ слабо в $W_2^1(\Omega)$.

По теореме вложения пространств Соболева пространство $W_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $C^0(\bar{\Omega})$. Поэтому ограниченное множество K_N в $W_2^1(\Omega)$ отображается в предкомпактное ограниченное множество в $C^0(\bar{\Omega})$. Следовательно, из последовательности $\{x_p\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к $x_* \in \bar{K}_N$ в смысле $C^0(\bar{\Omega})$, т.е. получаем последовательность, равномерно сходящуюся на $[0, a]$. Оставим прежние обозначения для этой подпоследовательности. Таким образом

$$\max_{0 \leq t \leq a} \|x_p - x_*\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad p \rightarrow +\infty.$$

Кроме того $\dot{x}_p \rightarrow \dot{x}_*$ слабо в $L_2(\Omega)$.

Как уже говорилось, можно и не использовать пространства Соболева, а применить критерий Арцела к семейству равномерно непрерывных функций. Поскольку функции $\dot{x}_p$ равномерно по t ограничены, то в соответствии с критерием Арцела из последовательности функций x_p можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. При этом можно далее выбрать подпоследовательность у которой также и производные $\dot{x}_p$ будут сходиться, но слабо [7]. Для выбранной подпоследовательности будет выполняться уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= f(x_p), \quad \dot{x}_{ip} = f_1^*(x_p) - \xi(x_{ip}) \rho x_{ip}, \\ \dot{x}_{ip} &= f_i^*(x_p), \quad i \neq 1. \end{aligned} \quad (14)$$

В этом уравнении $f^*(x_p)$ сходится равномерно, а $\dot{x}_p$ — сходится слабо. Значит, и $\xi(x_1) \rho x_{ip}$ сходится слабо, и будет выполнено уравнение $\dot{x} = F^*(x) + \mu(t)e$.

4. ОДНОСТОРОННИЙ КОНЕК ЧАПЛЫГИНА

Пусть по горизонтальной плоскости Oxy скользит без трения однородный диск, положение которого определяется обобщенными координатами (x, y, φ) , где (x, y) — координаты центра масс диска, φ — угол поворота фиксированного диаметра диска относительно оси Ox . На движение диска наложена связь

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi \leq 0.$$

Лагранжиан системы равен

$$L = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 + m \dot{y}^2 + J \dot{\varphi}^2).$$

Здесь m — масса диска, J — момент инерции диска относительно вертикальной оси, проходящей через его центр.

Уравнения движения (9) имеют вид

$$m \ddot{x} = \mu \sin \varphi, \quad m \ddot{y} = -\mu \cos \varphi, \quad \ddot{\varphi} = 0,$$

где $\mu(t)$ — некоторая неположительная функция, отличная от нуля, только в моменты времени, в которые $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$.

Пусть в начальный момент выполняется строгое неравенство $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi < 0$. Тогда на начальном отрезке диск будет скользить свободно, враща-

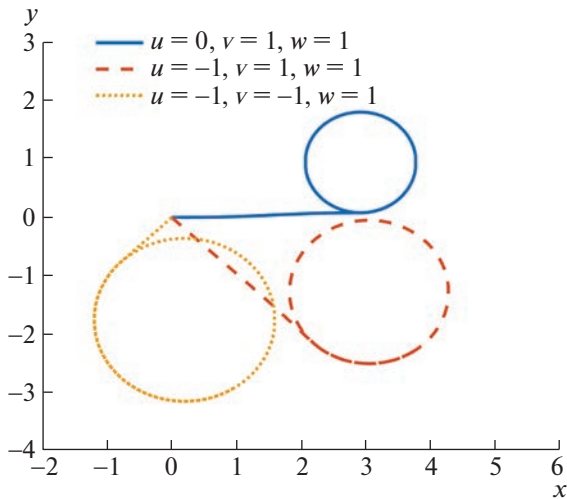


Рис. 3. Изменение начальных проекций скоростей u , v и начальной угловой скорости w .

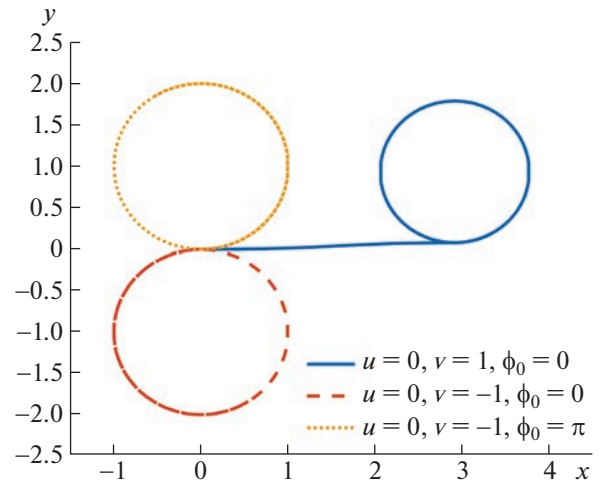


Рис. 4. Изменение начального угла наклона лезвия конька относительно оси x .

ясь с постоянной угловой скоростью. Центр масс будет двигаться по прямой с постоянной скоростью. В какой-то момент система выйдет на ограничения и будет выполнено $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$. Тогда конек находится в положении, направленном по скорости движения центра. Затем движение по касательной перейдет к обычной круговой траектории диска с двухсторонним коньком.

Конек не сойдет с окружности. В самом деле, условие того, что система не сойдет с границы, является то, что реакция связи направлена строго внутрь области, запрещенной неравенством связи. В данном случае реакция связи, приложенная к центру диска, будет все время отлична от нуля и направлена к центру круговой траектории центра масс диска, т.е. в сторону области, допустимой связью.

Из уравнений движения для угла поворота диска имеем

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad \text{где} \quad \omega = \dot{\varphi}(0), \quad \varphi_0 = \varphi(0).$$

Из интеграла энергии следует, что центр диска движется со скоростью

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 = \text{const.}$$

Из условия $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos\varphi = V \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \dot{y} &= V \sin\varphi = V \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, находим, что квадрат радиуса ρ^2 окружности, по которой движется центр диска, равен

$$\rho^2 = \frac{V^2}{\omega^2} = \frac{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}{\dot{\varphi}^2(0)}.$$

В качестве приложения рассмотрим реализацию односторонней дифференциальной связи анизотропным вязким трением с помощью численного моделирования. Представим движение по горизонтальной плоскости однородного диска, к центру которого приложена сила линейного вязкого трения, ортогональная скорости движения центра u . Значение коэффициента трения меняется в зависимости от направления проекции скорости конька u следующим образом:

$$F^{Tp} = -Nu, \quad u \geq 0, \quad F^{Tp} = -ku, \quad u < 0.$$

Получим качественное поведение конька в зависимости от различных значений коэффициентов трения k и N .

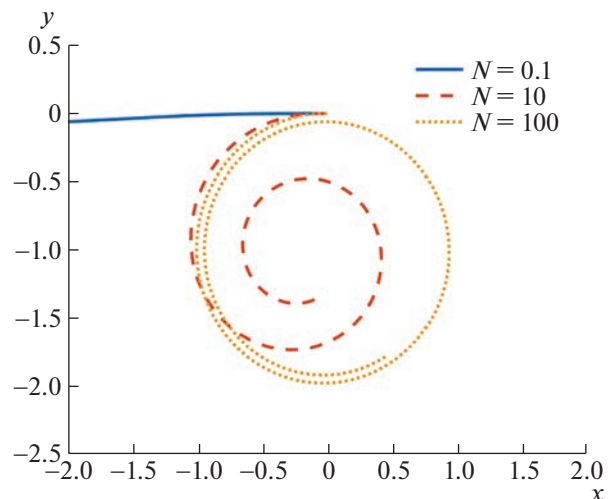


Рис. 5. Изменение параметра N .

Таблица 1. Погрешность траектории при $k = 0.1$; $k = 0$; $k = 100$ (Δp — отклонение центра предельной окружности от идеальной, ΔR — отклонение радиуса)

	$k = 0.1$	$k = 0.1$	$k = 0$	$k = 0$	$k = 100$	$k = 100$
N	Δp	ΔR	Δp	ΔR	Δp	ΔR
0.1	3.53	−2.75	3.3	−2.55	3.53	−2.75
1	1.35	−0.62	1.34	−0.60	1.35	−0.62
10	0.36	0.23	0.37	0.23	0.36	0.23
100	0.19	0.04	0.19	0.04	0.19	0.04
5000	0.18	0.0009	0.18	0.0009	0.18	0.0009

Для начала установим одинаковые значения коэффициентов трения с обеих сторон, чтобы сравнить с результатами, известными для уже изученной системы. Начальные условия: $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $\omega(0) = 1$, $x(0) = y(0) = 0$, $t \in [0, 10]$.

Все траектории совпали: на графике мы видим, что при маленьких значениях трения конек не успевает выйти на окружность, но по мере увеличения коэффициента трения конек начинает закручиваться в спираль, которая в пределе стремится к окружности.

Рассмотрим теперь случай, когда с одной стороны трение очень большое $N = 5000$, а с другой стороны очень маленькое $k = 0.1$, и проварьируем начальные значения скоростей.

На полученном графике видно, что наша система ведет себя как односторонний конек: сперва тело движется по прямой и затем выходит на окружность, причем радиус этой окружности совпадает с теоретическим. При различии начальной угловой скорости в 3 раза, радиусы соответствующих траекторий отличаются во столько же раз (пунктирная и точечная траектории).

Варьируя знаки начальных проекций скоростей, можно увидеть, как отклоняется траектория конька и сокращается расстояние, которое конек проходит по прямой (точечная и сплошная траектории).

Изменение начального угла наклона лезвия конька относительно оси x также влияет на расположение окружности. Так, на точечной и сплошной траекториях видно зеркальное отклонение траектории при изменении угла на π радиан.

Зафиксируем теперь значение одного из коэффициентов трения: $k = 0.1$. И посмотрим, как ведет себя конек при варьировании значения N .

В данном случае был рассмотрен эксперимент со следующими начальными условиями: $u(0) = 0$, $v(0) = -1$, $\omega(0) = 1$, $x(0) = y(0) = 0$, $k = 0.1$, $t \in [0, 10]$. Как видно из графика, при низких значениях коэффициента N (сплошная и пунктир-

ная траектории) конек не может перейти на траекторию окружности.

Начиная со значения $N = 10$ конек начинает закручиваться с самого начала и траектория становится спиралевидной, стремясь к центру идеальной окружности. При дальнейшем увеличении N траектория, как и ожидалось, стремится к окружности.

В таблице, представленной ниже, указаны погрешности траекторий конька от идеального случая, когда на конек наложена связь. Δp — смещение центра траектории от центра идеальной окружности. Координаты центра в экспериментах считались как среднее значение координат, полученных на каждом шаге интегрирования. ΔR — отклонение от идеального значения — среднего значения радиуса траектории, которое высчитывалось как усредненное значение расстояний от центра траектории до каждой из точек.

Чтобы сравнить значения погрешностей, в зависимости от других был проведен тот же эксперимент со значением $k = 0$ и $k = 100$ при тех же начальных условиях. Получившиеся значения представлены в табл. 1.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель односторонних дифференциальных связей. Корректность построенной модели обоснована реализацией при помощи анизотропного трения. Показано, что выход на границу таких связей происходит безударно, что согласуется с [4]. В рамках построенной модели проведен численный анализ движения одностороннего конька Чаплыгина на горизонтальной плоскости. Подтверждена корректность предлагаемой модели анизотропных неголономных связей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. т. 2. М., Физматгиз, 1960. 487 с.

2. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. М., Л., Гостехиздат, 1952. С. 812.
3. Березинская С.Н., Кугушев Е.И., Сорокина О.В. О движении механических систем с односторонними связями. Вестник московского университета, сер. 1, математика, механика. 2005. Т. 3. С. 18–24.
4. Kozlov V.V. On the dynamics of systems with one-sided non-integrable constraints, Theor. Appl. Mech. 2019. T. 46. Вып. 1. С. 1–14.
5. Kozlov V.V. Integral Analogue of the Gauss Principle University of Nis, The scientific journal Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics. 2000. V. 2. № 10. P. 1055–1060.
6. Kozlov V.V. Gauss Principle and Realization of Constraints, Regul. Chaotic Dyn. 2008. V. 13. № 5. P. 431–434.
7. Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967. С. 624.

DYNAMICS OF SYSTEMS WITH ONE-SIDED DIFFERENTIAL CONSTRAINTS

T. V. Salnikova^a, E. I. Kugushev^a, and A. A. Demidov^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A dynamical system with constraints in the form of linear differential inequalities is considered. It is proved that in the general case, in the presence of such connections, the motion is shockless. The possibility of realizing such bonds by viscous friction forces is shown. An example of a nonholonomic system is given, for which, using numerical simulation, it is shown how, with an increase in the degree of anisotropy, the transition from a system with anisotropic viscous friction to a system with one-sided differential constraints occurs.

Keywords: nonholonomic systems, one-sided differential constraints, anisotropic viscous friction

УДК 517.9

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СПРОСА

© 2023 г. В. Л. Береснев^{1,2,*}, А. А. Мельников^{1,2,**}

Представлено академиком РАН В.Г. Романовым

Поступило 06.04.2023 г.

После доработки 26.09.2023 г.

Принято к публикации 14.10.2023 г.

Рассматривается математическая модель конкурентного размещения предприятий (средств обслуживания) двумя соперничающими сторонами в ситуации альтернативных сценариев реализации множества потребителей. Исследуемая задача выбора наилучших решений сторонами формулируется как дискретная задача двухуровневого математического программирования. Предлагается способ вычисления верхних границ значений целевой функции задачи на подмножествах решений для использования в алгоритмах поиска оптимального решения рассматриваемой задачи. Основу предлагаемого способа составляют построение дополнительных ограничений (отсечений) для НР-релаксации (high-point relaxation в англоязычной литературе) рассматриваемой задачи и получение в результате более сильных оценочных задач. Предложена новая процедура генерации таких ограничений, позволяющая получить наиболее сильные ограничения без использования процедур перебора при их построении.

Ключевые слова: двухуровневое программирование, игра Штакельберга, конкурентное размещение предприятий, пессимистическое оптимальное решение

DOI: 10.31857/S2686954323700327, **EDN:** ZDGOZP

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В [1, 2] рассматривалась математическая модель конкурентного размещения предприятий (CompFLP), построенная на основе игры Штакельберга. Разнообразие родственных постановок, а также результаты, связанные с ними, широко представлены в недавних обзорах работ [3–6]. Модель, рассматриваемая в настоящей работе, предполагает наличие двух соперничающих сторон (Лидера и Последователя), которые последовательно размещают свои предприятия для обслуживания заданного множества потребителей. Задача Лидера состоит в выборе решения, дающе-

го максимальную прибыль при условии оптимального поведения Последователя, также стремящегося получить наибольшую прибыль от обслуживания “захваченных” потребителей.

Будем полагать, что Лидер при размещении своих предприятий не обладает полной информацией о множестве потребителей. Последователь, напротив, открывает предприятия после Лидера и имеет информацию не только о решении Лидера, но и о множестве потребителей. Неопределенность данных о потребителях преодолевается рассмотрением в модели набора возможных вариантов (сценариев) множества потребителей, один из которых будет реализован. Наилучшим считается решение Лидера, дающее наибольшую прибыль при наихудших для данного решения сценарии и оптимальном решении Последователя.

Для формальной записи модели конкурентного размещения предприятий с альтернативными множествами потребителей (MSCompFLP) будут использованы следующие обозначения. Множество I включает индексы потенциальных пред-

¹Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

*E-mail: beresnev@math.nsc.ru

**E-mail: melnikov@math.nsc.ru

приятый, открываемых Лидером и Последователем, а множество S содержит индексы рассматриваемых сценариев. Множество потребителей при сценарии $s \in S$ обозначим J_s . Предполагаем, что $J_{s_1} \cap J_{s_2} = \emptyset$ для всех $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$. Это можно сделать без ограничения общности, поскольку потребителей, которых необходимо включить сразу в несколько различных сценариев, можно заменить требуемым количеством своих дубликатов. Объединенное множество потребителей из всех сценариев обозначим через $J = \bigcup_{s \in S} J_s$.

Фиксированные затраты, связанные с открытием предприятия $i \in I$ Лидером и Последователем, обозначим, соответственно, через f_i и g_i . Для заданных $i \in I$, $j \in J$ величины p_{ij} и q_{ij} выражают доход, получаемый при обслуживании потребителя $j \in J$ предприятием $i \in I$, открытым, соответственно, Лидером и Последователем. Кроме того, для всякого $s \in S$ введем величину P_s , выражающую “дополнительный” доход Лидера в случае реализации сценария $s \in S$ и используемую для корректировки влияния сценария s на решение Лидера.

В предлагаемой модели MSCompFLP мы используем переменные, аналогичные использованным в модели CompFLP. Бинарная переменная x_i равняется единице, если Лидер открывает предприятие $i \in I$ и нулю в противном случае. Бинарная переменная z_{is} равняется единице, если Последователь открывает предприятие $i \in I$ при реализации сценария $s \in S$, и нулю в противном случае. Переменные χ_{ij} и ζ_{ij} равняются единице, если открытое, соответственно, Лидером и Последователем предприятие $i \in I$ назначается для обслуживания потребителя $j \in J$, и нулю в противном случае.

При моделировании предполагается, что при назначении открытого предприятия для обслуживания потребителя $j \in J$ учитываются предпочтения этого потребителя, представленные отношением порядка $\succeq_j$ на множестве I . Для $i, k \in I$ запись $i \succ_j k$ означает $i \succeq_j k$ и $i \neq k$.

С использованием введенных обозначений задача выбора наилучшего решения в модели MSCompFLP может быть записана как следующая задача двухуровневого математического программирования:

$$\max_{(x_i), (\chi_{ij})} \left(-\sum_{i \in I} f_i x_i + \min_{s \in S} \left(P_s + \sum_{j \in J_s} p_{ij} \chi_{ij} \right) \right) \quad (1)$$

$$\tilde{z}_{is} + \sum_{k | i \succeq_j k} \chi_{kj} \leq 1, \quad s \in S, \quad j \in J_s; \quad (2)$$

$$x_i \geq \chi_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (3)$$

$$x_i, \chi_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (4)$$

$$(\tilde{z}_{is}), (\tilde{\zeta}_{ij}) - \text{оптимальное решение задачи} \quad (5)$$

$$\max_{(\tilde{z}_{is}), (\tilde{\zeta}_{ij})} \sum_{s \in S} \left(-\sum_{i \in I} g_i \tilde{z}_{is} + \sum_{j \in J_s} q_{ij} \tilde{\zeta}_{ij} \right); \quad (6)$$

$$x_i + z_{is} \leq 1, \quad i \in I, \quad s \in S; \quad (7)$$

$$x_i + \sum_{k | i \succeq_j k} \zeta_{kj} \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (8)$$

$$z_{is} \geq \zeta_{ij}, \quad i \in I, \quad s \in S, \quad j \in J_s; \quad (9)$$

$$z_{is}, \zeta_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad s \in S, \quad j \in J. \quad (10)$$

Целевая функция (1) выражает величину прибыли Лидера в худшем сценарии с учетом аддитивных поправок P_s , $s \in S$ в величину дохода для каждого из сценариев. Целевая функция внутренней задачи (6) представляет суммарную прибыль Последователя по всем сценариям, и ее оптимизация эквивалентна оптимизации прибыли в каждом индивидуальном сценарии. Ограничения (2) и (8) реализуют правило выбора обслуживающего предприятия для каждого потребителя, а (3) и (9) не позволяют использовать для обслуживания закрытые предприятия. В одном месте не могут располагаться предприятия обеих конкурирующих сторон (7).

Обозначим задачу верхнего уровня (1)–(5) через $\mathcal{L}$, а задачу нижнего уровня (6)–(10) через $\mathcal{F}$. Для задачи (1)–(10) в целом используем обозначение $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Пару (X, Z) , $X = ((x_i), (\chi_{ij}))$, $Z = ((z_{is}), (\zeta_{ij}))$, где X – допустимое решение задачи верхнего уровня, а Z – оптимальное решение задачи нижнего уровня, назовем *допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Поскольку элементы решения (X, Z) определяются бинарным вектором $x = (x_i)$, то решение (X, Z) назовем допустимым решением, порожденным вектором x . Значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимом решении (X, Z) обозначим $L(X, Z)$. Для модели MSCompFLP так же, как и для модели CompFLP, ставится задача поиска наилучшего решения среди *пессимистических допустимых решений* [7]. Пессимистическое допустимое решение, порожденное вектором x , дает наименьшее значение целевой функции $L(X, Z)$ среди всех допустимых решений (X, Z) , порожденных вектором x .

С задачей $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ связано семейство задач, получаемых из нее удалением всех сценариев, кроме одного. Задача со сценарием $s \in S$ есть задача CompFLP [2]. Обозначим эту задачу $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$, а значение ее целевой функции на допустимом ре-

шении (X_s, Z_s) — через $L_s(X_s, Z_s)$. Для построения пессимистического допустимого решения (X, Z) исходной задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порожденного заданным бинарным вектором x необходимо построить пессимистические допустимые решения (X_s, Z_s) , порожденные вектором x для всякого $s \in S$. Каждое из решений (X_s, Z_s) , $s \in S$ будет частью решения (X, Z) и при этом $L(X, Z) = \min_{s \in S} \{L_s(X_s, Z_s)\}$. Для построения пессимистического допустимого решения задачи $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$, порожденного заданным вектором x , необходимо решить две задачи целочисленного программирования, одна из которых есть задача $\mathcal{F}_s$, а другая — вспомогательная задача той же размерности, что и задача $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$.

Поиск оптимального пессимистического решения может быть организован по схеме неявного перебора в пространстве векторов размещения x , определяющих соответствующие им пессимистические допустимые решения. В своей работе такие схемы опираются на процедуру вычисления качественных верхних оценок для значений, принимаемых целевой функцией на подмножествах множеств допустимых решений. Разработка такой процедуры открывает возможность точного решения модели конкурентного размещения в условиях неопределенности спроса и обсуждается в последующих разделах статьи.

2. УСИЛЕННАЯ ОЦЕНОЧНАЯ ЗАДАЧА

Основой для вычисления верхней границы значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на подмножествах решений является ее релаксация, называемая НР-релаксацией [7]. Такая задача получается из исходной двухуровневой модели (1)–(10) исключением из нее условия (5) и целевой функции задачи $\mathcal{F}$. Кроме того, из задачи $\mathcal{F}$ могут быть исключены переменные (ζ_{ij}) , поскольку они не влияют на значение целевой функции полученной задачи. Таким образом, НР-релаксация исследуемой задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ есть задача $\mathcal{L}$, дополненная ограничениями (7) и (10), а ее допустимое решение (X, z) имеет вид $X = ((x_i), (\chi_{ij}))$, $z = (z_{is})$. Значение целевой функции релаксированной задачи на решении (X, z) обозначим $L(X, z)$.

Понятно, что оптимальное решение (X, z) релаксированной задачи имеет нулевые значения переменных (z_{is}) и дает завышенную верхнюю границу для оптимального значения целевой функции исходной задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Общий подход к улучшению верхней границы состоит в построении дополнительных ограничений, стимулирующих переменные (z_{is}) релаксированной задачи принимать ненулевые значения. Если эти огра-

ничения выполняются на пессимистических допустимых решениях задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, то НР-релаксация задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, называемая *усиленной оценочной задачей* (SEP), может быть использована для вычисления верхних границ.

Поскольку в задаче $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ оптимальные значения переменных (z_{is}) вычисляются независимо для различных $s \in S$, то дополнительные ограничения для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ можно искать в виде дополнительных ограничений для задач $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$ при фиксированных $s \in S$.

В [1, 2] предложены дополнительные ограничения для усиления НР-релаксации задачи CompFLP, названные с-отсечениями. При рассмотрении с-отсечений задачи $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$ используются следующие обозначения. Пусть $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J_s$ — непустые подмножества, и пусть $j \in J_s$. Положим

$$\alpha_j(I') = i', \text{ где } i' \succeq_j i \text{ для всех } i \in I';$$

$$\alpha_{j'}(I') = \{\alpha_j(I') | j \in J'\};$$

$$N_j(I') = \{i \in I | i \succ_j \alpha_j(I')\};$$

$$N_{j'}(I') = \cup_{j \in J'} N_j(I').$$

Если $x = (x_i)$, $i \in I$ — ненулевой бинарный вектор, то положим также $\alpha_j(x) = \alpha_j(I^1(x))$, $N_j(x) = N_j(I^1(x))$, где $I^1(x) = \{i \in I | x_i = 1\}$.

Пусть $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J_s$, $k \in N_{j'}(I')$, и пусть для множества $J'_k \subseteq \{j \in J_s | k \in N_j(I') \text{ и } N_j(I') \subseteq N_{j'}(I')\}$ справедливы соотношения

$$\sum_{j \in J'_k} p_{\alpha_j(I')j} > 0, \quad \sum_{j \in J'_k} q_{kj} \geq g_k.$$

Тогда неравенство

$$\sum_{i \in N_{j'}(I')} z_{is} \geq 1 + \sum_{i \in \alpha_{j'}(I')} (x_i - 1) - \sum_{i \in N_{j'}(I')} x_i \quad (11)$$

выполняется на любом пессимистическом допустимом решении задачи $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$ и называется *с-отсечением, сгенерированным парой подмножеств (I', J') и номером $k \in N_{j'}(I')$* .

Для построения с-отсечения в [1, 2] предложена переборная процедура поиска для заданного подмножества I' требуемых подмножества J' и номера k .

Построение пары подмножеств (I', J') , генерирующей с-отсечение, существенно упрощается, если ограничиться рассмотрением пар подмножеств специального вида. Пара непустых подмножеств (I', J') , $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J_s$ при $k \in I$ имеет

канонический вид, если $J' \subseteq \{j \in J_s | k \in N_j(I')\}$ и $I' = \alpha_{J'}(I')$.

Утверждение 1. Пусть пара подмножеств (I', J') при $k \in N_{J'}(I')$ генерирует с-отсечение. Тогда существует пара подмножеств (I'', J'') канонического вида, которая при данном k генерирует с-отсечение. При этом $I'' \subseteq I'$, и $N_{J''}(I'') \subseteq N_{J'}(I')$.

С использованием утверждения 1 построение с-отсечения может быть упрощено. В отличие от схемы перебора подмножеств I' , использованной в [2], утверждение 1 открывает путь к построению отсечений путем выбора подходящего k . Для этого достаточно построить соответствующее множество J'_k и проверить выполнимость неравенств $\sum_{j \in J'_k} p_{\alpha_{J'}(I')j} > 0$ и $\sum_{j \in J'_k} q_{kj} \geq g_k$. В случае положительного результата проверки пара подмножеств канонического вида может строиться на основании эвристических правил, направленных на нахождение наиболее сильных с-отсечений. К примеру, вовлекающих минимальное количество переменных.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ

Построение алгоритмов неявного перебора для поиска пессимистического оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ предполагает вычисление верхних границ значений целевой функции задачи на рассматриваемых в ходе работы алгоритма подмножествах решений. Такие подмножества задаются частичными решениями $y = (y_i)$, $y_i \in \{0, 1, *\}$, $i \in I$, фиксирующими значения некоторых переменных x_i , $i \in I$. Пусть $I^0(y) = \{i \in I | y_i = 0\}$, $I^1(y) = \{i \in I | y_i = 1\}$. Тогда элементами подмножества решений задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, заданного частичным решением $y = (y_i)$, будут пессимистические допустимые решения, порождаемые векторами $x = (x_i)$, $i \in I$, такими, что

$$x_i = y_i, \quad i \in I^0(y) \cup I^1(y). \quad (12)$$

Задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ и $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$ с указанными дополнительными условиями (12) в задаче верхнего уровня обозначим, соответственно, через $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$ и $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$, $s \in S$.

Если y есть бинарный вектор, то верхняя граница $UB(y)$ целевой функции задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$ вычисляется точно путем нахождения значения целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на пессимистическом допустимом решении, порожденном вектором y .

В общем случае, когда y не является бинарным вектором, процедура вычисления верхней границы есть итерационный процесс, состоящий из начальной итерации и некоторого числа одно-типовых основных итераций.

На начальной итерации строим задачу SEP для задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$. Для этого к ограничениям НР-релаксации задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ добавляем ограничение (12) и известные к данному моменту дополнительные с-отсечения для задачи $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$, $s \in S$.

На основной итерации рассматриваем построенную на предыдущей итерации задачу SEP для задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$ и вычисляем ее оптимальное решение (X', z') , $X' = ((x'_i), (\chi'_{ij}))$, $z' = (z'_{is})$, $i \in I$, $s \in S$. Далее для всякого $s \in S$ рассматриваем решение (X'_s, z'_s) , которое является частью решения (X', z') и допустимым решением подзадачи SEP, соответствующей задаче $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$. После этого для задачи $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$ строим с-отсечения, которые нарушаются на решении (X'_s, z'_s) . Такие отсечения назовем *с-отсечениями решения* (X'_s, z'_s) .

Пусть $x' = (x'_i)$, $z'_s = (z'_{is})$ и пусть $J_{0s} = J_s$, если $z'_s = 0$, и $J_{0s} = \{j \in J_s | \alpha_j(x') \succ_j \alpha_j(z'_s)\}$ в противном случае.

Утверждение 2. Неравенство (11), сгенерированное парой (I', J') , нарушается на решении (X'_s, z'_s) тогда и только тогда, когда $J' \subseteq J_{0s}$ и $I^1(x') \supseteq I' \supseteq \alpha_{J'}(x')$.

Таким образом, построение с-отсечения решения (X'_s, z'_s) сводится к поиску подмножества J' множества $\{j \in J_{0s} | k \in N_j(x')\}$ такого, что пара (I', J') , где $I' = \alpha_{J'}(x')$, генерирует с-отсечение.

Утверждение 3. При заданном $k \in I$ множество $J' \subseteq J_{0s}(k)$ такое, что пара (I', J') , где $I' = \alpha_{J'}(x')$, генерирует с-отсечение, существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \in J_{0s}(k)} p_{\alpha_{J'}(x')j} > 0, \quad \sum_{j \in J_{0s}(k)} q_{kj} \geq g_k.$$

Если для заданного $k \in N_{J_{0s}}(x')$ указанный критерий существования множества J' выполняется, то возникает задача выбора элементов множества $\{j \in J_{0s} | k \in N_j(x')\}$, из которых будет составлено J' . Этот выбор должен быть продиктован стремлением к тому, чтобы пара (I', J') , где $I' = \alpha_{J'}(x')$, генерировала наиболее сильное с-отсечение решения (X'_s, z'_s) . Для построения такого множества можно сформулировать вспомогательную оптимизационную задачу, решение которой будет определять множество J' с наимень-

Таблица 1. Зависимость времени вычислений и числа просмотренных вершин в методе ветвей и границ (среднее по 5 примерам) от количества мест возможного размещения предприятий

$ I $	Время, с	Вершины
5	1	3
10	28	15
15	86	4
20	387	46
25	4322	55

шим суммарным числом элементов во множествах $\alpha_{J'}(x')$ и $N_{J'}(x')$. Построенное таким образом с-отсечение назовем *с-отсечением решения* (X'_s, z'_s) , сгенерированным номером $k \in N_{J_{os}}(x')$.

Суммируя сказанное, получим следующую схему вычисления на каждой основной итерации алгоритма вычисления верхней границы $UB(y)$. После вычисления оптимального решения (X', z') текущей задачи SEP для задачи $(\mathcal{L}(y), \mathcal{F})$ последовательно для всякого $s \in S$ исследуем элементы $k \in N_{J_{os}}(x')$ с целью построения с-отсечений решения (X'_s, z'_s) , сгенерированных элементом k . Для этого для заданного k проверяем выполнение критерия существования требуемого с-отсечения. Если критерий выполняется, то вычисляем соответствующее множество J' и получаем требуемое с-отсечение. Это неравенство добавляем к ограничениям рассматриваемой задачи SEP. Если в процессе просмотра элементов $s \in S$ и $k \in N_{J_{os}}(x')$ удалось построить хотя бы одно с-отсечение, то начинаем следующую итерацию. В противном случае величину верхней границы $UB(y)$ полагаем равной оптимальному значению $L(X', z')$ целевой функции задачи SEP и завершаем процедуру вычисления верхней границы.

Для оценки эффективности указанной процедуры были сгенерированы тестовые примеры, в которых расположение предприятий и потребителей задавалось случайно размещенными на единичном квадрате точками. Предпочтения потребителей определяются евклидовыми расстояниями между точками. Сценарии спроса в примерах упорядочены по убыванию потенциальной доходности, и в каждом последующем сценарии рассматривается лишь часть множества потребителей предыдущего.

В табл. 1 представлены средние по 5 примерам каждой размерности показатели времени вычисления и числа просмотренных вершин для метода ветвей и границ, использующего описанный способ подсчета верхних границ. Отметим, что рост размерности задачи сопровождается лишь незна-

чительным ростом числа просматриваемых вершин. Это, по-видимому, объясняется способностью алгоритма быстро обнаруживать оптимальное решение, а также особенностью модели: в силу существенных отличий между сценариями спроса, число решений, способных хорошо себя проявлять во всех сценариях, крайне ограничено, и отклонения от оптимального решения приводят к ухудшению верхних оценок, позволяющему на начальных этапах ветвления определить подобные отклонения как бесперспективные. При этом с ростом размерности задачи увеличивается время решения задач SEP в вершинах дерева ветвления, а также число генерируемых с-отсечений, что приводит к быстрому росту общего времени работы. Несмотря на указанное обстоятельство, алгоритм показывает высокую эффективность, позволяя точно решать задачи с 25 местами возможного размещения предприятий со средним временем работы менее двух часов.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-41-09017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Береснев В.Л., Мельников А.А. Алгоритм генерации отсечений для дискретной задачи конкурентного размещения предприятий. Доклады Академии наук. 2018. V. 480. № 5. P. 515–518. <https://doi.org/10.1134/S1064562418030183>
2. Beresnev V., Melnikov A. Approximation of the competitive facility location problem with MIPs. *Computers & Operations Research*. 2019. V. 104. P. 139–148, <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.12.010>
3. Ashtiani M. Competitive location: A state-of-art review. *International Journal of Industrial Engineering Computations*. 2016. V. 7. № 1. P. 1–18. <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2015.8.002>
4. Aras N., Küçükaydın H. Bilevel Models on the Competitive Facility Location Problem. In: Mallozzi L., D'Amato E., Pardalos P. (eds) *Spatial Interaction Models*. Springer Optimization and Its Applications, vol 118. Springer, Cham. 2017. P. 1–19. https://doi.org/10.1007/978-3-319-52654-6_1
5. Karakitsiou A. Modeling discrete competitive facility location. Springer Cham, 2015, *SpringerBriefs in Optimization*, 54.
6. Mishra M., Singh S.P., Gupta M.P. Location of competitive facilities: a comprehensive review and future research agenda. *Benchmarking*, 2022. <https://doi.org/10.1108/BIJ-11-2021-0638>
7. Dempe S. Bilevel Optimization: Theory, Algorithms, Applications and a Bibliography, In: S. Dempe, A. Zemkoho (eds) *Bilevel Optimization: Advances and Next Challenges*, Springer International Publishing, Cham. 2020. P. 581–672. https://doi.org/10.1007/978-3-030-52119-6_20

UPPER BOUND FOR THE COMPETITIVE FACILITY LOCATION PROBLEM WITH DEMAND UNCERTAINTY

V. Beresnev^{a,b} and A. Melnikov^{a,b}

^a*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation*

^b*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.G. Romanov

We consider a competitive facility location problem with two competing parties operating in a situation of uncertain demand scenario. The problem to find the best solutions for the parties is formulated as a discrete bi-level mathematical programming problem. In the paper, we suggest a procedure to compute an upper bound for the objective function on subsets. The procedure could be employed in implicit enumeration schemes capable to compute an optimal solution for the problem under study. Within the procedure, additional constraints iteratively augment the high-point relaxation of the initial bi-level problem, what strengthens the relaxation and improves the upper bound's quality. New procedure to generate such cuts allows to construct the strongest cuts without enumerating the parameters encoding them.

Keywords: Bi-level programming, Stackelberg game, competitive facility location, pessimistic optimal

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ “СЖАТЫХ” ГАЗОВ НОУБЛА-АБЕЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

© 2023 г. А. А. Злотник^{1,2,*}, Т. А. Ломоносов^{1,2,**}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 12.05.2023 г.

После доработки 16.08.2023 г.

Принято к публикации 21.09.2023 г.

Рассматривается так называемая модель из четырех уравнений динамики гетерогенных сжимаемых бинарных смесей при уравнении состояния “сжатого” газа Нюбля-Абея. Используется ее квазигомогенная форма, возникающая после исключения объемных концентраций из искоемых функций и основанная на квадратном уравнении для общего давления компонент. Приводятся новые свойства этого уравнения и простая формула для квадрата скорости звука, предлагается альтернативный вывод формулы, связывающей ее с квадратом скорости звука Вуда, и формулируется уравнение баланса давления. Впервые дается регуляризация квазигазодинамического типа гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), строится реализующая ее явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема без лимитеров в 1D случае и приводятся численные результаты.

Ключевые слова: газовая динамика, гетерогенная бинарная газовая смесь, модель с четырьмя уравнениями, “сжатый” газ Нюбля-Абея, квазигазодинамическая регуляризация, явная по времени и симметричная по пространству схема

DOI: 10.31857/S2686954323600313, EDN: DEJANK

Существует иерархия моделей, описывающих динамику гетерогенных сжимаемых бинарных смесей, см. [1, 2] и ссылки в них. Уравнения баланса массы компонент, полного импульса и полной энергии смеси в простейшей из них односкоростной и однотемпературной модели из четырех уравнений имеют вид

$$\partial_t(\alpha_k r_k) + \operatorname{div}(\alpha_k r_k \mathbf{u}) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(0.5\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon) + \operatorname{div}((0.5\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon + p)\mathbf{u}) = \\ = \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь основные искоемые функции — плотность $r_k > 0$ и объемная доля $0 < \alpha_k < 1$ для k -й компо-

ненты смеси, $k = 1, 2$, общие скорость $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и абсолютная температура $\theta > 0$ смеси. Они зависят от $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ и $t \geq 0$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Операторы $\operatorname{div} = \nabla \cdot$ и $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ берутся по x , $\partial_t = \partial/\partial t$ и $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Символы $\otimes$ и $\cdot$ обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, дивергенция тензора берется по его первому индексу, и ниже $\langle \cdot \rangle$ — операция суммирования по индексу $k = 1, 2$. Дополнительные соотношения таковы

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k \rangle = 1, \quad \rho = \langle \alpha_k r_k \rangle, \quad \rho\varepsilon = \langle \alpha_k r_k \varepsilon_k(r_k, \theta) \rangle, \\ p = p_1(r_1, \theta) = p_2(r_2, \theta) > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где участвуют плотность ρ и удельная внутренняя энергия ε смеси, а также общее давление компонент смеси p , давление $p_k(r_k, \theta)$ и удельная внутренняя энергия $\varepsilon_k = \varepsilon_k(r_k, \theta)$ k -й компоненты, $k = 1, 2$. Дополнительно к уравнениям (1)–(3), первое и последнее алгебраические уравнения в (4) позволяют найти все искоемые функции.

¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik@hse.ru

**E-mail: tlomonosov@hse.ru

Берется уравнение состояния “сжатого” газа Ноубла-Абея (СГНА) [3] в виде

$$\begin{aligned} p_k(r_k, \theta) &= \frac{R_k r_k \theta}{1 - b_k r_k} - p_{*k}, \\ \varepsilon_k(r_k, \theta) &= c_{vk} \theta + \frac{p_{*k}(1 - b_k r_k)}{r_k} + \varepsilon_{0k}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $0 < r_k < b_k^{-1}$. Также $R_k > 0$, $b_k \geq 0$, $c_{vk} > 0$, $p_{*k} \geq 0$ и ε_{0k} – заданные физические постоянные, $k=1, 2$. Напомним, что $R_k = (\gamma_k - 1)c_{vk}$, где $\gamma_k > 1$ – показатель адиабаты k -й компонент, и положим $c_{pk} = \gamma_k c_{vk}$. При $b_k = 0$ охватывается более простое уравнение “сжатого” газа (СГ).

Слагаемые, связанные с фазовым переходом, опущены, но добавлен тепловой поток Фурье $-\mathbf{q}^F = \kappa \nabla \theta$ с $\kappa \geq 0$ (следуя [4]). Напомним, что $\mathbf{f}$ и Q отвечают заданным внешней силе и источнику тепла.

В [4, 5] для уравнений состояния СГ и СГНА было предложено перейти к другой форме модели из четырех уравнений, включающей только альтернативные плотности компонент $\rho_k = \alpha_k r_k$ и $\mathbf{u}$ и ε как искомые функции, но не α_k и r_k , $k=1, 2$, и с этой целью были даны нетривиальные выражения $p = p(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$ и $\theta = \theta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$. Поэтому эту форму можно назвать *квазигомогенной*, и она оказывается предпочтительнее для построения некоторых новых численных методов компьютерного моделирования течений, в частности, см. [4–7].

В данном сообщении приводятся новые свойства квадратного уравнения для p и простая формула для квадрата скорости звука c_s^2 , предлагается новый вывод формулы, связывающей его с квадратом скорости звука Вуда и формулируется уравнение баланса давления. Впервые выполняется регуляризация квазигазодинамического (КГД) типа [8, 9] гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), для ее реализации строятся явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству схема без лимитеров в 1D случае и приводятся численные результаты. Для упрощенной квазигидродинамической (КГидД) регуляризации дается уравнение баланса энтропии смеси с неотрицательным ее производством.

1. Напомним переход к квазигомогенной форме и выведем некоторые существенные вспомогательные формулы. Из уравнений состояния (5) последовательно получим

$$(\alpha_k - b_k \rho_k)(p_k + p_{*k}) = R_k \rho_k \theta, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{0k}) &= c_{vk} \rho_k \theta + (\alpha_k - b_k \rho_k) p_{*k} = \\ &= c_{vk} \rho_k \theta + \frac{R_k \rho_k p_{*k}}{p_k + p_{*k}} \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $\hat{\alpha}_k := \alpha_k(1 - b_k r_k) = \alpha_k - b_k \rho_k$ и $\rho b = \langle b_k \alpha_k r_k \rangle = \langle b_k \rho_k \rangle$, тогда $0 < \hat{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq 1$ и $\langle \hat{\alpha}_k \rangle = 1 - b\rho$. Так как $\langle \alpha_k \rangle = 1$ и $p_k = p$, получим далее

$$p = \frac{R\rho\theta - \langle \hat{\alpha}_k p_{*k} \rangle}{1 - b\rho}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon - \varepsilon_0) &= \langle \rho_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{0k}) \rangle = c_v \rho \theta + \langle \hat{\alpha}_k p_{*k} \rangle, \\ \rho(\varepsilon - \varepsilon_0) + (1 - b\rho)p &= \gamma c_v \rho \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\rho\varepsilon = \langle \rho_k \varepsilon_k \rangle$ и появляются соответствующие функции-коэффициенты такие, что

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon_0 &= \langle \rho_k \varepsilon_{0k} \rangle, \quad \rho R = \langle R_k \rho_k \rangle, \\ \rho c_v &= \langle c_{vk} \rho_k \rangle, \quad \gamma = (R/c_v) + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Из равенств (6), (7) и $\langle \alpha_k \rangle = 1$ выводим также формулы

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{R_k \rho_k}{p + p_{*k}} \right\rangle \theta &= 1 - b\rho, \\ \rho(\varepsilon - \varepsilon_0) &= \left(c_v \rho + \left\langle \frac{R_k \rho_k p_{*k}}{p + p_{*k}} \right\rangle \right) \theta. \end{aligned}$$

Умножив вторую формулу на $\langle R_k \rho_k / (p + p_{*k}) \rangle$, используя первую и разделив результат на $c_v \rho(1 - b\rho)$, выводим следующее рациональное уравнение для $p = p(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$:

$$\left\langle \frac{\sigma^{(k)}}{p + p_{*k}} \left(\frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)}{1 - b\rho} - p_{*k} \right) \right\rangle = 1, \quad (11)$$

$$\rho = \langle \rho_k \rangle, \quad \rho b = \langle b_k \rho_k \rangle,$$

$$\sigma^{(k)} = \sigma^{(k)}(\rho_1, \rho_2) := \frac{R_k \rho_k}{c_v \rho} > 0, \quad \langle \sigma^{(k)} \rangle = \gamma - 1. \quad (12)$$

Из этого уравнения следует квадратное уравнение

$$p^2 - \beta p - c = 0, \quad (13)$$

$$\beta := \left\langle \sigma^{(k)} \left(\frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)}{1 - b\rho} - p_{*k} \right) \right\rangle, \quad (14)$$

$$c := (\sigma^{(1)} p_{*2} + \sigma^{(2)} p_{*1}) \frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)}{1 - b\rho} - \gamma p_{*1} p_{*2}.$$

Пусть $d := \beta^2 + 4c$ – дискриминант уравнения (13). При $p_{*1} p_{*2} \neq 0$ свойство $d > 0$ и правильный выбор физического корня не очевидны и требуют анализа.

Заметим, что уравнения (11) и (13) не полностью эквивалентны. В частности, в случае $p_{*1} = p_{*2} = p_*$ единственный корень первого уравнения есть $p = (\gamma - 1)\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)/(1 - b\rho) - \gamma p_*$, тогда

как второе имеет дополнительный паразитический корень $p = -p_*$.

Утверждение 1. Пусть $\Delta_* := p_{*2} - p_{*1}$. Верны формулы $\beta = p_+ + p_-$, $c = -p_+p_- \geq 0$

$$p_+ = \frac{R\rho\theta - \langle \hat{\alpha}_k p_{*k} \rangle}{1 - b\rho} > 0,$$

$$p_- = -\frac{1}{1 - b\rho} \left(\hat{\alpha}_1 p_{*2} + \hat{\alpha}_2 p_{*1} + \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2}{c_V \rho \theta} \Delta_*^2 \right) \leq 0.$$

Как следствие, $d > 0$, $\sqrt{d} = p_+ - p_-$, и эти $p_{\pm}$ — стандартные корни $p_{\pm} = (\beta \pm \sqrt{d})/2$.

В силу этого утверждения p_+ — физический корень, а p_- — паразитический. Но формула и для p_- нужна для вывода ряда дополнительных свойств, см. утверждение 3 ниже.

Теперь можно перейти к квазигомогенной форме модели из четырех уравнений, состоящей из уравнений баланса массы компонент в виде

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

и полного импульса и полной энергии смеси (2), (3). Основными искомыми функциями становятся альтернативные плотности $\rho_k > 0$, скорость $\mathbf{u}$ и удельная внутренняя энергия ε смеси. Уравнения состояния (5) не используются, и теперь p и θ задаются как

$$p = p_+(\rho_1, \rho_2, \varepsilon) = (\beta + \sqrt{d})/2 > 0, \quad (16)$$

$$\theta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon) = (\rho(\varepsilon - \varepsilon_0) + (1 - b\rho)p)/(\gamma c_V \rho),$$

см. формулу (9); напомним, что здесь $d = \beta^2 + 4c$ (или см. альтернативную формулу в [5]), $c = \beta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$ и $\beta = \beta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$, введенными в (14), см. также (10) и (12). Подчеркнем, что эта новая система не содержит α_k и r_k , хотя в соответствии с формулами (6), $p_k = p_+$ и $r_k = \rho_k/\alpha_k$ их можно вычислить апостериори. В простейшем случае идеальных газов, т.е. при $p_{*k} = b_k = 0$, $k = 1, 2$, имеем $p_+ = R\rho\theta = R_1\rho_1\theta + R_2\rho_2\theta$ и $\alpha_k = R_k\rho_k/(R\rho)$, $k = 1, 2$, и гетерогенная модель становится эквивалентной гомогенной модели смеси с разными давлениями компонент $p_1 = R_1\rho_1\theta$ и $p_2 = R_2\rho_2\theta$, занимающих общий объем, что и объясняет успех последней в [10] и связанных с ней работах.

Стандартным образом можно последовательно вывести уравнения баланса полной массы, кинетической и внутренней энергий компонент

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (17)$$

$$0.5 \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + 0.5 \operatorname{div}(\rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u},$$

$$\partial_t (\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{u}) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) + Q. \quad (18)$$

Утверждение 2. Верны следующие формула для квадрата скорости звука и уравнение баланса для p_+

$$c_s^2 := \partial_p p_+ + \frac{p_+}{\rho^2} \partial_\varepsilon p_+ = \frac{\gamma(p_+ + p_{*1})(p_+ + p_{*2})}{(1 - b\rho)\rho\sqrt{d}} > 0, \quad (19)$$

$$\partial_t p_+ + \mathbf{u} \cdot \nabla p_+ + \rho c_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{(1 - b\rho)c_s^2}{c_p \theta} (\operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) + Q), \quad (20)$$

где производные ∂_p и ∂_ε берутся при постоянных ε_0 , $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ в (14) как в [1, 4] и $c_p = \gamma c_V$.

Доказательство выполняется дифференцированием уравнения (13) и с использованием утверждения 1, уравнения (18) и следующего уравнения

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\langle a_k \rho_k \rangle}{\langle c_k \rho_k \rangle} =$$

$$= \frac{1}{\langle c_k \rho_k \rangle^2} [\langle c_k \rho_k \rangle \langle a_k (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_k \rangle -$$

$$- \langle a_k \rho_k \rangle \langle c_k (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_k \rangle] = 0$$

для произвольных постоянных a_k и c_k , $k = 1, 2$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$), при условии $\langle c_k \rho_k \rangle \neq 0$, поскольку $(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_k = -\rho_k \operatorname{div} \mathbf{u}$ в силу уравнения баланса массы компонент (15).

Сопоставим два определения квадрата скорости звука в смесях.

Утверждение 3. Верна следующая формула

$$\frac{1}{\rho c_s^2} = \frac{1}{\rho c_{sW}^2} + \frac{c_{p1} \alpha_1 r_1 c_{p2} \alpha_2 r_2}{c_p \rho \theta} (\zeta_1 - \zeta_2)^2, \quad (21)$$

где c_{sW}^2 — квадрат хорошо известной скорости звука в смесях по Вуду и

$$\frac{1}{\rho c_{sW}^2} = \left\langle \frac{\alpha_k}{r_k c_{sk}^2} \right\rangle,$$

$$c_{sk}^2 = \frac{\gamma_k (p_k + p_{*k})}{r_k (1 - b_k r_k)} = \frac{(\gamma_k - 1) c_{pk} \theta}{(1 - b_k r_k)^2},$$

$$\zeta_k := \left(1 - \frac{1}{c_{pk}} \partial_\theta \varepsilon_k(\theta, p_k) \right) \frac{\theta}{p_k} = \frac{1}{c_{pk} \hat{r}_k}$$

с $\hat{r}_k := r_k/(1 - b_k r_k)$ и $k = 1, 2$.

Эта формула следует из утверждения 6 в [1], но, важно, что имеется другое замкнутое в себе и прямое доказательство, основанное лишь на данных выше рассуждениях и двух утверждениях. Оно состоит в последовательных преобразованиях правой части $\mathcal{F}$ в (21):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{\hat{\alpha}_2 \gamma_2 (\gamma_1 - 1) c_{p1} \hat{r}_1 + \hat{\alpha}_1 \gamma_1 (\gamma_2 - 1) c_{p2} \hat{r}_2}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) c_{p1} c_{p2} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \theta} - \frac{\langle \hat{\alpha}_k \rangle^2}{\rho c_p \theta} = \frac{\hat{\alpha}_2 R_1 \hat{r}_1 + \hat{\alpha}_1 R_2 \hat{r}_2}{R_1 R_2 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \theta} - \frac{\langle \hat{\alpha}_k \rangle^2}{\gamma c_v \rho \theta} = \\
&= \frac{\gamma \langle \hat{\alpha}_k \rangle p + \hat{\alpha}_1 p_{*2} + \hat{\alpha}_2 p_{*1} - \langle \hat{\alpha}_k \rangle^2 (p + p_{*1})(p + p_{*2}) / (c_v \rho \theta)}{\gamma (p + p_{*1})(p + p_{*2})} = \\
&= \frac{\langle \hat{\alpha}_k \rangle p + \hat{\alpha}_1 p_{*2} + \hat{\alpha}_2 p_{*1} + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Delta_*^2 / (c_v \rho \theta)}{\gamma (p + p_{*1})(p + p_{*2})} = \frac{(1 - bp)(p - p_-)}{\gamma (p + p_{*1})(p + p_{*2})} = \frac{1}{\rho c_s^2} \cdot [0, 1]
\end{aligned}$$

Детали преобразований опускаем.

Из утверждения 3 следует, что $c_s^2 \leq c_{sW}^2$. Отметим простое неравенство $c_{sk}^2 \leq \langle (\rho_k / \rho) c_{sk}^2 \rangle$ для произвольных $c_{sk}^2 > 0$, $k = 1, 2$, где равенство достигается только в случае $r_1 c_{s1}^2 = r_2 c_{s2}^2$.

2. Применим к квазигомогенной модели формальную процедуру регуляризации, данную в [11] для однокомпонентного газа и где было показано, что она легко приводит к КГД регуляризации из [9]. Эта процедура была недавно применена в [10] к системе уравнений типа Эйлера динамики односкоростной и однотемпературной гомогенной газовой смеси. В уравнениях баланса (15), (2) и (3) заменим соответственно $\rho_k \mathbf{u} \rightarrow \rho_k \mathbf{u} + \tau \partial_t (\rho_k \mathbf{u})$ и

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f} \rightarrow \\
&\rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \tau \partial_t (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) + \\
&+ \nabla(p + \tau \partial_t p) - (\rho + \tau \partial_t \rho) \mathbf{f}, \\
&(E + p) \mathbf{u} \rightarrow (E + p) \mathbf{u} + \tau \partial_t ((E + p) \mathbf{u}), \\
&\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rightarrow (\rho \mathbf{u} + \tau \partial_t (\rho \mathbf{u})) \cdot \mathbf{f},
\end{aligned}$$

где $E = 0.5 \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho \varepsilon$ — полная энергия смеси и $\tau > 0$ — параметр регуляризации, который может зависеть от всех искомым функций. Также добавим слагаемые $\operatorname{div} \Pi^{NS}$ и $\operatorname{div}(\Pi^{NS} \mathbf{u})$ в правые части уравнений (2) и (3) с тензором вязкости типа Навье—Стокса

$$\begin{aligned}
\Pi^{NS} &= \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbb{I}, \\
\nabla \mathbf{u} &:= \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n,
\end{aligned}$$

с коэффициентами вязкости $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ (возможно, искусственными) и единичным тензором n -го порядка $\mathbb{I}$.

В совокупности все эти замены ведут от исходной системы типа Эйлера—Фурье (15), (2) и (3) к ее следующей КГД регуляризации

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k (\mathbf{u} - \mathbf{w}_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \\
&= \operatorname{div} \Pi + (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \mathbf{f},
\end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t E + \operatorname{div}((E + p)(\mathbf{u} - \mathbf{w})) = \\
&= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^\tau + \Pi \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{f} + Q
\end{aligned} \quad (24)$$

с теми же неизвестными функциями. Эта система содержит регуляризующие скорости

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_k &:= \tau \rho_k^{-1} \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{w}}, \quad k = 1, 2, \\
\hat{\mathbf{w}} &= \tau ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho^{-1} \nabla p - \mathbf{f}),
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &:= \left\langle \frac{\rho_k}{\rho} \mathbf{w}_k \right\rangle = \frac{\tau}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{f}) = \\
&= \frac{\tau}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{w}},
\end{aligned} \quad (26)$$

слагаемое $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$ и регуляризующие вязкое напряжение и поток тепла

$$\begin{aligned}
\Pi^\tau &:= \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau \left(\mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{(1 - bp) c_s^2}{c_p \theta} Q \right), \\
-\mathbf{q}^\tau &:= \tau (\mathbf{u} \cdot (\rho \nabla \varepsilon - \rho^{-1} p \nabla \rho) - Q) \mathbf{u},
\end{aligned}$$

где можно переписать $\rho \nabla \varepsilon - \rho^{-1} p \nabla \rho = \nabla(\rho \varepsilon) - \rho^{-1} (\rho \varepsilon + p) \nabla \rho$. Вывод повторяет рассуждения из Приложения А в [10] и отличается лишь использованием более общего уравнения баланса давления (20) (при $\kappa = 0$) и общего слагаемого $\rho^{-1} p$ в выражении для $-\mathbf{q}^\tau$.

Регуляризованная КГД-система уравнений влечет дополнительные уравнения баланса массы, кинетической и внутренней энергий смеси

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho (\mathbf{u} - \mathbf{w})) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
&0.5 \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + 0.5 \operatorname{div}(\rho |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} - \mathbf{w})) + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \\
&= (\operatorname{div} \Pi) \cdot \mathbf{u} + (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u},
\end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t (\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon (\mathbf{u} - \mathbf{w})) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \\
&= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^\tau + p \mathbf{w}) + \Pi : \nabla \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} + Q,
\end{aligned} \quad (29)$$

которые выводятся аналогично соответствующим исходным уравнениям (17), (18).

Также остановимся на упрощенной регуляризованной КГидД системе уравнений

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}) \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \\ &= \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \hat{\Pi}^\tau) + \rho \mathbf{f}, \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p)(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) &= \\ &= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F + (\Pi^{NS} + \hat{\Pi}^\tau)\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{f} + Q,\end{aligned}$$

с упрощенной регуляризующей скоростью $\hat{\mathbf{w}}$ вместо $\mathbf{w}$ во всех слагаемых, вязким напряжением $\hat{\Pi}^\tau := \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}}$ вместо Π^τ и без регуляризующих слагаемых $\tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$ и $-\mathbf{q}^\tau$. Верны и уравнения баланса типа (27)–(29) с теми же перечисленными упрощениями.

Для k -й компоненты удельная энтропия $s_k(r_k, \varepsilon_k)$ определяется термодинамическими уравнениями $\partial_{r_k} s_k = -p_k/(r_k^2 \theta)$ и $\partial_{\varepsilon_k} s_k = 1/\theta$, $k = 1, 2$; явное выражение для s_k опускаем. Удельная энтропия смеси s такова, что $\rho s = \langle \rho_k s_k \rangle$.

Утверждение 4. Пусть $Q \geq 0$. Для регуляризованной КГидД системы уравнений верно уравнение баланса энтропии смеси с ее неотрицательным производством

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left(\rho s(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}) + \frac{1}{\theta} \mathbf{q}^F\right) &= \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T|_F^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu\right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{\theta} |\nabla \theta|^2 + \frac{\rho}{\tau} |\hat{\mathbf{w}}|^2 + Q \right\} \geq 0,\end{aligned}$$

где конкретные СГНА-уравнения состояния неважны и $|\cdot|_F$ – норма Фробениуса.

3. Обратимся к 1D случаю и введем равномерные основную $\bar{\omega}_h = \{x_i = -X + ih; 0 \leq i \leq N\}$ и вспомогательную $\omega_h^* = \{x_{i+1/2} = -X + (i + 0.5)h; 0 \leq i \leq N - 1\}$ сетки на $\bar{\Omega} = [-X, X]$, с шагом $h = 2X/N$, а также неравномерную сетку $\bar{\omega}^h = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{\bar{m}} = t_{fin}\}$ по времени с шагами $h_m = t_{m+1} - t_m$. Пусть $\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \{-X, X\}$ и $\bar{\omega}^h = \bar{\omega}^h \setminus \{t_{fin}\}$.

Пусть $H(\omega)$ – пространство функций, заданных на сетке ω . Для $v \in H(\bar{\omega}_h)$, $w \in H(\omega_h^*)$ и $y \in H(\bar{\omega}^\tau)$, введем разностные операторы

$$\begin{aligned}[v]_{i+1/2} &= (v_i + v_{i+1})/2, \quad \delta v_{i+1/2} = (v_{i+1} - v_i)/h, \\ v_{\pm, i+1/2} &= v_{i+(1 \pm 1)/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[w]_i^* &= (w_{i-1/2} + w_{i+1/2})/2, \quad \delta^* w_i = (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})/h, \\ \delta_i y^m &= (y^{m+1} - y^m)/h_m,\end{aligned}$$

где $v_i = v(x_i)$, $w_{i+1/2} = w(x_{i+1/2})$ и $y^m = y(t_m)$. Пусть далее $\hat{y}^m = y^{m+1}$.

Пусть для краткости $\mathbf{f} = 0$. Дискретизируем на $\omega_h \times \bar{\omega}^h$ регуляризованные КГД-уравнения баланса (22)–(24) в 1D случае следующей явной двух-слойной по времени и трехточечной симметричной по пространству схемой

$$\delta_t \rho_k + \delta^*([\rho_k]([u] - w_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (30)$$

$$\delta_t(\rho u) + \delta^*([\rho]([u] - w)[u] + [p]) = \delta^* \Pi, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}\delta_t(0.5 \rho u^2 + \rho \varepsilon) + \delta^*\{0.5 \rho u u_+ + \\ + [\rho \varepsilon] + [p])([u] - w) - 0.25 h^2 (\delta p) \delta u\} = \\ = \delta^*(-q + \Pi[u]) + [Q]^*.\end{aligned} \quad (32)$$

Основные искомые функции $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, u и ε (фактически $\rho \varepsilon$) вместе с функциями p и θ определены на основной сетке $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}^h$. Здесь p и θ определяются формулами (16), см. также выражения (12) и (14) для их коэффициентов; напомним, что $d = b^2 + 4c$.

Возьмем следующие дискретизации регуляризующих скоростей (25), (26) в виде

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{[\tau]}{[\rho_k]} [u] \delta(\rho_k u) + \hat{w}, \quad k = 1, 2, \\ \hat{w} &= \frac{[\tau]}{[\rho]} ([\rho] [u] \delta u + \delta p), \\ w &= \left\langle \frac{[\rho_k]}{[\rho]} w_k \right\rangle = \frac{[\tau]}{[\rho]} [u] \delta(\rho u) + \hat{w},\end{aligned}$$

а также дискретизации вязкого напряжения и теплового потока в виде

$$\begin{aligned}\Pi &= v \delta u + [u][\rho] \hat{w} + \\ &+ [\tau] \left([u] \delta p + [\rho c_s^2] \delta u - \frac{(1 - [b\rho])[c_s^2]}{[c_p][\theta]} Q \right), \\ -q &= \kappa \delta \theta + [\tau] \{ (\delta(\rho \varepsilon) - \\ &- [\rho]^{-1} ([\rho \varepsilon] + [p]) \delta p) [u]^2 - Q[u] \}.\end{aligned}$$

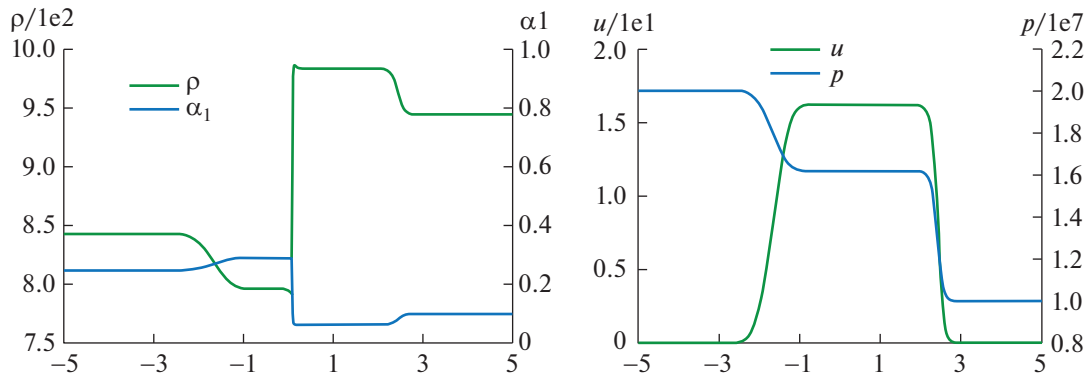


Рис. 1. Результаты расчета течения воды в воздух на основе КГД регуляризации.

Напомним, что c_s^2 задается второй формулой (19). Функции w_k , $\hat{w}$, w , Π , $v = (4/3)\mu + \lambda$, q , κ и Q определены на сетке $\bar{\omega}_h^* \times \bar{\omega}^h$, а функция τ определена на $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}^h$. Возьмем регуляризующий параметр $\tau = ah/(c_s + i_\tau|u|)$, зависящий от h , и искусственные коэффициенты $v = a_s[\tau][p]$ и $\kappa = a_{pr}[\tau][c_p][p]$, формально как в случае однокомпонентного газа [9], где $a > 0$ — параметр, $a_s \geq 0$ и $a_{pr}^{-1} > 0$ — числа Шмидта и Прандтля для смеси, используемые как настраиваемые численные параметры, и $i_\tau = 0$ или 1. Ниже $i_\tau = 0$.

Начальные значения ρ_1 , ρ_2 , u , $p\epsilon$ (или эквивалентные им) при $t = 0$ задаются на $\bar{\omega}_h$. Можно найти $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ из уравнения (30), $\hat{\rho}\hat{u}$ и затем $\hat{u}$ из уравнения (31), $0.5\hat{\rho}\hat{u}^2 + \hat{p}\epsilon$ и затем $\hat{p}\epsilon$ из уравнения (32), все на $\bar{\omega}_h$. В вычислениях ниже берем также граничные значения $\phi_0 = \phi_1$ и $\phi_N = \phi_{N-1}$ для $\phi = \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{u}$ и $\hat{p}\epsilon$.

Построенная пространственная дискретизация заметно проще энтропийно корректной в случае гомогенной смеси идеальных газов в [10] (она базируется на [12]). Но дискретизация уравнения баланса (24) в [10] основана на регуляризованной КГД многоскоростной и многотемпературной модели, пока не разработанной для гетерогенных смесей. Также здесь используются только стандартные усреднения ρ_1 , ρ_2 , ϵ .

В уравнении (32) нестандартные слагаемые с $u \cdot u_+$ (близкое к среднему геометрическому для u^2) и $-0.25h^2(\delta p)\delta u$ позволяют обеспечить более естественную форму важного дискретного уравнения баланса внутренней энергии смеси как в [12].

Утверждение 5. Верны следующие дискретные аналоги уравнений баланса массы, кинетической и внутренней энергий смеси (27)–(29):

$$\begin{aligned} \delta_t \rho + \delta^* j &= 0, \quad j := [\rho]([u] - w), \\ 0.5\delta_t(\rho u^2) - 0.5h\hat{\rho}(\delta_t u)^2 + \\ &+ 0.5\delta^*(ju \cdot u_+) + (\delta^*[p])u = (\delta^*\Pi)u, \\ \delta_t(p\epsilon) + 0.5h\hat{\rho}(\delta_t u)^2 + \delta^*(j[\epsilon]) &= \\ = -\delta^*q + [\Pi\delta u]^* - p\delta^*([u] - w) + [w\delta p]^* + [Q]^* \end{aligned}$$

на $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}^h$.

Применяется автоматический выбор шага по времени $h_m = \beta_0 h / \max_i(c_{si}^m + |u_i^m|)$, $0 \leq m \leq \bar{m} - 1$ (при $m = \bar{m} - 1$ равенство становится неравенством) с параметром $\beta_0 > 0$ типа Куранта. Отметим, что условия L^2 -диссипативности построенной схемы в случае однокомпонентного идеального газа следуют из результатов [13].

4. По построенной схеме было выполнено большое количество успешных тестовых расчетов. Здесь приведем результаты только двух из них, для краткости опустив единицы измерения величин. Во-первых, возьмем задачу об ударной трубе с течением воды в воздух, см. тест 4.4 в [14]. Рассматривается смесь идеального газа и воды как СГ, с постоянными идеального газа $(\gamma_1, R_1, p_{*1}) = (1.4, 288, 0)$ и постоянными СГ $(\gamma_2, c_{p2}, p_{*2}) = (2.8, 4186, 8.5 \times 10^8)$; здесь $b_k = \epsilon_{0k} = 0$, $k = 1, 2$. Начальные данные таковы: $(\alpha_1, u, p, \theta) = (0.25, 0.2 \times 10^7, 308.15)$ при $-5 \leq x < 0$ и $(0.1, 0, 10^7, 308.15)$ при $0 < x \leq 5$. Взяты численные параметры $(N, a_s, a_{pr}, a, \beta_0) = (2501, 1, 1, 4, 0.1)$. Функции ρ , α_1 и u , p при $t_{fin} = 0.006$ в качестве результатов показаны на рис. 1. Кроме того, массовая концентрация ρ_1/ρ кусочно-постоянна и равна примерно 0.6682 и 0.1193 слева и справа от разрыва. В данном тесте возможен и выбор $a_s = 0$, что лишь немного ухудшает качество вычисления ρ, α_1 . Результаты для упрощенной схемы, отвечающей

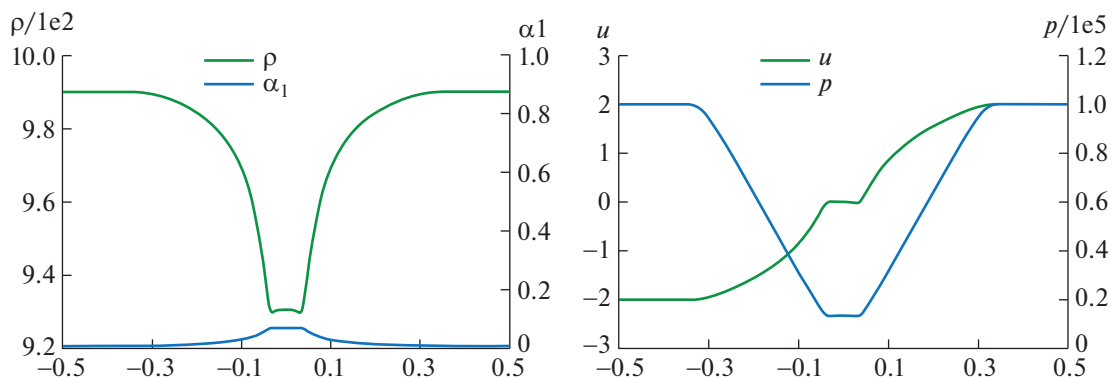


Рис. 2. Результаты расчета течения с кавитацией на основе КГидД регуляризации.

описанной выше КГидД регуляризации, существенно хуже, хотя числа Маха малы (меньше 0.065); в целом сфера ее успешной применимости заметно уже.

Во-вторых, промоделируем начальную стадию течения с кавитацией в трубе, см. тест 8.2.1 в [7]. Берутся две фазы воды, а именно, 1% водяного пара и 99% жидкой воды, и для них применяются соответственно уравнения состояния СГ и СГНА с параметрами $(\gamma_1, p_{*1}, \epsilon_{01}, c_{V1}, b_1) = (1.467, 0, 2077616, 955, 0)$ и $(\gamma_2, p_{*2}, \epsilon_{02}, c_{V2}, b_2) = (1.187, 7.028 \times 10^8, -1177788, 3610, 6.61 \times 10^{-4})$. Начальные данные имеют вид $(\alpha_1, u, p, \theta) = (0.01, 2\operatorname{sgn} x, 10^5, 353)$ при $|x| \leq 0.5$. Выбраны численные параметры $(N, a_S, a_{Pr}, a, \beta_0) = (1001, 1, 1, 0.8, 0.2)$. В данной задаче числа Маха снова малы (меньше 0.07), и применение не только КГД, но и КГидД регуляризации было успешным. Результаты при $t_{fin} = 0.003$ продемонстрированы на рис. 2. На нем функции ρ, α_1, p являются четными, а u — нечетной. Кроме того, массовая концентрация ρ_1/ρ приближенно постоянна и равна 0.6416×10^{-5} . В обоих тестах результаты хорошо согласуются с приведенными в указанных работах.

Более подробно результаты для смесей “сжатых” газов даны в [15]. Хорошо известно, что данная модель смесей довольно легко расширяется на важный случай с фазовыми переходами [4–7]; его вычислительный анализ на основе построенных регуляризаций должен стать предметом последующих статей.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 22-11-00126 (А.А. Злотник, разделы 1 и 2) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению с Минобрнауки РФ, проект 075-15-2022-283 (оба автора, разделы 3 и 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flåtten T., Morin A., Munkejord S.T. // SIAM J. Appl. Math. 2010. V. 70. P. 2861–2882.
2. Zhang C., Menshov I., Wang L., Shen Z. // J. Comput. Phys. 2022. V. 466, article 111356.
3. Le Métayer O., Saurel R. // Phys. Fluids. 2016. V. 28. P. 046102.
4. Le Martelot S., Saurel R., Nkonga B. // Int. J. Multiphase Flow. 2014. V. 66. P. 62–78.
5. Saurel R., Boivin P., Le Métayer O. // Comput. Fluids. 2016. V. 128. P. 53–64.
6. Chiapolino A., Boivin P., Saurel R. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2017. V. 83. P. 583–605.
7. Pelanti M. // Int. J. Multiphase Flow. 2022. V. 153, article 104097.
8. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
9. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
10. Zlotnik A., Lomonosov T. // Entropy. 2023. V. 25, article 158.
11. Злотник А.А. // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.
12. Злотник А.А. // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 7. С. 1304–1316.
13. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 375–380.
14. Li Q., Fu S. // Comput. Math. Appl. 2011. V. 61. P. 3639–3652.
15. Zlotnik A., Lomonosov T. // Chaos. 2023. V. 33, article 113128.

REGULARIZED EQUATIONS FOR DYNAMICS OF THE HETEROGENEOUS BINARY MIXTURES OF THE NOBLE-ABEL STIFFENED-GASES AND THEIR APPLICATION

A. A. Zlotnik^{a,b} and T. A. Lomonosov^{a,b}

^a*Higher School of Economics University, Moscow, Russia*

^b*Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We consider the so-called four-equation model for dynamics of the heterogeneous compressible binary mixtures with the Noble-Abel stiffened-gas equations of state. We exploit its quasi-homogeneous form arising after excluding the volume concentrations from the sought functions and based on a quadratic equation for the common pressure of the components. We present new properties of this equation and a simple formula for the squared speed of sound, suggest an alternative derivation for a formula relating it to the squared Wood speed of sound and state the pressure balance equation. For the first time, we give quasi-gasdynamic-type regularization of the heterogeneous model (in the quasi-homogeneous form), construct explicit two-level in time and symmetric three point in space finite-difference scheme without limiters to implement it in the 1D case and present numerical results.

Keywords: gas dynamics, heterogeneous binary gas mixture, four-equation model, Noble-Abel stiffened-gas, quasi-gasdynamic regularization, explicit in time and symmetric in space scheme

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2023 г. Академик РАН В. Г. Романов^{1,*}

Поступило 10.05.2023 г.

После доработки 15.09.2023 г.

Принято к публикации 18.10.2023 г.

В работе дается оценка устойчивости решения задачи об определении распределенного изотропно-го источника для стационарного уравнения переноса излучения. Ранее оценки устойчивости для этой задачи были найдены в частном случае задачи эмиссионной томографии, когда оператор рассеяния отсутствует, а также в более общем случае при дополнительных, и трудных для проверки, условиях на коэффициент абсорбции и ядро оператора рассеяния. В настоящей работе предлагается новый и достаточно простой способ получения оценки устойчивости рассматриваемой задачи. Уравнение переноса рассматривается внутри круга в двумерном пространстве. В прямой задаче принимается, что входящее излучение отсутствует. В обратной задаче для определения источника на части границы рассматриваемой области задаются данные о решении прямой задачи, отвечающие выходящему излучению. Полученный в работе результат можно использовать для оценки суммарной плотности распределенных источников радиации.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, задача об источнике, оценка устойчивости

DOI: 10.31857/S2686954323600271, **EDN:** CQRKFI

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $u = u(x, \theta)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $v(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ – открытый круг радиуса R с центром в начале координат, с границей $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R\}$. Обозначим

$$\Omega = D \times [0, 2\pi], \quad Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

$$S_+(\theta) = \{x \in S \mid x \cdot v(\theta) > 0\},$$

$$S_-(\theta) = \{x \in S \mid x \cdot v(\theta) \leq 0\}.$$

Рассмотрим уравнение переноса

$$Lu \equiv \nabla u \cdot v(\theta) + \sigma(x)u - Ku = f(x), \quad (x, \theta) \in \Omega, \quad (1)$$

в котором K – оператор рассеяния,

$$Ku = \int_0^{2\pi} K(x, \theta, \theta') u(x, \theta') d\theta'.$$

Уравнение (1) описывает процесс переноса излучения в тонкой пластине. Будем полагать, что $\sigma(x)$, $f(x)$, $K(x, \theta, \theta')$, $K_\theta(x, \theta, \theta')$ – гладкие функ-

ции $x \in \bar{D}$, $\bar{D} = D \cup S$ и $\theta \in [0, 2\pi]$, 2π -периодические по переменным θ, θ' и, кроме того, $K(x, \theta, \theta')$, $K_\theta(x, \theta, \theta')$ суммируемы с квадратом по переменной $\theta' \in [0, 2\pi]$. При заданных $\sigma(x)$, $f(x)$ и $K(x, \theta, \theta')$ поставим для уравнения (1) краевую задачу с нулевыми данными на $S_-(\theta)$:

$$u|_{S_-(\theta)} = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Физически это условие означает отсутствие входящего в область D излучения. Задача (1), (2) является корректной задачей теории рассеяния. Обращение дифференциальной части оператора L , с учетом данных (2), сводит ее к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $u(x, \theta)$. Отсюда, в частности, следует, что прямая задача имеет единственное, 2π -периодическое по переменной θ , обобщенное решение класса $C(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = \bar{D} \times [0, 2\pi]$, при условии, что $\sigma, f \in C(\bar{D})$, $K \in C(\bar{\Omega}) \times L^2(0, 2\pi)$, и норма оператора K достаточно мала. Это решение устойчиво относительно вариаций нормы $f(x)$, гладкость его повышается при повышении гладкости коэффициентов $\sigma(x)$, $f(x)$ и ядра $K(x, \theta, \theta')$.

Ниже мы будем рассматривать обратную задачу о восстановлении функции $f(x)$ при заданных функциях $\sigma(x)$ и $K(x, \theta, \theta')$, предполагая, что на

¹Институт математики им С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: romanov@math.nsc.ru

$S_+(\theta)$ задано выходящее излучение для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Другими словами, считается заданной функция

$$h(\varphi, \theta) = u|_{x=Rv(\varphi)}, \quad Rv(\varphi) \in S_+(\theta), \quad (\varphi, \theta) \in Q, \quad (3)$$

требуется по ней найти $f(x)$.

Определение. Решением обратной задачи назовем функцию $f \in C(\overline{D})$, такую, что решение прямой задачи (1), (2) удовлетворяет условию (3).

Заметим, что существование следа решения задачи (1), (2) на множестве $S_+(\theta)$, а значит и функции $h(\varphi, \theta)$ для $v(\varphi) \cdot v(\theta) > 0$, следует из сказанного выше о принадлежности функции $u(x, \theta)$ классу $C(\overline{\Omega})$.

При $K(x, \theta, \theta') \equiv 0$ эта задача носит название задачи *эмиссионной томографии* (см. [1]) и имеет практические приложения в медицине. Вопросы единственности и устойчивости ее решения изучались в работах [2–4]. В статьях [5–7] получены формулы обращения. Задача эмиссионной томографии является частным случаем задачи интегральной геометрии на семействе прямых линий. При этом интегралы от функции $f(x)$ задаются с экспоненциальным весом. Для стационарного и нестационарного уравнений переноса излучения выполнены исследования различных обратных задач, связанных с определением функции $\sigma(x)$ и ядра оператора K . Задача об источнике для полного уравнения переноса изучалась в работах [8–12]. В частности, в работах [11, 12] исследованы вопросы разрешимости прямой и обратной задач и получены оценки устойчивости в обратной задаче. Однако при этом на коэффициент поглощения и ядро рассеяния наложены довольно сложные для проверки условия, типа их принадлежности некоторому плотному множеству, для которого прямая задача однозначно разрешима. Остался открытым и вопрос о том, каким образом постоянная в оценке устойчивости зависит от коэффициентов уравнения.

В настоящей работе построена оценка устойчивости решения обратной задачи (1)–[3] в предположении, что решение обратной задачи существует. Эта оценка получена при определенных ограничениях на коэффициент поглощения $\sigma(x)$, ядро рассеяния $K(x, \theta, \theta')$ и функцию $f(x)$, более жестких, чем те, которые были указаны ранее (см. теорему 1). При этих условиях найдено явное значение постоянной в оценке устойчивости.

2. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ

Учитывая условие (2), определим функцию $\hat{h}(\varphi, \theta)$ формулой

$$\hat{h}(\varphi, \theta) = \begin{cases} h(\varphi, \theta), & v(\varphi) \cdot v(\theta) > 0, \\ 0, & v(\varphi) \cdot v(\theta) \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Эта формула задает функцию $\hat{h}(\varphi, \theta)$ на всем множестве $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. В дальнейшем принимается, что $K(x, \theta, \theta')$ и $K_\theta(x, \theta, \theta')$ являются гладкими функциями переменных x и θ , 2π -периодическими по переменной θ и квадратично суммируемыми по θ' . Обозначим

$$K_0^2 = \max_{x \in D} \int_Q K^2(x, \theta, \theta') d\theta d\theta',$$

$$K_1^2 = \max_{x \in D} \int_Q K_\theta^2(x, \theta, \theta') d\theta d\theta',$$

$$\lambda_0 = \frac{4\sigma_0^2}{1 - 4R^2\sigma_0^2 + \sqrt{(1 - 4R^2\sigma_0^2)^2 - 8R^2\sigma_0^2}}.$$

Ниже дается основной результат.

Теорема 1. Пусть $\sigma, f \in C^2(\overline{D})$, $\text{supp} f(x) \subset D$, $K \in C^2(\overline{\Omega}) \times L^2(0, 2\pi)$, $K_\theta \in C^1(\overline{\Omega}) \times L^2(0, 2\pi)$, и выполнены условия

$$0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_0 \in \overline{D}; \quad R\sigma_0 \leq \frac{1}{2(2 + \sqrt{2})}, \quad (5)$$

$$2RK_1 < 1, \quad 2RK_0 < 1.$$

Тогда для функции $f(x)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \int_D f^2(x) dx \leq \\ & \leq \frac{3(\lambda_0 R^2 + \sqrt{\lambda_0^2 R^4 + 1})(1 + 2R^2(\sigma_0^2 + K_0^2))}{4\pi(1 - 4R^2 K_1^2)} \times \\ & \times \int_Q [\hat{h}_\varphi^2(\varphi, \theta) + \hat{h}_\theta^2(\varphi, \theta)] d\varphi d\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

в которой функция $\hat{h}(\varphi, \theta)$ определена формулой (4).

Приведем схему доказательства. Из предположений теоремы о гладкости функций $\sigma(x)$, $f(x)$ и $K(x, \theta, \theta')$ следует, что $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\hat{h} \in C^2(Q)$, если $2RK_0 < 1$.

Непосредственные вычисления приводят к тождеству

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\nabla u(x, \theta) \cdot v_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} Lu \equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta} [(\nabla u(x, \theta) \cdot v)(\nabla u(x, \theta) \cdot v_\theta)] + \\ &+ (u_\theta u_{x_2})_{x_1} - (u_\theta u_{x_1})_{x_2} + |\nabla u(x, \theta)|^2 + \\ &+ 2(\nabla u(x, \theta) \cdot v_\theta)[\sigma(x)u_\theta(x, \theta) - K_\theta u]. \end{aligned}$$

В случае, когда $\sigma(x) = 0$ и $K(x, \theta, \theta') = 0$, это тождество получено в работе [13]. Легко проверяется еще одно тождество

$$0 = -2(x \cdot v(\theta))u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} Lu \equiv -\operatorname{div}[(x \cdot v(\theta))u_\theta^2 v(\theta)] - \\ - 2(x \cdot v(\theta))u_\theta (\nabla u \cdot v_\theta) + [1 - 2\sigma(x)(x \cdot v(\theta))]u_\theta^2 + \\ + 2(x \cdot v(\theta))u_\theta K_\theta u.$$

Умножая его на $\lambda > 0$ и складывая с предыдущим, находим, что

$$0 = 2[(\nabla u \cdot v_\theta) - \lambda(x \cdot v(\theta))u_\theta] \frac{\partial}{\partial \theta} Lu \equiv \\ \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} [(\nabla u(x, \theta) \cdot v)(\nabla u(x, \theta) \cdot v_\theta)] + (u_\theta u_{x_2})_{x_1} - \\ - (u_\theta u_{x_1})_{x_2} - \operatorname{div}[\lambda(x \cdot v(\theta))u_\theta^2 v(\theta)] + (\nabla u \cdot v)^2 + \\ + \{\nabla u \cdot v_\theta + [\sigma(x) - \lambda(x \cdot v(\theta))]u_\theta - K_\theta u\}^2 + \\ + \{\lambda[1 - 2\sigma(x)(x \cdot v(\theta))] - \\ - [\sigma(x) - \lambda(x \cdot v(\theta))]^2\}u_\theta^2 + 2\sigma(x)u_\theta(K_\theta u) - (K_\theta u)^2. \quad (7)$$

Имеют место следующие неравенства

$$\lambda[1 - 2\sigma(x)(x \cdot v(\theta))] - [\sigma(x) - \lambda(x \cdot v(\theta))]^2 \geq \\ \geq \lambda(1 - 2R\sigma_0) - (\sigma_0 + \lambda R)^2, \\ 2\sigma(x)u_\theta(K_\theta u) - (K_\theta u)^2 \geq -[\sigma_0^2 u_\theta^2 + 2(K_\theta u)^2] \geq \\ \geq -\left[\sigma_0^2 u_\theta^2 + 2K_2^2(x, \theta) \int_0^{2\pi} u^2(x, \theta) d\theta\right],$$

в которых

$$K_2^2(x, \theta) = \int_0^{2\pi} K_\theta^2(x, \theta, \theta') d\theta'.$$

Используя эти неравенства и убирая из (7) неотрицательный член, содержащий $\nabla u \cdot v_\theta$, заменим (7) неравенством

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [(\nabla u(x, \theta) \cdot v)(\nabla u(x, \theta) \cdot v_\theta)] + \\ + (u_\theta u_{x_2})_{x_1} - (u_\theta u_{x_1})_{x_2} - \operatorname{div}[\lambda(x \cdot v(\theta))u_\theta^2 v(\theta)] + \\ + (\nabla u \cdot v)^2 + \{\lambda(1 - 2R\sigma_0) - \\ - (\sigma_0 + \lambda R)^2 - \sigma_0^2\}u_\theta^2 - 2K_2^2(x, \theta) \int_0^{2\pi} u^2(x, \theta) d\theta \leq 0. \quad (8)$$

Выберем в качестве λ наименьший положительный корень уравнения

$$\lambda(1 - 2R\sigma_0) - (\sigma_0 + \lambda R)^2 - \sigma_0^2 = 0.$$

Это можно сделать при выполнении условия (5), что $R\sigma_0 \leq \frac{1}{2(2+\sqrt{2})}$. Тогда в качестве λ можно взять

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{2R^2} (1 - 4R\sigma_0 - \sqrt{(1 - 4R\sigma_0)^2 - 8R^2\sigma_0^2}).$$

При этом неравенство (8) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [(\nabla u(x, \theta) \cdot v)(\nabla u(x, \theta) \cdot v_\theta)] + (u_\theta u_{x_2})_{x_1} - \\ - (u_\theta u_{x_1})_{x_2} - \operatorname{div}[\lambda_0(x \cdot v(\theta))u_\theta^2 v(\theta)] - \\ - 2K_2^2(x, \theta) \int_0^{2\pi} u^2(x, \theta) d\theta \leq 0. \quad (9)$$

Проинтегрируем неравенство (9) по всем $\theta \in [0, 2\pi]$ и по $x \in D$. Тогда первое слагаемое обратится в нуль в силу 2π -периодичности функций, стоящих под знаком производной по θ . Применяя к дивергентной части формулу Грина, приходим к неравенству

$$\int_Q [\hat{h}_\varphi(\varphi, \theta) \hat{h}_\theta(\varphi, \theta) - \lambda_0 R^2 \hat{h}_\theta^2(\varphi, \theta) (v \cdot n(\varphi))] d\varphi d\theta + \\ + \int_\Omega [(\nabla u \cdot v)^2 - 2K_1^2 u^2(x, \theta)] dx d\theta \leq 0, \quad (10)$$

в котором $n(\varphi)$ — внешняя нормаль к S в точке $x = Rv(\varphi)$, функция $\hat{h}(\varphi, \theta)$ определена формулой (4), постоянная K_1^2 вычисляется по формуле

$$K_1^2 = \sup_{x \in D} \int_0^{2\pi} K_2^2(x, \theta) d\theta = \sup_{x \in D} \int_Q K_\theta^2(x, \theta, \theta') d\theta d\theta'.$$

Оценим $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ через аналогичную норму функции $\nabla u \cdot v(\theta)$. Пусть $\xi_1(x, \theta)$ и $\xi_2(x, \theta)$ точки пересечения прямой $\xi = x + sv(\theta)$ с окружностью S , $\xi_1(x, \theta) = x + s_1(x, \theta)v(\theta)$, $\xi_2(x, \theta) = x + s_2(x, \theta)v(\theta)$. Здесь

$$s_1(x, \theta) = -(x \cdot v(\theta)) - \sqrt{(x \cdot v(\theta))^2 - |x|^2 + R^2} < 0, \\ s_2(x, \theta) = -(x \cdot v(\theta)) + \sqrt{(x \cdot v(\theta))^2 - |x|^2 + R^2} > 0.$$

Тогда

$$u(x, \theta) = \int_{s_1(x, \theta)}^0 (\nabla_x u(x + sv(\theta), \theta) \cdot v(\theta)) ds, \quad (x, \theta) \in \Omega, \\ u^2(x, \theta) = \left(\int_{s_1(x, \theta)}^0 (\nabla_x u(x + sv, \theta) \cdot v(\theta)) ds \right)^2 \leq \\ \leq -s_1(x, \theta) \int_{s_1(x, \theta)}^0 |\nabla_x u(x + sv(\theta), \theta) \cdot v(\theta)|^2 ds.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\int_\Omega u^2(x, \theta) dx d\theta \leq 2R^2 \int_\Omega |\nabla u(x, \theta) \cdot v(\theta)|^2 dx d\theta. \quad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) находим, что

$$\int_0 [\hat{h}_\varphi(\varphi, \theta) \hat{h}_\theta(\varphi, \theta) - \lambda_0 R^2 \hat{h}_\theta^2(\varphi, \theta) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\varphi))] d\varphi d\theta + \\ + (1 - 4R^2 K_1^2) \int_\Omega (\nabla u(x, \theta) \cdot \mathbf{v}(\theta))^2 dx d\theta \leq 0. \quad (12)$$

Воспользуемся алгебраическими соотношениями

$$\lambda_0 R^2 b^2 - ab \leq \frac{1}{2} [\varepsilon a^2 + (2\lambda_0 R^2 + \varepsilon^{-1}) b^2] = \frac{\varepsilon}{2} (a^2 + b^2)$$

справедливыми при $\varepsilon = \lambda_0 R^2 + \sqrt{\lambda_0^2 R^4 + 1}$. Тогда, при условии, что выполнено неравенство $4R^2 K_1^2 < 1$, из (12) следует оценка

$$\int_\Omega (\nabla u(x, \theta) \cdot \mathbf{v}(\theta))^2 dx d\theta \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2(1 - 4R^2 K_1^2)} \int_0 [\hat{h}_\varphi^2(\varphi, \theta) + \hat{h}_\theta^2(\varphi, \theta)] d\varphi d\theta. \quad (13)$$

Кроме того, из оценок (13) и (11) следует неравенство

$$\int_\Omega (\mathbf{K}u)^2 dx d\theta \leq 2R^2 K_0^2 \int_\Omega |\nabla u(x, \theta) \cdot \mathbf{v}(\theta)|^2 dx d\theta \leq \\ \leq \frac{R^2 K_0^2 \varepsilon}{1 - 4R^2 K_1^2} \int_0 [\hat{h}_\varphi^2(\varphi, \theta) + \hat{h}_\theta^2(\varphi, \theta)] d\varphi d\theta, \quad (14)$$

в котором

$$K_0^2 = \sup_{x \in D} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K^2(x, \theta, \theta') d\theta d\theta'.$$

Используя неравенства (13), (14) и уравнение (1), находим, что

$$\int_D f^2(x) dx \leq \frac{3}{2\pi} \int_\Omega (|\nabla u(x, \theta) \cdot \mathbf{v}(\theta)|^2 + \sigma_0^2 u^2(x, \theta) + \\ + (\mathbf{K}u)^2) dx d\theta \leq \frac{3\varepsilon(1 + 2R^2(\sigma_0^2 + K_0^2))}{4\pi(1 - 4R^2 K_1^2)} \times \\ \times \int_0 [\hat{h}_\varphi^2(\varphi, \theta) + \hat{h}_\theta^2(\varphi, \theta)] d\varphi d\theta. \quad (15)$$

Заметим, что

$$\lambda_0 = \frac{4\sigma_0^2}{1 - 4R^2\sigma_0^2 + \sqrt{(1 - 4R^2\sigma_0^2)^2 - 8R^2\sigma_0^2}}.$$

Полученное выше неравенство (15) приводит к оценке (6).

Простым следствием теоремы 1 является теорема единственности решения рассматриваемой обратной задачи об определении источника. В силу линейности этой задачи, теорема единственности может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1, если $h(\varphi, \theta) \equiv 0$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in D$.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаттнер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир. 1990. 279 с.
2. *Finch D.V.* Uniqueness for attenuated X-ray transform in the physical range // *Inverse Problems*. 1986. V. 2. P. 197–203.
3. *Мухометов Р.Г.* Оценка устойчивости решения одной задачи компьютерной томографии // *Вопросы корректности задач анализа*. Новосибирск. Изд-во: Институт математики СО АН СССР. 1989. С. 122–124.
4. *Шарафутдинов В.А.* О задаче эмиссионной томографии для неоднородных сред // *Доклады РАН*. 1992. Т. 326. № 2. С. 446–448.
5. *Арбузов Е.М., Бухгейм А.Л., Казанцев С.Г.* Двумерная проблема томографии и теория А-аналитических функций // *Алгебра, геометрия, анализ и математическая физика* (ред: Решетняк Ю.Г., Бокунь Л.А., Водопьянов С.К., Тайманов И.А.). Новосибирск. Изд-во: Институт математики СО РАН. 1997. С. 6–20.
6. *Novikov R.G.* An inversion formula for attenuated X-ray transformation // *Ark. Mat.* 2002. V. 40. P. 145–167.
7. *Natterer F.* Inversion of the attenuated Radon transform // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 113–119.
8. *Larsen E.W.* The inverse source problem in radiative transfer // *J. Quant. Spect. Radiat. Transfer*. 1975. V. 15. P. 1–5.
9. *Siewert C.E.* An inverse source problem in radiative transfer // *J. Quant. Spect. Radiat. Transfer*. 1993. V. 50. P. 603–609.
10. *Шарафутдинов В.А.* Обратная задача об определении источника в стационарном уравнении переноса на римановом многообразии // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. 1997. Т. 239. С. 236–242.
11. *Bal G., Tamaskan A.* Inverse source problem in transport equations. *Siam J. Math. Anal.* 2007. V. 39. № 1. P. 57–76.
12. *Stefanov P., Uhlmann G.* An inverse source problem in optical molecular imaging // *Analysis and PDE*. 2008. V. 1. № 1. P. 115–126.
13. *Мухометов Р.Г.* Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // *Доклады АН СССР*. 1977. Т. 232. № 1. С. 32–35.

A STABILITY ESTIMATE IN THE SOURCE PROBLEM FOR THE RADIATIVE TRANSFER EQUATION

Academician of the RAS V. G. Romanov^a

^a*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation*

It is given a stability estimate of a solution of a source problem for the stationary radiative transfer equation. It is suppose that the source is an isotropic distribution. Earlier stability estimates for this problem were known in a partial case of the emission tomography problem only, when the scattering operator vanishes, and for the complete transfer equation under additional and difficult in checking conditions for the absorption coefficient and the scattering kernel. In the present work, we suggest a new and enough simple approach for obtaining a stability estimate for the problem under the consideration. The transfer equation is considered in a circle of the two-dimension space. In the forward problem, it is assumed that incoming radiation is absent. In the inverse problem for recovering the unknown source some data for solutions of the forward problem related to outgoing radiation are given. The obtained result can be used for an estimation of the summary density of distributed sources of the radiation.

Keywords: radiative transfer equation, source problem, stability estimate

УДК 517.9

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АСИМПТОТИКАХ БАРЕНБЛАТТА–ЗЕЛЬДОВИЧА

© 2023 г. В. А. Костин^{1,*}, Д. В. Костин^{1,2,**}, А. В. Костин^{1,***}

Представлено академиком РАН В.П. Масловым

Поступило 11.07.2023 г.

После доработки 05.09.2023 г.

Принято к публикации 18.10.2023 г.

Понятие “промежуточной асимптотики” для решения эволюционного уравнения с начальными данными и связанного с ними решения без начальных условий введено Г.Н. Баренблаттом и Я.Б. Зельдовичем в связи с расширением понятия “строгого детерминизма” в статистической физике и квантовой механике. Здесь, по утверждению В.П. Маслова, для аксиоматизации математической теории надо еще знать, каким условиям должны удовлетворять начальные решения задачи. В работе показывается, что корректная разрешимость задачи без начальных условий для дробно-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве является необходимым, но не достаточным условием “промежуточной асимптотики”. Приводятся примеры “промежуточной асимптотики”.

Ключевые слова: промежуточные асимптотики, корректные задачи, задача Коши, уравнения без начальных условий, сильно непрерывные полугруппы, дробные степени операторов

DOI: 10.31857/S2686954323600763, **EDN:** CYZJAQ

Г.Н. Баренблатт и Я.Б. Зельдович, обращая внимание на важность задач без начальных условий, описывающих периодические и переходные процессы так давно, что начальные данные практически не оказывают влияние на поведение решения в момент наблюдения, заключают, что это связано с расширением понятия и “строгого детерминизма”, обязанного успехам статической физики и квантовой механики в [1], для уравнений квантовой механики.

В.П. Маслов, обсуждая постановку задачи Коши для уравнений квантовой механики в [5] стр. 85, говорит, что для того чтобы аксиоматизировать математическую теорию квантовой механики, надо еще знать, каким условиям должны удовлетворять начальные данные решения задачи.

Таким образом, ставится постановка вопроса о свойствах явления, которые не зависят от деталей в начальных условиях. Но такая независимость возможна лишь по истечении достаточного времени.

То есть, в таком случае, можно говорить об асимптотике решений по времени, стремящемся к бесконечности. Поэтому в [1] такие асимптотики называют промежуточными, а соответствующие задачи без начальных условий “вырожденными”.

Однако для того, чтобы решение вырожденной задачи являлось промежуточной асимптотикой, необходимо, чтобы оно было устойчивым относительно возмущений, т.е. такая задача должна быть корректной в некотором классе функций.

Установлению этого факта для некоторых уравнений в банаховом пространстве посвящена данная заметка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$ и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$, плотной в E .

Обозначим через $C_\mu(E, R)$ банахово пространство вектор-функций $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = R$, со значениями в E с нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{t \in R} \|e^{-\mu t} f(t)\|, \quad \mu \geq 0. \quad (1)$$

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия

*E-mail: vlkostin@mail.ru

**E-mail: dvk605@mail.ru

***E-mail: leshakostin@mail.ru

Напомним, что сильно непрерывная полугруппа линейных операторов $U(s)$, $s \geq 0$ (C_0 -полугруппа) удовлетворяет условиям

1. $U(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$
2. $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$
3. $\lim_{s \rightarrow 0} \|U(s)\varphi - \varphi\| = 0$.

Для C_0 -полугруппы соотношением

$$\left. \frac{dU(s)}{ds} \right|_{s=0} \varphi = A\varphi$$

определяется производящий оператор A с областью определения $D(A)$, плотный в E .

Применяя дробную производную Маршо порядка $\alpha \in (0, 1)$

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty s^{-(1+\alpha)} [u(t-s) - u(s)] ds, \quad (2)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t) + f(t), \quad f \in C_\mu(E, R). \quad (3)$$

Решением уравнения (3) будем называть вектор-функцию

$$u \in C_\mu(E, R), \quad (4)$$

для которой $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in R$, определены производные Маршо (2) и выполнено равенство (3).

Определение 1. Будем говорить, что задача (3)–(4) без начальных условий поставлена корректно, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для нее выполняется оценка корректности

$$\|u\|_{C_\mu} \leq M \|f\|_{C_\mu},$$

с константой $M \geq 0$, не зависящей от f .

Определение 2. Функцию $u_+(t)$ будем называть решением задачи Коши с условием

$$u(0) = u_0 \in D(A), \quad (5)$$

если она удовлетворяет уравнению (3) и условию (5).

Определение 3. Решение $u(t)$ задачи (3)–(4) будем называть промежуточной асимптотикой решения $u_+(t)$ задачи (3)–(5), если выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_+(t)\|_{C_\mu} = 0. \quad (6)$$

Определение 4. Решение задачи (3)–(4) будем называть “условно-промежуточной” асимптотикой решения $u_+(t)$ задачи (3)–(5), если выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_+(t)\|_E \leq M \|u_0\|, \quad (7)$$

где константы $M > 0$ не зависят от u_0 .

Теорема 1. Если оператор A является производящим оператором C_0 -полугруппы $U(s, A)$ с оценкой

$$\|U(s, A)\varphi\|_E \leq Me^{-\omega s} \|\varphi\|_E, \quad \omega \geq 0, \quad (8)$$

то для любой функции $f \in C_\mu(E, R)$ уравнение имеет единственное решение $u \in C_\mu(R, E)$ и для него выполняется оценка

$$\|U(s, A)u\|_\mu \leq \frac{Me^{-(\omega+\mu^\alpha)s}}{\omega+\mu^\alpha} \|u\|_\mu. \quad (9)$$

При этом, если в условии (5) $u_0 = 0$, то решение $u(t)$ является “промежуточной асимптотикой” при любом $\omega \geq 0$. В случае произвольного $u_0 \in D(A)$ $u(t)$ является “промежуточной асимптотикой” только при $\omega > 0$, а при $\omega = 0$ имеет место “условно-промежуточная асимптотика”.

2. ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ. КОРРЕКТНОСТЬ

Вводя полугруппы правых сдвигов $U\left(s, -\frac{d}{dt}\right)(u(t)) = u(t-s)$ в представлении производной Маршо (2), получаем связь дробной производной $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ с дробной степенью $\left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha$, имеющей, согласно формуле Балакришнана [3], стр. 358, представление

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty U\left(s, -\frac{d}{dt}\right) \frac{u(t) - u(s)}{s^{1+\alpha}} ds = \left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha u(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая $B_\alpha = \left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha$, и используя (10), запишем уравнение (3) в операторной форме

$$Au(t) - B_\alpha u(t) = -f(t). \quad (11)$$

Согласно [3], стр. 358 оператор $-B_\alpha$ является производящим оператором C_0 -полугруппы

$$U(s, -B_\alpha)u(t) = \int_0^\infty h_{\alpha,s}(\xi) U\left(\xi, -\frac{d}{dt}\right) u(t) d\xi, \quad (12)$$

где $h_{\alpha,\xi}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\xi-sp^\alpha} dp$ — функция Иосиды, обладающая свойствами: $h_{\alpha,s}(\xi) > 0$ и

$$\int_0^{\infty} e^{-a\xi} h_{\alpha,s}(\xi) d\xi = e^{-a^\alpha s}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a\xi} h_{\alpha,\xi}(s) d\xi = E_{\alpha,\alpha}(-as^\alpha), \quad (14)$$

где $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha(n+1))}$ — функция Миттаг–Леффлера.

Кроме того, из (13) и легко проверяемого неравенства

$$\|u(t-s)\|_{C_\mu} = \left\| U\left(s, -\frac{d}{dt}\right) u(t) \right\|_{C_\mu} \leq e^{-\mu s} \|u\|_{C_\mu} \quad (15)$$

следует оценка

$$\|U(s, -B_\alpha)u\|_{C_\mu} \leq e^{-\mu^\alpha s} \|u\|_{C_\mu}. \quad (16)$$

Оценки (10) и (16) позволяют применить результат Да Прато–Грисвальда [9] об обращении операторной суммы, в соответствии с которым решение уравнения (3) представимо в виде

$$u(t) = -\int_0^{\infty} U(s, B_\alpha) U(s, A) f ds. \quad (17)$$

Отсюда следует оценка корректности

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_\mu} &\leq \int_0^{\infty} \|U(s, B_\alpha)\| \cdot \|U(s, A)\| ds \cdot \|f\|_{C_\mu} \leq \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(\omega+\mu^\alpha)s} ds \cdot \|f\|_{C_\mu} = \frac{M\|f\|_{C_\mu}}{\omega+\mu^\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

3. ЗАДАЧА КОШИ

В случае $u_0 = 0$ решение задачи (3)–(5) находится аналогично решению (17) с заменой полугруппы $U\left(s, -\frac{d}{dt}\right)u(t) = u(t-s)$ на полугруппу

$$U_+\left(s, -\frac{d}{dt}\right)u(t) = \begin{cases} u(t-s), & \text{если } t \geq s \\ 0, & \text{если } t < s, \end{cases} \quad (19)$$

которая при $t \geq s$ совпадает с полугруппой $U\left(s, -\frac{d}{dt}\right)$.

В таком случае решение задачи (3)–(5) имеет вид

$$\begin{aligned} u_+(t) &= -\int_0^{\infty} U_+(s, B_\alpha) U(s, A) f ds = \\ &= -\int_0^t U(s, B_\alpha) U(s, A) f ds. \end{aligned} \quad (20)$$

В случае $f = 0$, $u_0 \in D(A)$, применяя преобразование Лапласа к (3), с учетом (5), получаем изображение решения

$$\tilde{u}_+(p) = (p^\alpha - A)^{-1} u_0 = \int_0^{\infty} e^{-p^\alpha \xi} U(\xi, A) u_0 d\xi. \quad (21)$$

Здесь мы воспользовались представлением резольвенты производящего оператора через C_0 -полугруппу.

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем решение

$$\begin{aligned} u_+(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \int_0^{\infty} e^{-p^\alpha \xi} U(\xi, A) u_0 d\xi dp = \\ &= \int_0^{\infty} h_{\alpha,\xi}(t) U(\xi, A) u_0 d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) следует оценка

$$\|u_+(t)\|_E \leq \int_0^{\infty} h_{\alpha,\xi}(t) \|U(\xi, A)\| d\xi \cdot \|u_0\|_E \leq$$

$$\leq M \int_0^{\infty} h_{\alpha,\xi}(t) e^{-\omega \xi} d\xi \cdot \|u_0\|_E = M \cdot E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) \|u_0\|_E. \quad (23)$$

Из (20) и (22) следует, что решение задачи (3)–(5) имеет вид

$$u_+(t) = \int_0^{\infty} h_{\alpha,\xi}(t) U(\xi, A) u_0 d\xi - \int_0^t U(s, B_\alpha) U(s, A) f ds. \quad (24)$$

Из (5), (20) и (24) получаем

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_+(t)\|_E &\leq M E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) \cdot \|u_0\| + \\ &+ \int_t^{\infty} \|U(s, B_\alpha)\| \|U(s, A)\| f ds \leq \\ &\leq M E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) \cdot \|u_0\| + \frac{e^{-(\omega+\mu^\alpha)t}}{\omega+\mu^\alpha} \cdot \|f\|_{C_\mu}. \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая, что при $\omega > 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) = 0$ из (25) следует “промежуточная асимптотика” $u(t) \sim u_+(t)$, при $t \rightarrow \infty$.

Если $\omega = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_+(t)\| \leq M \cdot \|u_0\|$. То есть имеет место “условно-промежуточная асимптотика”.

3. О ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пусть E — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на R функций $f(x) \in C_{[-\infty, \infty]}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in R} |f(x)|$ и $f(t, x) = e^{-\mu t} f(x)$, $t \in R$, $\mu \geq 0$.

Оператор A зададим дифференциальным выражением $\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения

$$D(A) = \left\{ \varphi \in C_{[-\infty, \infty]}, \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \in C_{[-\infty, \infty]} \right\}.$$

Определенный таким образом оператор A является производящим оператором C_0 -полугруппы

$$U(s, A)\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4s}} \varphi(\xi) d\xi \quad (26)$$

с оценкой

$$\|U(s, A)\varphi\|_C \leq \|\varphi\|_C. \quad (27)$$

Оценка (27) является точной, так как (27) переходит в равенство при $\varphi(x) \equiv 1$ (см. [3], стр. 325). При этом для $\varphi(x) = \cos \omega x \in C_{[-\infty, \infty]}$ справедливо равенство

$$U(s, A)\cos \omega x = e^{-\omega^2 s} \cos \omega x. \quad (28)$$

В соответствии с (12), (15) и (29) задача без начальных условий для уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + e^{-\mu t} \cos \omega x \quad (29)$$

имеет решение

$$u(t, x) = -\int_0^\infty U(s, B_\alpha) U(s, A) e^{-\mu t} \cos \omega x ds = -\frac{\cos \omega x}{\omega^2 + \mu^2}. \quad (30)$$

При этом для уравнения (29) с начальным условием $u_0(x) = \cos \omega x$, в соответствии с (24), имеет вид

$$\begin{aligned} u_+(x, t) &= E_{\alpha, \alpha}(-\omega^2 t^\alpha) \cos \omega x - \\ &\quad - \int_0^t e^{-(\omega^2 + \mu^\alpha)s} ds \cdot \cos \omega x = \\ &= \left[E_{\alpha, \alpha}(-\omega^2 t^\alpha) - \frac{e^{-(\omega^2 + \mu^\alpha)t}}{\omega^2 + \mu^\alpha} \right] \cos \omega x. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (30) и (31) получаем точное представление для разности решений

$$\begin{aligned} u_+(x, t) - u(x, t) &= \\ &= \left[E_{\alpha, \alpha}(-\omega^2 t^\alpha) + \frac{e^{-(\omega^2 + \mu^\alpha)t}}{\omega^2 + \mu^\alpha} \right] \cdot \cos \omega x. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) следует, что при $\omega > 0$ имеет место “промежуточная асимптотика”, так как при каждом $x \in R$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_+(x, t) - u(x, t)] = 0. \quad (33)$$

В то время как при $\omega = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_+(x, t) - u(x, t)] = 1. \quad (34)$$

Следовательно, имеет место “условно-промежуточная асимптотика”.

Замечание. Если в условиях теоремы 1 $x \in R^n$,

$$f(x, t) = e^{-\mu t} \prod_{i=1}^n \cos \omega_i x_i,$$

$$A\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i^2} = \Delta \varphi(x), \quad E = C_{[-\infty, \infty]^n}, \quad (35)$$

то, аналогично (27), можно показать, что разность между решением $u(x, t)$ задачи с начальным

условием $u_0(x) = \prod_{i=1}^n \cos \omega_i x_i$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_+(x, t) - u(x, t) &= \\ &= \left[E_{\alpha, \alpha} \left(-\sum_{i=1}^n \omega_i^2 t^\alpha \right) + \frac{e^{-\sum_{i=1}^n (\omega_i^2 + \mu^\alpha)t}}{\sum_{i=1}^n (\omega_i^2 + \mu^\alpha)} \right] \cdot \prod_{i=1}^n \cos \omega_i x_i. \end{aligned} \quad (36)$$

Отметим, что в этом случае “промежуточная асимптотика” имеет место, когда неравенство $\omega_i > 0$ выполнено хотя бы для одного $i = 1, \dots, n$.

Заключение. Теорема 1 показывает, что корректная разрешимость задачи без начальных условий является лишь необходимым условием для того, чтобы ее решение являлось “промежуточной асимптотикой”, но не является достаточным для задач с ненулевыми начальными условиями. Однако гарантирует “условно-промежуточную асимптотику”, т.е. показывает “меру близости” решений $u(t)$ и $u_+(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке гранта РНФ 22-71-10008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И. Промежуточные асимптотики математической физики // Г.И. Баренблатт, Я.Б. Зельдович. Успехи мат. наук. 1971. Т. XXVI. Вып. 2(158). С. 115–129.
2. Зельдович Я.Б. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Я.Б. Зельдович, Д.Д. Соколов. Успехи физ. наук. 1985. Т. 146. Вып. 3. С. 493–505.
3. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник / К. Иосида, пер. с англ. В.М. Волосова. М.: Мир, 1967. 624 с.

4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. М.: Наука, 1967. 464 с.
5. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений/ В.П. Маслов. М.: “Наука”, гл. ред. физ. мат. лит., 1988. 312 с.
6. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г., А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.
7. Учайкин В.В. Методы дробных производных // В.В. Учайкин. Ульяновск, Изд. Логос, 2002. 512 с.
8. Федоров В.Е., Туров М.М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана–Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. №. 5. С. 1143–1162.
9. Da Prato Giuseppe / Giuseppe Da Prato, Pierre Grisvard. Paris: Gauthier-Villars. 1975. Journal de mathématiques pures et appliquées. serie 9, tome 54, fasc. 3. pp. 305–387.

ON INTERMEDIATE ASYMPTOTICS BARENBLATT–ZELDOVICH

V. A. Kostin^a, D. V. Kostin^{a,b}, and A. V. Kostin^a

^a*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

^b*Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia*

Presented by Academician of the RAS V. P. Maslov

The concept of “intermediate asymptotics” for solving an evolution equation with initial values data and the associated solution without initial conditions was introduced by G.N. Barenblatt and Y.B. Zeldovich in connection with the expansion of the concept of “strict determinism” in statistical physics and quantum mechanics. Here, according to V.P. Maslov, to axiomatize a mathematical theory, one must also know what conditions the initial solutions of the problem must satisfy. The paper shows that the correct solvability of the problem without initial conditions for fractional differential equations in a Banach space is necessary but not sufficient condition of “intermediate asymptotics”. Examples of “intermediate asymptotics” are given.

Keywords: intermediate asymptotics, well-posed problems, Cauchy problem, equations without initial conditions, strongly continuous semigroups, fractional powers of operators

УДК 519.63

ОЦЕНКА ВЫРОЖДЕНИЯ ТЕТРАЭДРА В ТЕТРАЭДРАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2023 г. Ю. А. Криксин^{1,*}, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1,**}

Поступило 06.07.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принято к публикации 02.11.2023 г.

На основе геометрических характеристик тетраэдра предложены количественные оценки его вырождения и установлена их связь с числом обусловленности локальных базисов, порожденных ребрами, выходящими из одной и той же вершины. Вводится понятие индекса вырождения тетраэдра в нескольких версиях и устанавливается их практическая эквивалентность друг другу. Для оценки качества конкретного тетраэдрального разбиения предлагается вычислять эмпирическую функцию распределения индекса вырождения на ее тетраэдральных элементах. Предложена нерегулярная модельная триангуляция (тетраэдризация или тетраэдральное разбиение) трехмерного пространства, зависящая от управляющего параметра, определяющего качество ее элементов. Координаты вершин тетраэдров модельной триангуляции являются суммами соответствующих координат узлов некоторой заданной регулярной сетки и случайных приращений к ним. Для различных значений управляющего параметра вычисляется эмпирическая функция распределения индекса вырождения тетраэдра, рассматриваемая как количественная характеристика качества тетраэдров в триангуляции трехмерной области.

Ключевые слова: индекс вырождения, тетраэдр, триангуляция, регулярная сетка, псевдослучайный вектор, эмпирическая функция распределения

DOI: 10.31857/S2686954323600726, **EDN:** ZDDSR

1. Разбиение пространства на конечные элементы широко используется в различных целях в точных и прикладных науках, таких как классическая и вычислительная математика, физика, геодезия, навигация, метрология, астрометрия и т.д. В вычислительной математике разбиение на конечные элементы необходимо для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных в сложных нерегулярных областях соответствующими методами [1]. В числе этих методов отметим классический и разрывный методы Галеркина [2, 3], обладающие высокой степенью универсальности и потенциально высокой точностью, которые благодаря своей гибкости могут быть адаптированы к сложным нерегулярным пространственным областям и применены в частности для решения задач газовой динамики и гидродинамики. Точность численного решения во многом определяется вырождением используемых конечных элементов [4]. Одним из важных частных случаев разбиения является

триангуляция (тетраэдризация), под которой понимается разбиение заданной области n -мерного евклидова пространства на простейшие элементы — n -мерные симплексы. Настоящая работа посвящена установлению связи между собой различных оценок степени вырождения тетраэдров, используемых в качестве элементов тетраэдризации в трехмерном евклидовом пространстве. Такую оценку естественно связать с вырожденностью локального базиса в рассматриваемом тетраэдре, в координатах которого записываются уравнения метода. В связи с этим необходима удобная количественная характеристика вырождения тетраэдра, которая может быть легко вычислена.

Отметим, что в настоящее время в процессе построения триангуляции заданной области используются различные оценки качества тетраэдров [5–8], связь которых друг с другом необходимо выяснить.

Среди отечественных работ мирового уровня, посвященных вопросам триангуляции и тетраэдризации, можно выделить монографию [5], в которой рассмотрены главные направления исследований, включающие основные понятия, относящиеся к треугольным и тетраэдральным сеткам, алгоритмы построения неструктурированных сеток в произвольных областях, в том

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: kriksin@imamod.ru

**E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

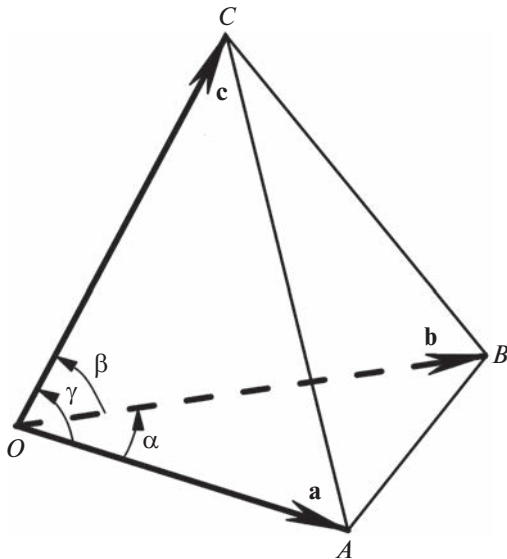


Рис. 1. Тетраэдр, представляющий собой элемент класса подобных тетраэдров, параметризованный соотношениями (1).

числе алгоритм построения тетраэдральной сетки методом продвигаемого фронта, принципы многоуровневого построения сеток, локальные модификации сеток и управление их свойствами.

Зарубежные исследования по алгоритмам триангуляции и тетраэдризации изложены, в частности, в известных монографиях [6–8].

В предлагаемой работе не рассматриваются алгоритмы построения тетраэдризации заданной области. Акцент делается на количественном контроле качества трехмерной триангуляции, в которой каждому принадлежащему ей тетраэдру сопоставляется индекс его вырождения, и производится сравнение друг с другом различных версий индекса, естественных с точки зрения авторов. Для оценки качества тетраэдризации в целом предлагается использовать эмпирическую функцию распределения (ЭФР) индекса вырождения на ее тетраэдрах. ЭФР дает представление о границах изменения индекса и доле его значений в заданном диапазоне чисел. С точки зрения сегодняшней вычислительной практики польза ЭФР не очевидна, но развитие вычислительных технологий имеет тенденцию к дальнейшему увеличению числа используемых конечных элементов. Поэтому мы не исключаем, что в перспективе при большом числе конановых элементов в ряде случаев может быть установлена связь между профилем ЭФР и его влиянием на точность численного решения конкретной прикладной задачи.

Кроме этого для тестирования точности конкретного численного метода желательно иметь простой и экономичный способ генерации модельной тетраэдризации, обладающей заданным

качеством ее конечных элементов. С этой целью, как и в нашей предыдущей работе [9], строится специальная сетка, зависящая от управляющего числового параметра ϵ , на основе которой генерируется модельная тетраэдризация с индексом вырождения тетраэдров, принимающим значения в заданном диапазоне. Поэтому настоящую работу следует рассматривать как распространение подхода работы [9] на трехмерное пространство.

2. Количественная величина, выражающая степень вырождения тетраэдра, должна быть безразмерной и одной и той же на множестве подобных тетраэдров. С целью ее введения рассмотрим тетраэдр OABC, являющийся элементом триангуляции некоторой области трехмерного евклидова пространства (см. рис. 1). В отличие от двумерного случая, когда класс подобных друг другу треугольников определяется значениями двух углов [9], для описания класса подобных друг с другом тетраэдров необходимо задать пять параметров. В качестве примера приведем одну из возможных параметризаций класса подобных между собой тетраэдров с помощью пяти угловых параметров

$$\begin{aligned} \angle AOB = \alpha, \quad \angle BOC = \beta, \quad \angle AOC = \gamma, \\ OA = \sin\theta\cos\varphi, \quad OB = \sin\theta\sin\varphi, \quad OC = \cos\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$; $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$; $\alpha + \beta > \gamma$; $\beta + \gamma > \alpha$; $\gamma + \alpha > \beta$; $\varphi, \theta \in (0, \pi/2)$.

Искомая величина должна быть связана с оценкой вырожденности локального базиса, построенного на трех векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, ($\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}] \neq 0$), начинающихся в одной из его вершин (на рис. 1 это точка O), концы которых находятся в соседних вершинах. Положим

$$d_O = \lambda_{\min} \lambda_{\max}^{-1}, \quad (2)$$

где $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ являются соответственно минимальным и максимальным собственным значением матрицы

$$D_O = \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|^2 & (\mathbf{a} \mathbf{b}) & (\mathbf{a} \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \mathbf{b}) & |\mathbf{b}|^2 & (\mathbf{b} \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a} \mathbf{c}) & (\mathbf{b} \mathbf{c}) & |\mathbf{c}|^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которые являются действительными положительными числами благодаря линейной независимости векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Замечание 1. Отметим, что матрица перехода T_O от координат (ξ, η, ζ) в базисе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ к декартовым координатам (x, y, z) в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ связана с матрицей (2) равенством $T_O^* T_O = D_O$, поэтому $d_O^{-1/2}$ является числом обусловленности матрицы T_O , если рассматривать ее спектральную норму.

Существуют четыре способа построения локального базиса в тетраэдре ОАВС, если не принимать во внимание перестановки одних и тех же базисных векторов между собой. Меняя ролями все вершины О, А, В, С тетраэдра ОАВС на рис. 1, т.е. выбирая каждую из них в качестве начальной точки для векторов соответствующего локального базиса, получим еще три числа d_A , d_B и d_C , определяемые согласно формуле (2) с участием соответствующих базисных векторов. Введем величины

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min(d_O, d_A, d_B, d_C), \\ d_{\max} &= \max(d_O, d_A, d_B, d_C). \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть V – объем тетраэдра ОАВС, S – площадь его полной поверхности, R – радиус описанного около него шара и r – радиус вписанного в него шара.

Рассмотрим также безразмерные величины

$$f_{VS} = V^2 S^{-3}, \quad f_{rR} = r R^{-1}. \quad (5)$$

Величина $d_{\min}$ и величины (5) достигают своих максимумов на правильном тетраэдре. Соответствующие максимальные значения равны

$$(d_{\min})_{\max} = 1/4, \quad f_{VS, \max} = \sqrt{3}/648, \quad f_{rR, \max} = 1/3. \quad (6)$$

В отличие от перечисленных в (6) величин величина $d_{\max}$ достигает своего максимального значения 1 на тетраэдре, являющемся выпуклой оболочкой трех перпендикулярных друг другу ребер куба, выходящих из одной вершины. На правильном тетраэдре она имеет значение 1/4.

Каждую из величин (4) и (5) можно рассматривать как количественную оценку вырождения рассматриваемого тетраэдра. Чем ближе к нулю их значение, тем более вырожденным является тетраэдр. В дальнейшем будем использовать логарифмическую шкалу в отношении каждой из введенных в (4) и (5) величин. Введем следующие четыре версии индекса вырождения тетраэдра T , положив соответствующие им значения равными

$$\begin{aligned} I_{\min}(T) &= -\frac{1}{2} \lg(d_{\min}), \quad I_{\max}(T) = -\frac{1}{2} \lg(d_{\max}), \\ I_{VS}(T) &= -\frac{1}{2} \lg(f_{VS}), \quad I_{rR}(T) = -\lg(f_{rR}). \end{aligned} \quad (7)$$

Выбор основания логарифма равным 10 обусловлен удобством интерпретации индексов в используемой повсеместно десятичной системе исчисления. Наиболее легко интерпретируемым является значение индекса $I_{\min}$, который рассматривается далее в качестве основной оценки вырождения тетраэдра. В самом деле, увеличение индекса $I_{\min}$ на 1 означает дополнительную потерю точности вычислений при переходе от локальных координат в наиболее вырожденном из четырех возмож-

ных локальных базисов в тетраэдре к декартовым координатам примерно на одну значащую цифру.

Следующей задачей является установление взаимосвязи друг с другом между введенными индексами (7). Индексы вырождения (7) являются функциями пяти параметров. Аналитическое исследование взаимосвязи этих функций друг с другом представляет собой весьма сложную задачу.

Поставим эту задачу следующим образом. Рассмотрим однопараметрическое множество Q_I тетраэдров T , таких что $L(T) < I$, где $L(T)$ обозначает какой-либо из индексов (7). Индекс $L(T)$ будем называть *базовым*. Обозначим через $J(T)$ значение любого из оставшихся индексов, введенных в (7), и определим следующие функции

$$\begin{aligned} \underline{J}(I) &= \liminf_{\Delta I \rightarrow 0} J(T), \quad T \in Q_{I+\Delta I} \setminus Q_{I-\Delta I}, \\ \bar{J}(I) &= \limsup_{\Delta I \rightarrow 0} J(T), \quad T \in Q_{I+\Delta I} \setminus Q_{I-\Delta I}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для количественной оценки функций (8) будет использован метод статистических испытаний Монте-Карло [10].

3. Поскольку метод Монте-Карло подразумевает приближенную оценку функций (8), следует определить практически необходимую точность результата. С точки зрения сложившейся вычислительной практики можно условиться полагать ошибку в пределах одной значащей цифры соответствующего десятичного разряда заданной точности искомой величины вполне приемлемой.

С учетом принятой точности выберем сетку $\{I_k\}$ числовых значений I

$$I_k = I_0 + hk, \quad h = \frac{1}{2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (9)$$

где $I_0 = h = 0.5$, $K = 12$. Выберем достаточно малое по сравнению с I числовое значение $\Delta I = 0.02$ и приблизительно оценим на ней значения функций (8).

С этой целью проведем серию следующих вычислительных экспериментов. Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат, определяемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (10)$$

Зафиксируем точку $O(1, 0, 0)$ и с помощью последовательности псевдослучайных векторов, равномерно и независимо распределенных на сфере (10) [11], определим три точки: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Для построенного таким способом тетраэдра ОАВС сфера (10) является описанной сферой. Очевидно, множество всех вписанных в сферу (10) тетраэдров исчерпывает элементы класса подобных друг другу тетраэдров. Генерацию множества тетраэдров ОАВС описанным выше способом продолжаем для каждого уз-

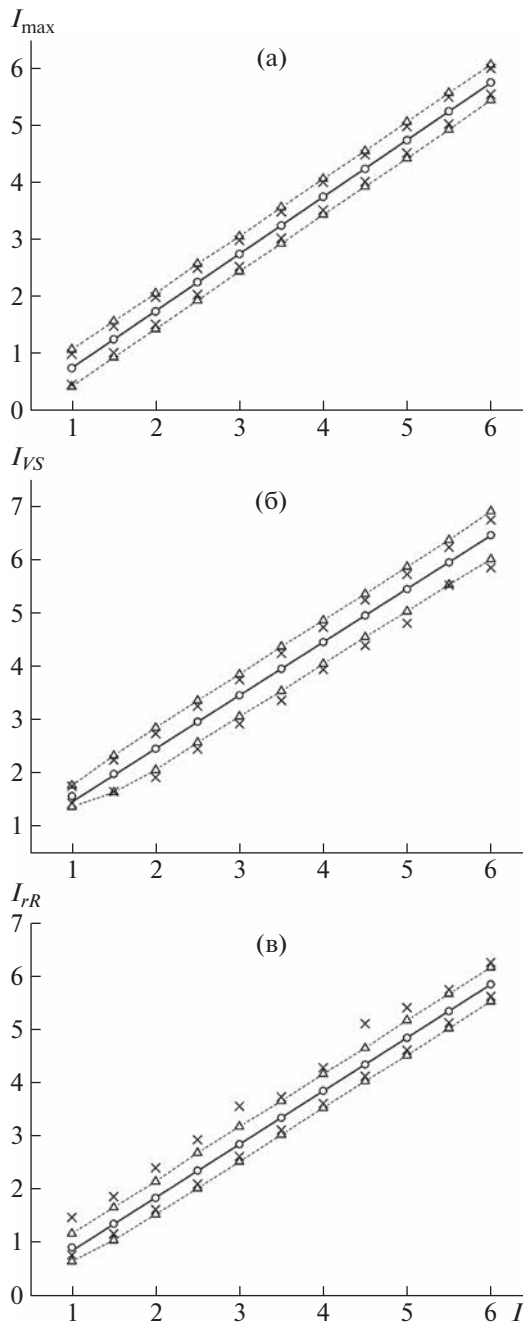


Рис. 2. Графическая иллюстрация связи индексов вырождения (7) друг с другом (а) – $I_{\max}$; б) – I_{VS} ; в) – I_{RR}), установленная в вычислительном эксперименте методом Монте-Карло. Сплошная прямая линия линейной регрессии построена с использованием значений соответствующих выборочных средних в узлах I_k ($k = 3, \dots, K$). Кружки “о” указывают положение выборочных средних на соответствующих им линиях регрессии. Треугольники “Δ” отмечают концы доверительного интервала $(a(I_k) - 3\sigma(I_k), a(I_k) + 3\sigma(I_k))$, а пунктирные линии ограничивают соответствующую “доверительную полосу”. Крестики “х” отвечают экстремальным значениям индекса в рассматриваемом узле I_k , в соответствующей выборке объема N .

ла сетки (9) $I = I_k$ до тех пор, пока число их, принадлежащих множеству $Q_{I+\Delta I} \setminus Q_{I-\Delta I}$, не достигнет заданного натурального числа $N = 1000$. В каждом таком численном эксперименте для каждой версии индекса вырождения (7) вычисляются выборочные среднее $a(I_k)$ и дисперсия $\sigma^2(I_k)$ [12] на основе N значений выборки соответствующего индекса. Для полученных таким способом сеточных функций $a(I_k)$ вычисляются коэффициенты уравнения линейной регрессии и доверительный интервал $(a(I_k) - 3\sigma(I_k), a(I_k) + 3\sigma(I_k))$, нижняя и верхняя границы которого являются соответственно приближенными оценками величин $\underline{J}(I_k)$ и $\overline{J}(I_k)$ в соотношениях (8).

Результаты серии проведенных вычислительных экспериментов для индексов $I_{\max}$, I_{VS} , I_{RR} при выборе $L = I_{\min}$ представлены на рис. 2 (за исключением индекса $I_{\min}$, ввиду того, что точки интервала $(I - \Delta I, I + \Delta I)$ визуальнo практически неотличимы друг от друга).

Отметим, что не менее 99% элементов выборки для каждого индекса в соответствующем узле сетки попадают в указанный выше доверительный интервал, длина которого не превышает во всех случаях 0.91, причем, угловой коэффициент линейной регрессии равен 1 с точностью 10^{-3} для всех версий индекса (7). Таким образом, все прямые регрессии на рис. 2 отличаются друг от друга сдвигом по вертикальной оси и имеют вид

$$\begin{aligned} I_{\min} &= I, & I_{\max} &= I + b_{\max}, \\ I_{VS} &= I + b_{VS}, & I_{RR} &= I + b_{RR}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $b_{\max} \cong -0.25$, $b_{VS} \cong 0.46$, $b_{RR} \cong -0.14$.

Также проведены расчеты в случае, когда в качестве базового индекса L выбирались индексы $I_{\max}$, I_{VS} , I_{RR} . Полученные уравнения линейной регрессии имеют единичный наклон и отличаются от уравнений (11) сдвигом на величину не более 1% относительно точки, взятой на середине соответствующей прямой. Длина доверительного интервала не превышает 0.91, а не менее 98% элементов выборки для каждого индекса в любом узле сетки (9) попадают в соответствующий доверительный интервал. Практическая независимость уравнений линейной регрессии от способа выбора индекса вырождения в качестве базового позволяет сформулировать *принцип взаимности*, заключающийся в том, что все индексы в (7) можно считать эквивалентными друг другу, и любой из введенных индексов вырождения (7) может быть использован для оценки степени вырождения тетраэдра, а уравнения линейной регрессии (11) позволяют оценить значения остальных индексов.

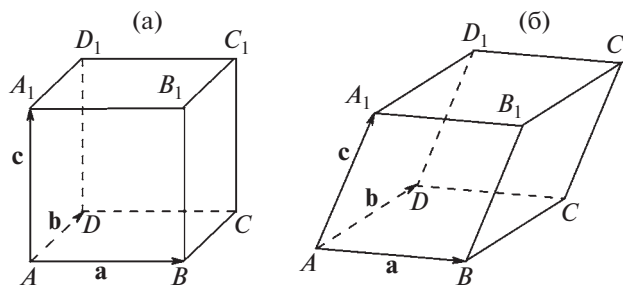


Рис. 3. Базовый параллелепипед модельной триангуляции: базисные вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеют единичную длину, начинаются в точке A и заканчиваются в точках B , D и A_1 соответственно: а) куб (базисные вектора ортогональны друг другу); б) ромбоэдр (базисные вектора попарно составляют друг с другом угол $\pi/3$).

Почти все значения любого индекса попадают в соответствующий доверительный интервал, отклонение конкретного значения от линии регрессии, как правило, не превышает 0.5. Конкретное применение того или иного индекса в (7) определяется соображениями удобства и наименьших вычислительных затрат.

Наиболее просто и экономично вычисляется индекс I_{VS} , так как для его вычисления достаточно найти объем V и площадь полной поверхности S тетраэдра $OABC$ (см. рис. 1)

$$V = \frac{1}{6} |(\mathbf{a} [\mathbf{b} \mathbf{c}])|, \quad (12)$$

$$S = \frac{1}{2} (\|\mathbf{a} \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} \mathbf{c}\| + \|\mathbf{a} \mathbf{c}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{c} \mathbf{b} - \mathbf{c}\|).$$

Для вычисления индекса I_{rR} необходимо дополнительно найти радиус R описанного около тетраэдра шара. Вычисление индексов $I_{\min}$ и $I_{\max}$ предполагает нахождение спектральных норм матриц перехода от всех четырех локальных базисов, связанных с тетраэдром, в декартов базис и обратно и требует заметно больших вычислительных затрат. Заметим, что согласно рис. 2а вырождение тетраэдра может быть на практике оценено с заданной выше точностью в 1 значащую цифру через число обусловленности любого базиса из четырех возможных.

4. Рассмотрим алгоритм генерации модельной триангуляции (тетраэдрального разбиения) пространства E^3 на основе заданной регулярной сетки. С этой целью выберем некоторый базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ и построим сетку с узлами

$$\mathbf{r}_n = n_1 \mathbf{a} + n_2 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c} \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \quad (13)$$

$$(n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Параллелепипед, построенный на базисных векторах $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ (см. рис. 3), назовем базовым и разобьем последний на 6 тетраэдров с вершинами из множества вершин базового параллелепипеда таким образом, что ребра тетраэдров, совпадающие с диагоналями противоположных боковых гра-

ней параллелепипедов, оказываются параллельными друг другу. Конкретные способы разбиения будут рассмотрены ниже. Описанное выше разбиение на тетраэдры распространим на каждый параллелепипед, являющийся трансляцией базового, в соответствующий узел сетки (13). Полученную таким способом триангуляцию E^3 назовем базовой. Вершины, соединенные друг с другом ребрами тетраэдров, участвующих в базовой триангуляции, назовем соседними.

Используя регулярную сетку (13), построим возмущенную нерегулярную сетку

$$\tilde{\mathbf{r}}_n = \mathbf{r}_n + \varepsilon \mathbf{u}_n, \quad |\mathbf{u}_n| \leq 1, \quad \varepsilon > 0, \quad (14)$$

где отношение соседства между соответствующими узлами, введенное выше, сохраняется и для новых узлов $\tilde{\mathbf{r}}_n$ с теми же самыми номерами $\mathbf{n}$, что и в сетке (13). Отрезки прямых, соединяющие соседние узлы сетки (14), будем по-прежнему называть ребрами. Положительный числовой параметр ε предполагается достаточно малым, чтобы между точками пересечения ребер в исходной сетке (13) и в новой сетке (14) сохранялось взаимно однозначное соответствие и чтобы тетраэдры новой триангуляции с соответствующими вершинами оставались невырожденными. Таким образом, базовая триангуляция E^3 , построенная с помощью сетки (13), переносится на сетку (14) с сохранением исходной топологии. Между тетраэдрами базовой и новой триангуляции существует взаимно однозначное соответствие по принципу сохранения нумерации соответствующих вершин в соответствии с (13).

Ниже рассматриваются два конкретных способа модельной триангуляции (см. рис. 3).

На рис. 3а показан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, выступающий в роли базового параллелепипеда. Триангуляция куба производится путем его разбиения на шесть конгруэнтных тетраэдров $DAA_1 B_1$, $DD_1 A_1 B_1$, $DABB_1$, $DCC_1 B_1$, $DD_1 C_1 B_1$ и $DCBB_1$. В первом тетраэдре попарно перпендикулярные ребра DA , AA_1 и $A_1 B_1$

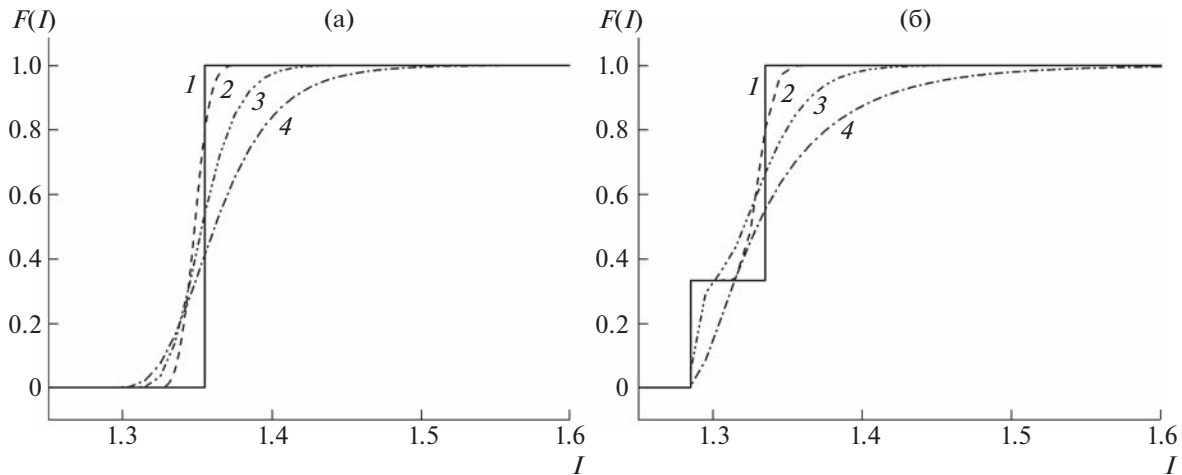


Рис. 4. Эмпирические функции распределения (16) индекса I_{VS} при различных значениях параметра ε : а) триангуляция на основе базового параллелепипеда куба ($1 - \varepsilon = 0$, $2 - \varepsilon = 0.05$, $3 - \varepsilon = 0.15$, $4 - \varepsilon = 0.235$); б) триангуляция на основе базового параллелепипеда ромбоэдра ($1 - \varepsilon = 0$, $2 - \varepsilon = 0.05$, $3 - \varepsilon = 0.15$, $4 - \varepsilon = 0.272$).

равны 1, ребра DA_1 и B_1A равны $\sqrt{2}$ и, наконец, ребро DB_1 равно $\sqrt{3}$. Оставшиеся тетраэдры устроены аналогичным образом.

Второй вариант базового параллелепипеда – ромбоэдр $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, изображенный на рис. 3б, разбивается на шесть тетраэдров равного объема $A_1 ABD$, $CC_1 D_1 B_1$, $BB_1 A_1 D_1$, $BCDD_1$, $A_1 DD_1 B$, и $CB_1 BD_1$. Тетраэдры $A_1 ABD$ и $CC_1 D_1 B_1$ являются правильными с единичными ребрами. В четырех тетраэдрах $BB_1 A_1 D_1$, $BCDD_1$, $A_1 DD_1 B$, и $CB_1 BD_1$ ребро $BD_1 = \sqrt{2}$, а остальные ребра равны 1.

Для того, чтобы топология базовой триангуляции сохранялась в возмущенной триангуляции, а тетраэдры в последней оставались невырожденными, управляющий параметр ε должен удовлетворять неравенству

$$\varepsilon < \frac{3V}{2 \max(S_1, S_2, S_3, S_4)}, \quad (15)$$

для всех шести тетраэдров, участвующих в триангуляции базового параллелепипеда, где V – объем, а S_i – площадь i -й грани рассматриваемого тетраэдра. Правая часть неравенства (15) равна половине минимальной высоты тетраэдра. В обоих случаях базового параллелепипеда, представленных на рис. 3а и 3б, управляющий параметр должен удовлетворять неравенству $\varepsilon < \sqrt{2}/4 \approx 0.3536$.

Одним из возможных вариантов оценки качества уже существующей триангуляции, является построение ЭФР $F(I)$ значений индексов (7). Если некоторая триангуляция всего содержит N тетраэдров, N_I из которых имеют значение рассмат-

риваемого индекса (7) меньшее I , то соответствующая ЭФР определяется следующим образом

$$F(I) = N^{-1} N_I. \quad (16)$$

Сгенерируем модельные триангуляции, описанные выше, на основе базовых параллелепипедов, показанных на рис. 3, используя в качестве $\mathbf{u}_n$ в (14) последовательность псевдослучайных векторов, равномерно распределенных в единичном шаре с центром в начале координат [11]. Каждая модельная триангуляция включает в себя более 1.6×10^8 тетраэдров. Построим для этих триангуляций ЭФР (16) индекса I_{VS} при различных значениях управляющего параметра ε (см. рис. 4). Отметим, что при значениях управляющего параметра ε , близких к критическому значению $\sqrt{2}/4 \approx 0.3536$, диапазон значений индекса I_{VS} становится достаточно широким, на котором плохо видны детали ЭФР исходных регулярных разбиений ($\varepsilon = 0$, сплошные кривые), поэтому для иллюстраций были выбраны значения ε , обеспечивающие достаточное разрешение.

Рассмотрим сначала исходную базовую триангуляцию ($\varepsilon = 0$). В случае куба плотность распределения соответствующей ЭФР (кривая 1 на рис. 4а) имеет вид

$$F'(I) = \delta\left(I - \frac{1}{2} \lg(36(1 + \sqrt{2})^3)\right), \quad (17)$$

так как все тетраэдры, участвующие в триангуляции, являются конгруэнтными. В отличие от куба для ромбоэдра плотность распределения ЭФР (кривая 1 на рис. 4б) является бимодальной и представляет собой сумму двух слагаемых

$$F'(I) = \frac{1}{3} \delta \left(I - \frac{1}{2} \lg(216\sqrt{3}) \right) + \frac{2}{3} \delta \left(I - \frac{1}{2} \lg(72(1 + \sqrt{3}/2)^3) \right), \quad (18)$$

так как одна третья часть тетраэдров является правильными тетраэдрами с ребром 1, а остальные две трети конгруэнтных тетраэдров имеют каждый по пять ребер длины 1 и одно ребро длины $\sqrt{2}$.

Как видно из рис. 4, с увеличением значений ϵ , профиль ЭФР размывается, становясь все более пологим, а верхняя граница значений индекса I_{VS} отодвигается вправо. Такое поведение ЭФР представляется естественным, так как соответствующая триангуляция становится все более и более нерегулярной и включает в себя тетраэдры, все более отклоняющиеся по форме от тетраэдров базовой триангуляции и имеющие все большие значения индекса вырождения.

В заключение отметим, что вычисление индекса I_{VS} и построение ЭФР для любой заданной триангуляции не составляют трудности, поскольку в процессе решения уравнений в частных производных, как правило, объем и площадь боковых граней тетраэдра, принадлежащего триангуляции, вычисляются как вспомогательные величины. В то же время следует принять во внимание, что индекс I_{VS} , как это показано в настоящей работе, практически эквивалентен мере, основанной на оценке вырождения любого локального базиса тетраэдра. В совокупности эти обстоятельства создают предпосылки для его широкого использования в прикладных задачах. Основной характеристикой ЭФР, по-видимому, следует считать диапазон значений, принимаемый индексом вырождения, и особенно его верхнюю границу, которая определяет максимальное вырождение. Насколько полезно использование профиля ЭФР (в предложенном виде или в иных версиях) в алгоритмах триангуляции и тетраэдризации, покажут дальнейшие исследования.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова. Авторы также благодарят центр информационных технологий Гронингенского университета (Нидерланды) за предоставленную возможность проведения расчетов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gallagher R.H.* Finite Element Analysis: Fundamentals. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1976. 396 с.
2. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin methods. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio: Springer-Verlag, 1984. 309 с.
3. *Cockburn B., Shu C.-W.* The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems // *Journal of Computational Physics*, 1998, V. 141, С. 199–224. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5892>
4. *Sugihara K.* Degeneracy and Instability in Geometric Computation. In: Kimura, F. (eds) *Geometric Modeling*. GEO 1998. IFIP V. 75. Boston: Springer, 2001, С. 3–17. https://doi.org/10.1007/978-0-387-35490-3_1
5. *Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чу-гунов В.Н.* Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. “Нелинейная вычислительная механика прочности.” Т. IV. Под общ. ред. В.А. Левина. Москва: Физматлит, 2016. 216 с.
6. *Preparata F.P., Shamos M.I.* Computational Geometry: An introduction. NY, Berlin, Heidelberg, Tokio: Springer-Verlag, 1985. 400 с.
7. *Hjelle Ø., Dæhlen M.* Triangulations and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006, 240 с.
8. *De Loera J.A., Rambau J., Santos F.* Triangulations. Structures for Algorithms and Applications. (Algorithms and Computation in Mathematics, V. 25) First Edition. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 548 с.
9. *Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.* Об одном подходе к оценке вырождения треугольного элемента в триангуляции // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 510. С. 52–56. <https://doi.org/10.31857/S2686954323600088>
10. *Barbu A., Zhu S.-Ch.* Monte Carlo Methods. Los Angeles: Springer, 2020. 433 с.
11. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. Москва: Наука, 1973. 312 с.
12. *Wackerly D.D., Mendenhall III W., Scheaffer R.L.* Mathematical Statistics with Applications. 7th edition. Belmont: Thomson Higher Education, 2008. 939 с.

DEGENERATION ESTIMATION OF A TETRAHEDRAL IN A TETRAHEDRAL PARTITION OF THE THREE-DIMENSIONAL SPACE

Yu. A. Kriksin^a and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^a

^a Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Based on the geometric characteristics of the tetrahedron, quantitative estimates of its degeneracy are proposed and their relationship with the condition number of local bases generated by the edges emerging from the same vertex is established. The concept of the tetrahedron degeneracy index is introduced in several versions and their practical equivalence to each other is established. To assess the quality of a particular tetrahedral partition, it is proposed to calculate the empirical distribution function of the degeneracy index on its tetrahedral elements. A model irregular triangulation (tetrahedralization or tetrahedral partition) of three-dimensional space is proposed, depending on the control parameter that determines the quality of its elements. The coordinates of the tetrahedra vertices of the model triangulation tetrahedrons are the sums of the corresponding coordinates of the nodes of some given regular grid and random increments to them. For various values of the control parameter, the empirical distribution function of the tetrahedron degeneracy index is calculated, which is considered as a quantitative characteristic of the quality of tetrahedra in the triangulation of a three-dimensional region.

Keywords: degeneracy index, tetrahedron, triangulation, regular mesh, pseudo-random vector, empirical distribution function

УДК 519.63

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА В СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СХЕМАХ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, В. И. Голубев^{1,2,**},
А. В. Шевченко^{1,2,***}, И. С. Никитин^{2,****}

Поступило 02.06.2023 г.

После доработки 19.10.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

В настоящей работе рассматривается задача построения численного решения системы уравнений акустики в фиксированной области пространства с границей. Физически она соответствует процессу распространения сейсмических волн в геологических средах при проведении сейсмической разведки месторождений углеводородов. Рассматриваемая система уравнений в частных производных первого порядка является гиперболической. Для построения ее численного решения применяется сеточно-характеристический метод на расширенном пространственном шаблоне. Данный подход позволяет построить схему повышенного порядка аппроксимации во внутренних точках расчетной области, однако требует аккуратного построения решения вблизи ее границ. В работе предложен подход, позволяющий сохранить повышенный порядок расчетной схемы вплоть до границы включительно. Проведена серия верификационных компьютерных расчетов.

Ключевые слова: акустические волны, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, граничные условия, порядок аппроксимации

DOI: 10.31857/S2686954323600465, **EDN:** ANRFWD

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость численного решения линейных гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка возникает при описании широкого круга технологических процессов. К ним относятся, например, процесс проведения неразрушающего контроля композиционных материалов [1] и сейсмическая разведка месторождений углеводородов [2]. Отличительными особенностями данных волновых задач являются повышенные требования к точности вычислительных алгоритмов и отсутствию нефизических осцилляций, в том числе на разрывных решениях.

На сегодняшний день разработаны различные методы, позволяющие построить численное решение системы линейных гиперболических урав-

нений с постоянными и с переменными, в том числе, разрывными коэффициентами. К ним относятся конечно-разностные [3], конечно-элементные [4] и конечно-объемные схемы [5]. В последнее время активно развивается сеточно-характеристический метод [6], изначально предложенный для задач газовой динамики [7]. Он хорошо зарекомендовал себя применительно к задачам сейсмической разведки при использовании акустического [8], линейного изотропного [9] и анизотропного [10] упругого, двухконтинуального [11] и упруго-вязкопластического [12] приближений. Значительные усилия были приложены для построения конечно-разностных и спектральных схем повышенного порядка аппроксимации [13, 14]. Подробное исследование диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем для линейного уравнения переноса представлено в работах [15, 16]. Среди широкого класса сеточно-характеристических схем наибольшее практическое применение получила схема третьего порядка аппроксимации [17]. При этом важным аспектом является корректная реализация граничных условий, согласованных по порядку аппроксимации с используемой внутри расчетной области схемой. Яркими примерами значимых достижений в данном направлении является построение граничных условий четвертого порядка

¹Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская область, Россия

²Институт автоматизации проектирования
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

***E-mail: alexshevchenko@phystech.edu

****E-mail: i_nikitin@list.ru

для конечно-разностных схем [14] и третьего порядка для конечно-объемных схем [18].

В настоящей работе предложен подход, позволяющий сохранить третий порядок сеточно-характеристической расчетной схемы вплоть до границы расчетной области включительно. Исследован случай одномерной задачи о динамическом нагружении акустической среды. Представлены результаты проведенных компьютерных расчетов, подтверждающие преимущества предложенного подхода.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений акустики, использующаяся для описания динамического поведения геологической среды при распространении в ней сейсмических волн, имеет вид [19]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) рассматривается на множестве $(\vec{r}, t) \in D \times [0, T]$, где D — ограниченная область в R^3 . На кусочно-гладкой границе ∂D задано граничное условие $p(\vec{r}, t) = P(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \partial D, t \in [0, T]$, где $P(\vec{r}, t)$ — заданная непрерывная функция. Вместе с начальными условиями $\vec{V}(\vec{r}, 0) = \vec{V}_0(\vec{r}, 0)$, $p(\vec{r}, 0) = p_0(\vec{r}, 0) \quad \forall \vec{r} \in D$ это задает корректную по Адамару дифференциальную начально-краевую задачу.

Искомые функциями пространства и времени являются: p — отклонение давления от его равновесного значения, $\vec{V}$ — скорость частиц среды. Механическими параметрами среды при этом выступают: плотность $\rho(\vec{r})$ и скорость распространения волн сжатия-разрежения $c(\vec{r})$. При выводе системы (1) предполагается, что в исходном равновесном состоянии среда покоится как целое, и внешние силы на систему не действуют.

Рассмотрим одномерную динамическую задачу для однородной (коэффициенты задачи не зависят от пространственной координаты) акустической среды. Определяющая система уравнений в данном случае представима в матричном виде:

$$\vec{q}_t + \mathbf{A} \vec{q}_x = \vec{0}, \quad (2)$$

где нижние индексы x и t обозначают дифференцирование по координате и времени соответственно. В вектор $\vec{q}$ включены все искомые функции задачи, а матрица $\mathbf{A}$ не зависит от координаты и имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho & 0 \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Исходная система уравнений (1) в частных производных первого порядка является гиперболической, что позволяет представить матрицу $\mathbf{A}$ в виде произведения трех матриц $\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1}$, где

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho c & -\rho c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

После перехода в инварианты Римана $(\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega^+ \\ \omega^- \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \vec{U})$ система уравнений (2) представляется в виде двух линейных однородных уравнений переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t} + c \frac{\partial \omega^+}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega^-}{\partial t} - c \frac{\partial \omega^-}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Используя свойства аналитических решений данных уравнений $\omega^+(x, t + \tau) = \omega^+(x - c\tau, t)$ и $\omega^-(x, t + \tau) = \omega^-(x + c\tau, t)$, сеточно-характеристический подход сводит исходную дифференциальную задачу к задаче пространственной интерполяции полиномом заданной степени. На практике для сохранения достаточной точности получаемого численного решения на применяемых расчетных сетках используется полином третьей степени $P_3(x)$. Данная расчетная схема обладает дополнительным преимуществом — минимизацией численных осцилляций на разрывных решениях. Это обусловлено ее близостью в пространстве неопределенных коэффициентов к области монотонных по Фридрихсу схем [20, 21]. После расчета значений обоих инвариантов на следующем временном слое, значения компонент вектора $\vec{q}$ однозначно восстанавливаются из соотношений (4). Данная расчетная схема является явной, а ее область устойчивости задается стандартным критерием Куранта-Фридрихса-Леви: $\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1$.

Для построения интерполянта $P_3(x)$ требуются значения вектора $\vec{q}^n$ в четырех точках пространственного шаблона для каждого из уравнений (5)–(6). Для уравнения (5) это точки $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$, для уравнения (6) — $(x_{m-1}, x_m,$

x_{m+1}, x_{m+2}), где m — индекс узла, в котором рассчитывается решение в следующий момент времени $n + 1$. В том случае, если расчет производится вдали от границ расчетной области, описанный алгоритм может быть применен впрямую.

Однако вблизи границ возникают определенные ситуации, требующие аккуратного рассмотрения. В дальнейшем для определенности будем рассматривать только уравнение (5) вблизи левой границы расчетной области. Обобщение на случай уравнения (6) и правой границы расчетной области может быть проведено полностью аналогично. Рассмотрим отдельно процедуру вычисления значений на следующем временном слое в узле, отстоящем на один шаг пространственной сетки от границы (см. рис. 1а) и в узле, непосредственно находящемся на границе (см. рис. 1б).

Как видно из рис. 1а, непосредственное использование процедуры полиномиальной интерполяции $P_3(x)$ возможно лишь для расчета значений ω^- . При этом узел x_{-1} , формально необходимый для расчета значения ω^+ в данной точке, находится за границей расчетной области. Будем рассматривать данный узел как фиктивный, значения искомого вектора $\vec{q}''(x_{-1})$ в котором должны быть заданы каким-либо образом до начала расчета. Построим интерполянт второй степени $P_2(x)$ по значениям ω^+ , известным в узлах (x_0, x_1, x_2) , и заполним значения в фиктивном узле x_{-1} так, чтобы $\omega^+(x_{-1}) = P_2(x_{-1})$. Отметим, что данное соотношение определяет не единственным образом значение вектора $\vec{q}''(x_{-1})$ в фиктивном узле. Данная неединственность будет снята в дальнейшем. После проделанных действий возможно формальное применение исходной схемы на полном расширенном шаблоне. При этом интерполяция с $P_3(x)$ приведет к восстановлению того же значения в точке $x^* = x_1 - c\tau$, которое было получено при использовании $P_2(x)$ на узлах x_0, x_1, x_2 .

Перейдем теперь к рассмотрению ситуации, когда обрабатываемый узел находится непосредственно на границе расчетной области (см. рис. 1б). Для расчета значения ω^- необходимо его значение в узле x_{-1} . Применим уже использованный ранее нами подход. Построим интерполяционный полином $P_2(x)$ по значениям ω^- , известных в узлах (x_0, x_1, x_2) , и заполним значения в фиктивном узле x_{-1} так, чтобы $\omega^-(x_{-1}) = P_2(x_{-1})$. Одновременно это снимает отмеченную ранее не единственность значений $\vec{q}''(x_{-1})$ в фиктивном узле. Рассмотрим теперь задачу расчета значения $\omega^+(x_0)$ на

следующем временном слое. Поскольку характеристика, соответствующая положительному собственному значению, выходит за границу расчетной области, требуется использование иного подхода. Пусть на рассматриваемой границе расчетной области задано значение давления, возможно, как функция времени $P(t)$. Из соотношений (4) можно записать, что

$$P(t) = \frac{\rho c}{2} (\omega^+(x_0, t) - \omega^-(x_0, t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

Таким образом, значение искомого инварианта $\omega^+(x_0)$ может быть вычислено как

$$\begin{aligned} \omega^+(x_0, t + \tau) &= \frac{2}{\rho c} P(t + \tau) + \omega^-(x_0, t + \tau) = \\ &= \frac{2}{\rho c} P(t + \tau) + P_3(x_0 + c\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что задание любого иного совместного граничного условия для задачи (2) приведет к построению аналогичного соотношения, в явном виде задающего значение искомого инварианта $\omega^+(x_0)$. В дальнейшем будем называть построенную выше расчетную схему “схемой с квадратичными продолжением”. В противовес этому будем использовать термин “схема с константным продолжением”, если неизвестное значение искомого функций на текущем временном слое в фиктивном узле задается простой константной экстраполяцией: $\vec{q}''(x_{-1}) = \vec{q}''(x_0)$.

Заметим, что предложенный подход построения вычислительного алгоритма вблизи границы расчетной области является не единственным из возможных. Например, в работе [22] предложен метод аналитического продолжения решения, обеспечивающий сохранение повышенного порядка аппроксимации схемы. Преимуществом описанного нами выше метода представляется его простота в обобщении на случай произвольных одномерных линейных гиперболических систем уравнений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работе была проведена эмпирическая оценка порядка сходимости описанного вычислительного алгоритма. Рассматривалась задача распространения акустических волн в среде протяженностью 1000 м с плотностью 1000 кг/м³ и скоростью распространения волн 1500 м/с. Рассматривалась исходно покоящаяся ненагруженная среда, на левой границе которой задавалось значение давления по следующему закону

$$P(t) = \sin^4(20\pi t), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

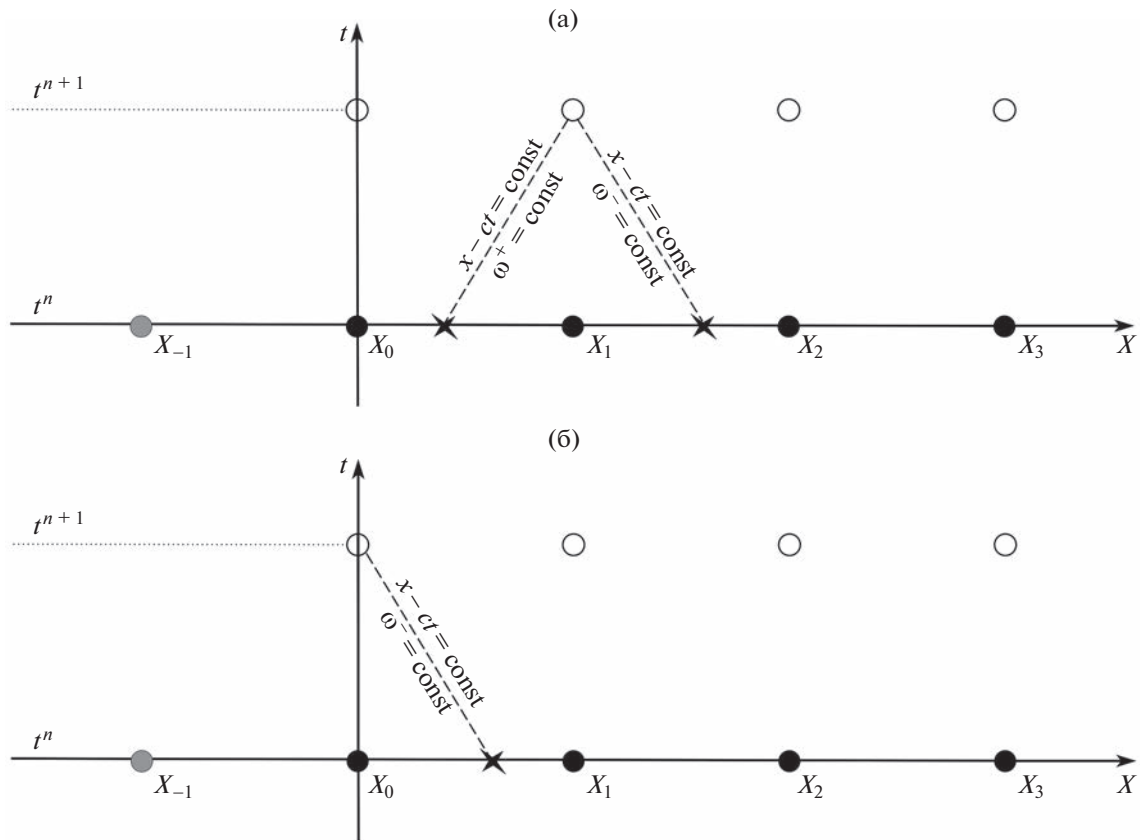


Рис. 1. К расчету значений искомых функций в приграничных узлах.

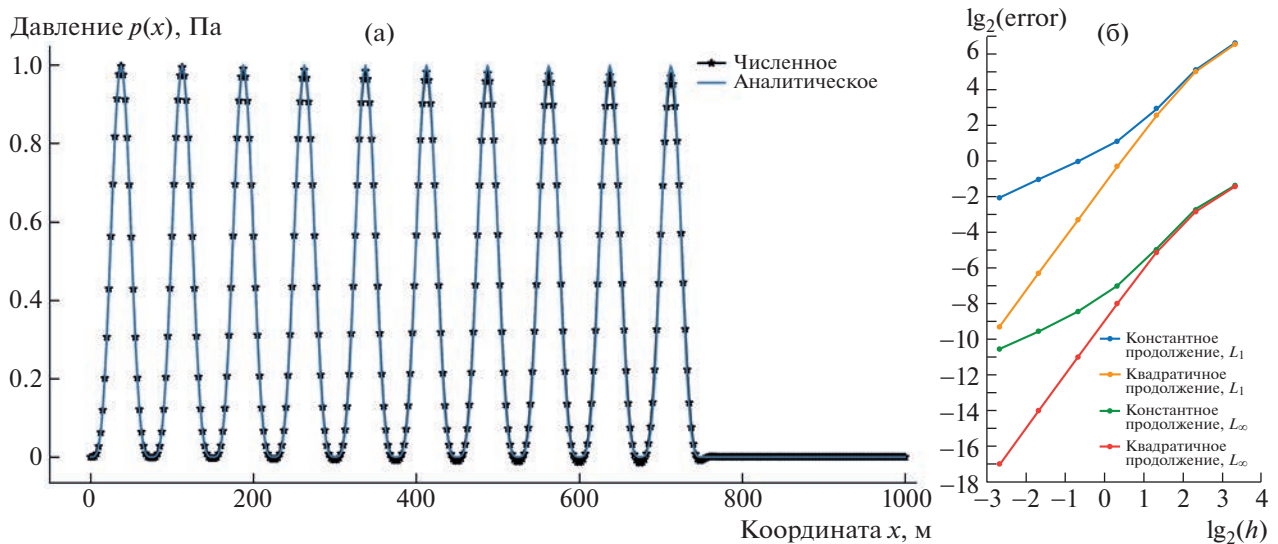


Рис. 2. (слева) аналитическое и численное решения задачи (10); (справа) зависимость ошибки по двум нормам от мелкости расчетной сетки.

Данная задача решалась вплоть до момента 0.5 с физического времени, за которое испускаемое возмущение еще не достигало правой границы расчетной области. Гладкое аналитическое решение данной задачи может быть записано в виде

$$p(x, 0.5) = \begin{cases} 0, & 750 < x \leq 1000, \\ \sin^4\left(\frac{\pi}{75}x - 10\pi\right), & 0 \leq x \leq 750. \end{cases} \quad (10)$$

На рис. 2 представлено полученное численное решение задачи (10), а также зависимость ошибок

Таблица 1. Результаты исследования сходимости “схемы с квадратичным продолжением”

Шаг сетки h	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
10	92.7889	0.3668	—	—
5	32.3485	0.1389	1.5203	1.4006
2.5	5.9299	0.0286	2.4476	2.2805
1.25	0.7940	0.0039	2.9007	2.8888
0.625	0.1001	0.0005	2.9881	2.9850
0.31250	0.0125	0.0001	2.9987	2.9976
0.15625	0.0016	0.0000	3.0001	2.9997

Таблица 2. Результаты исследования сходимости “схемы с константным продолжением”

Шаг сетки h	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
10	97.0202	0.3791	—	—
5	34.1853	0.1477	1.5049	1.3598
2.5	7.5925	0.0319	2.1707	2.2119
1.25	2.1471	0.0076	1.8222	2.0597
0.625	0.9755	0.0028	1.1382	1.4344
0.31250	0.4803	0.0013	1.0221	1.0946
0.15625	0.2396	0.0007	1.0036	1.0187

по нормам L_1 и L_{inf} . Для сравнения представлены результаты, получаемые при использовании стандартной “схемы с константным продолжением”, снижающей общий порядок расчетного алгоритма до первого. В табл. 1–2 представлены значения полученной ошибки решения при расчете на серии измельчающихся расчетных сеток, а также эмпирически рассчитанный порядок сходимости по двум последовательным расчетам.

Анализ результатов проведенных расчетов подтверждает сохранение построенной расчетной схемой третьего порядка сходимости вплоть до границы расчетной области включительно.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен процесс построения сеточно-характеристических схем повышенного порядка аппроксимации для линейных гиперболических систем уравнений. На примере одномерной акустической системы представлен вычислительный алгоритм, основанный на сведении исходной дифференциальной задачи в частных производных к задаче поли-

номиальной интерполяции. Во внутренних точках расчетной области использование широкого шаблона позволило обеспечить третий порядок аппроксимации. Подробно рассмотрены практические вопросы, возникающие при расчете значений инвариантов Римана вблизи и на самой границе расчетной области. Предложен общий подход, основанный на однозначном задании значений вектора искомых функций в фиктивном узле, выходящем из области интегрирования. Данная процедура позволяет далее применить исходные расчетные формулы на широком шаблоне. Проведенная эмпирическая оценка порядка сходимости итогового расчетного алгоритма подтвердила сохранение третьего порядка сходимости вплоть до границы включительно.

Отметим, что преимуществом предложенного подхода является возможность его непосредственного обобщения на произвольные одномерные линейные гиперболические системы уравнений. Одной из них, представляющей практический интерес для расчета задач сейсмической разведки, является модель линейно упругой среды. При этом вопрос обобщения схемы на много-

мерный случай требует дополнительного исследования, хотя для внутренних точек расчетной области уже разработаны соответствующие подходы [23].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в рамках Госзадания ИАП РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krautkrämer J., Krautkrämer H.* Ultrasonic Testing of Materials. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1990.
2. *Ba J., Du Q., Carcione J., Zhang H., Müller T.M.* Seismic Exploration of Hydrocarbons in Heterogeneous Reservoirs: New Theories, Methods and Applications. 2015.
3. *Moczo P., Kristek J., Kristekova M., Valovčan J., Galis M., Gregor D.* Material Interface in the Finite-Difference Modeling: A Fundamental View. Bulletin of the Seismological Society of America. 2022. Vol. 113. No. 1. P. 281–296.
4. *Duru K., Rannabauer L., Gabriel A.-A., Ling O., Igel H., Bader M.* A stable discontinuous Galerkin method for linear elastodynamics in 3D geometrically complex elastic solids using physics based numerical fluxes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. V. 389. P. 114386.
5. *Vogl C., Leveque R.* A High-Resolution Finite Volume Seismic Model to Generate Seafloor Deformation for Tsunami Modeling. Journal of Scientific Computing. 2017. Vol. 73. P. 1204–1215.
6. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 2018. — 287 с.
7. *Massau J.* (1899) Memoire sur l'integration graphique aux derives partielles. — F.: Meyer van Loo, 1899. — 190 p.
8. *Петров И.Б., Голубев В.И., Анкипович Ю.С., Фаворская А.В.* Численное моделирование акустических процессов в градиентных средах сеточно-характеристическим методом. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 51–56.
9. *Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V.* Grid-Characteristic Method on Overlapping Curvilinear Meshes for Modeling Elastic Waves Scattering on Geological Fractures. Minerals. 2022. Vol. 12. P. 1597.
10. *Петров И.Б., Голубев В.И., Петрухин В.Ю., Никитин И.С.* Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 1. С. 59–64.
11. *Петров И.Б., Голубев В.И., Шевченко А.В.* О задаче акустической диагностики прискважинной зоны. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. № 1. С. 92–96.
12. *Голубев В.И., Никитин И.С., Бураго Н.Г., Голубева Ю.А.* Явно-неявные схемы расчета динамики упруго-вязкопластических сред с малым временем релаксации. Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 1, С. 1–11.
13. *Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V.* The Implementation of Spectral Element Method in a CAE System for the Solution of Elasticity Problems on Hybrid Curvilinear Meshes. Model. Simul. Eng. 2017. Vol. 1. P. 1797561.
14. *Dovgilevich L., Sofronov I.* High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach. Applied Numerical Mathematics. 2015. Vol. 93. P. 176–194.
15. *Головизнин В.М., Соловьев А.В.* Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. М.: МАКС Пресс, 2018, 198 с.
16. *Головизнин В.М., Соловьев А.В.* Диссипативные и дисперсионные свойства разностных схем для линейного уравнения переноса на меташаблоне 4×3, Матем. моделирование, 33:6 (2021), 45–58; Math. Models Comput. Simul., 14:1 (2022), 28–37.
17. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. Доклады Академии наук. 1968. Т. 180, № 6. С. 1303–1305.
18. *Nishikawa H., Van Leer B.* Towards High-Order Boundary Procedures for Finite-Volume and Finite-Difference Schemes. 2023. <https://doi.org/10.2514/6.2023-1605>
19. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. — М.: Наука, 1970.
20. *Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations. Comput. Math. and Math. Phys. 2006. Vol. 46. P. 1560–1588.
21. *Kholodov A. S.* The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. Vol. 20. No. 6. P. 234–253.
22. *Шевченко А.В., Голубев В.И.* Граничные и контактные условия повышенного порядка аппроксимации для сеточно-характеристических схем в задачах акустики. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 9. С. 1–15.
23. *Голубев В.И., Шевченко А.В., Петров И.Б.* Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления. Компьютерные исследования и моделирование. 2022. Т. 14. № 4. С. 899–910.

ABOUT THE BOUNDARY CONDITION APPROXIMATION IN THE HIGHER-ORDER GRID-CHARACTERISTIC SCHEMES

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^a, V. I. Golubev^{a,b}, A. V. Shevchenko^{a,b}, and I. S. Nikitin^b**

^a*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^b*Institute of Computer Aided Design of RAS, Moscow, Russian Federation*

In this paper, we consider the problem of constructing a numerical solution to the system of equations of an acoustic medium in a fixed domain with a boundary. Physically, it corresponds to the process of the seismic wave propagation in geological media during the procedure of the seismic exploration of hydrocarbon deposits. The system of partial differential equations under consideration is hyperbolic. To construct its numerical solution, a grid-characteristic method is used on an extended spatial stencil. This approach makes it possible to construct a higher-order approximation scheme at the internal points of the computational domain. However, it requires a careful construction of the numerical solution near the boundaries. In this paper, the approach that preserves the increased approximation order up to the boundary is proposed. The verification numerical simulations were carried out.

Keywords: acoustic waves, computer simulation, grid-characteristic method, boundary conditions, approximation order

УДК 517.956.4+517.956.8+517.955

СУЩЕСТВОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО СРЕДНЕГО ВРЕМЕННОГО СБОРА В КПП-МОДЕЛИ НА СФЕРЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ И ИМПУЛЬСНОМ ОТБОРАХ

© 2023 г. Е. В. Винников^{1,2,*}, А. А. Давыдов^{1,2,**}, Д. В. Туницкий^{3,***}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 30.05.2023 г.

После доработки 23.10.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

На двумерной сфере рассматривается распределенный возобновляемый ресурс любой природы, динамика которого описывается моделью типа Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, и эксплуатация этого ресурса, осуществляемая путем постоянного или периодического импульсного отбора плотности ресурса. Показано, что после выбора допустимой стратегии эксплуатации динамика ресурса стремится к предельной динамике, соответствующей этой стратегии, и что существуют допустимые стратегии, доставляющие максимум среднего временного сбора ресурса.

Ключевые слова: Модель Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболическое полулинейное уравнение, слабое решение, стабилизация, оптимальное управление

DOI: 10.31857/S2686954323600453, **EDN:** DEDOKV

1. ВВЕДЕНИЕ

Качественный анализ динамики популяций и их предельных состояний является одной из востребованных задач прикладного характера. Если такое состояние является аттрактором всех нетривиальных динамик популяции, то в долгосрочной перспективе изучение изменения состояния популяции при наличии внешнего воздействия, связанного, например, с эксплуатацией популяции или изменениями в ее среде обитания, фактически сводится к анализу изменения этого предельного состояния и оценке скорости сходимости к нему. Это можно наблюдать уже на примере модели Ферхюльста $\dot{m} = am(1 - m/K)$, где m – масса популяции, а положительные константы a и K характеризуют восстановление популяции при ее малых объемах и емкость ареала ее обитания в целом [1–3].

В настоящей работе мы рассматриваем эксплуатацию распределенного возобновляемого

ресурса любой природы (например, промысловой популяции), динамика которого описывается обобщением модели Ферхюльста, а именно моделью Колмогорова–Петровского–Пискунова и Фишера, доставляемой полулинейным параболическим уравнением второго порядка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp + a(x)p - b(x)p^2, \quad (1)$$

где $p = p(t, x)$ – плотность ресурса в точке x области его распределения в момент времени t , L – стационарный самосопряженный эллиптический линейный дифференциальный оператор, учитывающий процесс диффузии ресурса, а функции a и $1/b$ являются аналогами коэффициентов a и K из модели Ферхюльста, только здесь они зависят от точки фазового пространства. Предполагается, что эти функции являются измеримыми ограниченными, при этом функция b положительна и отделена от нуля (т.е. $b \geq b_0 > 0$). Подобное уравнение появилось одновременно в работах [4] и [5], оно объединило в себе модель Ферхюльста и модель Фурье распространения тепла [6], появившуюся исторически раньше в начале девятнадцатого века. Информация по истории и библиографии работ, посвященных уравнению (1), можно найти в [7], а в статье [8] и монографии [9] приведен ряд приложений этого уравнения к моделям в биологии, чему и были посвящены работы [4] и [5] авторов модели.

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²НИТУ МИСИС, Москва, Россия

³Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*E-mail: evinnikov@gmail.com

**E-mail: davydov@mi-ras.ru

***E-mail: dtunitsky@yahoo.com

В работе [7] уравнение (1) изучается в n -мерном арифметическом пространстве с независимыми от времени функциями a и b и оператором L , периодическими по всем координатам фазового пространства. В этом случае при коэффициентах класса $C^{1+\varepsilon}$ этого оператора и ограниченных неотрицательных нетривиальных начальных распределений ресурса решения модели стремятся к общему аттрактору, являющемуся стационарным решением уравнения (1), как и в модели Ферхюльста. Это сводит анализ этих решений к изучению соответствующего уравнения на n -мерном торе $\mathbb{T}^n$. В этом случае при естественных ограничениях на постоянный или импульсный отборы существование допустимой стратегии отбора, достигающей максимум среднего временного сбора, было доказано в [10–12] и [13].

Естественно допускать, что доля постоянного (либо импульсного) отбора не является непрерывной и имеет разрывы, иначе трудно ожидать, что такой оптимальный отбор существует. В связи с этим разумно выбрать такой класс допустимых решений модели, который позволял бы построить удовлетворительную теорию разрешимости рассматриваемых уравнений при минимальных требованиях на регулярность их коэффициентов. В качестве такого класса в данной работе выступают слабые решения. В этом классе удается исследовать решения аналогов неоднородного уравнения (1) на сферах при довольно низких требованиях на регулярность его коэффициентов. Существование решений модели (1) при подобных ограничениях на ее параметры было установлено в [14] и [15].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Функциональные пространства. Мы будем рассматривать двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ радиуса 1, стандартно вложенную в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Это вложение индуцирует на ней риманову метрику g , имеющую вид $d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ в стандартных сферических координатах, порождает меру $V = V_g$ ($dV = |\sin\theta| d\theta d\varphi$) и связность Леви–Чевита со взаимно-однозначно определяемым ею оператором ковариантного дифференцирования $\nabla = \nabla_g$. С помощью этих метрики и меры стандартно вводятся L^p -пространства функций и тензорных полей, а с привлечением ковариантного дифференцирования ∇ конструируются $W^{k,p}$ -пространства Соболева и $C^{k,\alpha}$ -пространства Гельдера функций и тензорных полей, $k = 0, 1, 2, \dots$; $0 < \alpha \leq 1$ (см. [16, п. 10.2.4], [17]).

Для $T \in (0, +\infty]$ на касательном расслоении декартова произведения $[0, T) \times \mathbb{S}^2$ определена метрика $\tilde{g}$:

$$\tilde{g} : T([0, T) \times \mathbb{S}^2) \ni (\tau, \xi) \mapsto \tau^2 + g(\xi, \xi)$$

и соответствующие ей ковариантное дифференцирование $\nabla_{\tilde{g}} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_g$ и мера $V_{\tilde{g}} = dt \times V_g$. Аналогично, как и выше, с их помощью конструируются функциональные пространства L^p , $C^{k,\alpha}$ функций и тензорных полей для этого декартового произведения.

Для произвольного банахового пространства B с нормой $\|\cdot\|_B$ стандартным образом определяют банаховы пространства $L^p([0, T); B)$, $p \geq 1$, с нормами

$$\|q\|_{L^p([0, T]; B)} = \left(\int_0^T \|q(t)\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

$$\text{и} \quad \|q\|_{L^\infty([0, T]; B)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0; T]} \|q(t)\|_B,$$

соответственно (см. [18, гл. III, § 1], [19, гл. II, § 2]). Наконец, определим банахово пространство

$$W([0, T); \mathbb{S}^2) = L^2([0, T); W^{1,2}(\mathbb{S}^2)) \cap L^\infty([0, T); L^2(\mathbb{S}^2)).$$

с нормой

$$\|q\|_{W([0, T); \mathbb{S}^2)}^2 = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0; T]} \langle q(t), q(t) \rangle + \int_0^T \langle dq(t), dq(t) \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Для краткости будем использовать сокращение п.в., когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду по мере V (1) на $\mathbb{S}^2$.

2.2. Эволюционное уравнение. Предположим, что наряду с метрикой g на сфере $\mathbb{S}^2$ задана еще одна измеримая метрика a , и существуют такие положительные числа a_0 и a_1 , что п.в.

$$a_0 g(\eta, \eta) \leq a(\eta, \eta) \leq a_1 g(\eta, \eta) \quad (2)$$

при всех $\eta \in T^*\mathbb{S}^2$. Обозначим через d_a^* и d_g^* операторы, формально сопряженные с оператором внешнего дифференцирования d относительно метрик a и g соответственно (см. [20, гл. VIII, § 1]). В частности, $\langle a(dq, v), 1 \rangle = \langle a(q, d_a^* v), 1 \rangle$ для всех дифференциальных k -форм q и $(k+1)$ -форм v , $k = 0, 1, \dots, n-1$, и на k -формах $d_a^* = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$, где $*$ — оператор Ходжа, индуцированный метрикой a . Определим

на функциях $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ геометрический лапласиан (оператор Лапласа–де Рама) – линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta = d_a^* \circ d, \quad (3)$$

см. [21, гл. IV, § 5]. Условие (2) означает, что оператор (3) равномерно эллиптивен на сфере. В локальных координатах x^1, x^2 , введенных выше, он имеет вид

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{l,m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{a} a(dx^l, dx^m) \frac{\partial u}{\partial x^m} \right)$$

$$c \, a = \det \left(a \left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right).$$

Следовательно, эволюционное уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Delta q = (A(x) - u(x))q - B(x)q^2 \quad (4)$$

параболическое. В контексте модели Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера неизвестная функция $q = q(t, x)$ здесь соответствует плотности распределения некоторого возобновляемого ресурса в точке x сферы в момент времени t , метрика a в операторе Δ характеризует диффузию ресурса, функция u – управление, характеризующее интенсивность его перманентного сбора, а коэффициенты A и B – темпы обновления ресурса и насыщения им среды. Будем предполагать, что $A, u, B \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, и $B \geq \underline{B}$ п.в. для фиксированного числа $\underline{B} > 0$.

Слабым решением уравнения (4) на полуинтервале $[0, T)$ называется такая функция $q \in W([0, T); \mathbb{S}^2)$, что для любых $p \in C^\infty([0, T); \mathbb{S}^2)$ и $t \in [0, T)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle q(t), p(t) \rangle + \int_0^t \left(\langle dq(\tau), dp(\tau) \rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)}(\tau) - \langle q, p' \rangle(\tau) \right) d\tau = \\ = \langle q(0), p(0) \rangle + \int_0^t \langle (A - u)q(\tau) - Bq^2(\tau), p(\tau) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Слабое решение q уравнения (4), принимающее заданное начальное значение

$$q(0) = q_0, \quad q_0 \in L^\infty(\mathbb{S}^2), \quad q_0 \geq 0 \quad \text{п.в.}, \quad (5)$$

называется *слабым решением задачи Коши* (4), (5) на $[0, T)$.

Отметим, что в силу автономности уравнения (4) сдвиги его решений по времени остаются решениями, т.е. $q(t)$ тогда и только тогда является решением задачи (4), (5) на $[0, T)$, когда $q(t - T_0)$ для всякого $T_0 \in \mathbb{R}$ является решением этой задачи на $[T_0, T_0 + T)$.

2.3. Постановка задачи оптимизации. Моделирование эксплуатации возобновляемого ресурса приводит к поиску решений задачи (4), (5) на полуинтервале $[0, +\infty)$, на которые возможно накладываются дополнительно условия импульсного сбора с заданным периодом $\tau > 0$,

$$q(k\tau) = sq(k\tau -), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где функция $s \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $0 \leq s \leq 1$ п.в., характеризует интенсивность импульсного сбора.

Решением задачи (4), (6) называется такая функция $q \in L^\infty([0, \infty) \times \mathbb{S}^2)$, которая является решением уравнения (4) на полуинтервалах $[k\tau, (k+1)\tau)$, обладает левыми предельными значениями $q(k\tau -)$ и п.в. удовлетворяет равенствам (6). Если это решение еще и п.в. принимает начальное значение (5), то оно называется решением задачи (4)–(6). Решение задачи (4), (6) называется периодическим, если

$$q(0) = q(\tau). \quad (7)$$

Определим функционал Q качества эксплуатации ресурса как

$$\begin{aligned} Q : L^\infty(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{U} \times \mathfrak{S} \ni (q_0, u, s) \mapsto \\ \mapsto \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left(\int_0^t \langle q(\xi; q_0, u, s), u \rangle d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{0 < kT \leq t} \langle q(k\tau -; q_0, u, s), 1 - s \rangle \right), \end{aligned}$$

где $q = q(t; q_0, u, s)$ – решение задачи (4)–(6), а $\mathbb{U}$ и $\mathfrak{S}$ – фиксированные множества допустимых управлений сбором. Значение этого функционала – верхний предел временных средних сумм перманентного (первое слагаемое) и импульсного (второе слагаемое) сборов ресурса, плотность которого доставляет решение q .

Характерными для приложений допустимыми множествами перманентных и импульсных управлений являются

$$\mathbb{U} = \{u \in L^\infty(\mathbb{S}^2) \mid U_1 \leq u \leq U_2\},$$

$$\mathfrak{S} = \{e^{-\gamma r} \mid r \in L^\infty(\mathbb{S}^2), R_1 \leq r \leq R_2, \langle 1, r \rangle \leq E\},$$

где U_1, U_2, R_1, R_2 и γ – фиксированные ограниченные измеримые вещественнозначные функции на сфере, при этом U_1, R_1 и γ неотрицательны, а $E \in \mathbb{R}$ – допустимое усилие сбора – неотрицательно. Ограничение U_1 (или R_1) на перманентный отбор можно интерпретировать как минимально технически реализуемую плотность отбора, а U_2 (или R_2) – максимальную возможную плотность размещения ресурса сбора в силу экологических ограничений или из-за физической

емкости среды, т.е. в точке ареала эти ограничения по сути характеризуют минимальное и максимальное усилия, которые можно приложить в этой точке для достижения своих целей. Появление экспоненты $e^{-\gamma r}$ в характеристике импульсного сбора происходит здесь из теории поиска и связано со сложностью обнаружения или извлечения ресурса в точке области его распределения при величине усилия r , а функция γ характеризует эту сложность [22, 23].

Нетрудно видеть, что определенные таким образом множества перманентных и импульсных управлений — выпуклые, замкнутые и ограниченные в пространстве $L^2(\mathbb{S}^2)$, и, следовательно, они слабо секвенциально компактны в этом пространстве. Значения управлений из этих множеств будем называть *допустимыми*.

Целью эксплуатации ресурса является получение максимального значения функционала качества Q путем выбора подходящих допустимых перманентного и импульсного управлений. Мы показываем, что это значение функционала достигается, т.е. существуют допустимые управления, доставляющие максимум этого функционала, при этом этот максимум не зависит от начального ненулевого неотрицательного распределения ресурса. Точнее, после выбора таких управлений плотность ресурса стремится к предельному состоянию, которое не зависит от его начального ненулевого неотрицательного распределения. Здесь и ниже ненулевые неотрицательные начальные условия q_0 означают, что $V(\{x \in \mathbb{S}^2 \mid q_0 \neq 0\}) > 0$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

3.1. Стабилизация и существование оптимального решения.

Теорема 1. Пусть метрика $a \in L^\infty$, функции A , u , B , q_0 — измеримы и ограничены на сфере, причем $B \geq \underline{B}$ п.в. для фиксированного числа $\underline{B} > 0$. Тогда на полуинтервале $[0, +\infty)$ существует единственное решение q задачи (4), (5), причем $q \in C([0, +\infty); L^2(\mathbb{S}^2)) \cap L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{S}^2)$.

Эта теорема существования и единственности решения следует из результатов, опубликованных в [14] и [15].

Известно, что решения задачи Коши (4), (5) локально непрерывны по Гельдеру. Точнее, справедливо следующее утверждение о регулярности решения.

Теорема 2. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (4) удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда для решения $q \in L^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)$ уравнения (4), $T \in (0, +\infty)$, и $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\alpha =$

$$= \alpha(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)}), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \text{и} \quad C = C(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)}) \geq 0, \quad \text{что} \quad q \in C^{0, \alpha}([\varepsilon, T) \times \mathbb{S}^2) \quad \text{и} \quad \|q\|_{C^{0, \alpha}([\varepsilon, T) \times \mathbb{S}^2)} \leq C.$$

Доказательство этой теоремы при наложенных ограничениях вытекает из известных свойств решений линейных параболических уравнений (см. [24, гл. VI, § 7]). Естественно, что при дальнейшем повышении регулярности коэффициентов уравнения (4) соответствующим образом повышается и регулярность его решений, см. [24, гл. VI, § 2].

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение о существовании, единственности и регулярности решения изучаемой модели.

Теорема 3. Пусть коэффициенты, правая часть уравнения (4) и начальное значение (5) удовлетворяют всем условиям теоремы 1, и управления отбором допустимы. Тогда существует единственное решение q задачи (4)–(6), при этом для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа α , $0 < \alpha \leq 1$, и $C \geq 0$, зависящие от ε , что

$$q \in C^{0, \alpha}([\varepsilon + (k-1)\tau, k\tau) \times \mathbb{S}^2), \\ \|q\|_{C^{0, \alpha}([\varepsilon + (k-1)\tau, k\tau) \times \mathbb{S}^2)} \leq C, \quad k = 1, 2, \dots$$

С помощью теоремы 3 доказывается следующее утверждение о стабилизации к периодическому решению.

Теорема 4. Пусть коэффициенты, правая часть уравнения (4) и начальное значение (5) удовлетворяют всем условиям теоремы 1, и управления отбором допустимы. Тогда задача (4), (6), (7) имеет единственное решение q_∞ , такое что для любого решения q задачи (4)–(6) с ненулевыми неотрицательными начальными условиями выполнено предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q(t) - q_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} = 0.$$

Последняя теорема позволяет редуцировать изучаемую задачу оптимизации к выбору допустимых управлений, доставляющих максимум функционала качества на соответствующих предельных решениях q_∞ .

Теорема 5. Пусть коэффициенты, правая часть уравнения (4) и начальное значение (5) удовлетворяют всем условиям теоремы 1, и управления отбором допустимы. Тогда функционал качества Q при фиксированных допустимых управлениях принимает одно и то же значение для всех ненулевых неотрицательных начальных распределений ресурса, равное значению на соответствующем предельном распределении q_∞ . Кроме того, значения этого функционала ограничены, и существуют допустимые управления, доставляющие точную верхнюю грань его значений.

3.2. Выводы. Таким образом, после выбора стратегии эксплуатации эволюция плотности возобновляемого ресурса при любом начальном неотрицательном ненулевом распределении в силу теоремы 4 выходит на однозначно определенное предельное состояние, которое, если стратегия оптимальная, в силу теоремы 5 доставляет за каждый цикл отбора ресурса значение сбора, равное максимально возможному среднему временному сбору этого ресурса. Следовательно, выбор оптимальной стратегии эксплуатации ресурса (например, промысловой популяции) не только не ведет к истощению ресурса или к его исчезновению, а обеспечивает выход любой начальной ненулевой плотности ресурса к предельному состоянию, обеспечивающему близкий к максимальному сбор ресурса в натуральном виде за один цикл эксплуатации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // *Correspondance mathematique et physique*. 1838. V. 10. P. 113–121.
2. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
3. *Арнольд В.И.* “Жесткие” и “мягкие” математические модели Электронное издание М.: МЦНМО, 2014. 32 с. ISBN 978-5-4439-2008-5.
4. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастаньем вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика*. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
5. *Fisher R.A.* The Wave of Advance of Advantageous Genes // *Annals of Eugenics*, 1937. 7 (4), pp. 353–369. <https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x>
6. *Fourier J.B.J.* Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822.
7. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence // *J. Math. Biol.* 2005. V. 51. P. 75–113. <https://doi.org/10.1007/s00285-004-0313-3>
8. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: II—biological invasions and pulsating travelling fronts. *J. Math. Pures Appl.* 2005. V. 84. P. 1101–1146. <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2004.10.006>
9. *Pethame B.* Parabolic equations in biology: Growth, reaction, movement and diffusion. Springer, 2015. Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, 978-3-319-19499-8; 978-3-319-19500-1.
10. *Давыдов А.А.* Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова, Труды МИАН, 310, МИАН, М., 2020. P. 135–142; *Proc. Steklov Inst. Math.* 2020. V. 310. P. 124–130. <https://doi.org/10.1134/S0081543820050090>
11. *Davydov A.A.* Optimal steady state of distributed population in periodic environment // *AIP Conf. Proc.* 2021. V. 2333. P. 120007. <https://doi.org/10.1063/5.0041960>
12. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2021. Т. 27. № 2. С. 99–107. Optimal States of Distributed Exploited Populations with Periodic Impulse Harvesting // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2021. V. 315 (Suppl. 1). P. S1–S8. <https://doi.org/10.1134/S0081543821060079> <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-99-107>
13. *Davydov A.A., Vinnikov E.V.* Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting // *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2023. V. 407. P. 101–112. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9_5
14. *Туницкий Д.В.* О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2022. V. 86. № 5. P. 97–115. <https://doi.org/10.4213/im9261>
15. *Tunitsky D.V.* On Initial Value Problem for Semilinear Second Order Parabolic Equations on Spheres // *Proceedings of the 15th International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD)*, 26–28 September, 2022, Moscow, Russia. *IEEE Explore*, 9 November 2022. P. 1–4. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9934193> <https://doi.org/10.1109/MLSD55143.2022.9934193>
16. *Nicolaescu L.I.* Lectures on the Geometry of Manifolds. New Jersey: World Scientific, 2021.
17. *Tunitsky D.V.* On Solvability of Second-Order Semilinear Elliptic Equations on Spheres / *Proceedings of the 14th International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD)*, 27–29 September, 2021, Moscow, Russia. *IEEE Explore*, 22 November 2021. P. 1–4. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9600203>. ISBN 978-1-6654-1230-8 <https://doi.org/10.1109/MLSD52249.2021.9600203>
18. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. AMS, Providence, RI, 1997.
19. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
20. *Пале П.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
21. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
22. *Коопман В.О.* The theory of search. III. The optimum distribution of search effort // *Operations Res.* 1957. V. 5. № 5. P. 613–626.
23. *Жиков В.В.* Математические проблемы теории поиска // *Тр. Владимир. политех. ин-та*. 1968. С. 263–270.
24. *Lieberman G.M.* Second Order Parabolic Differential Equations. New Jersey: World Scientific, 2005.

EXISTENCE OF MAXIMUM OF TIME AVERAGED HARVESTING IN THE KPP-MODEL ON SPHERE WITH PERMANENT AND IMPULSE COLLECTION

E. V. Vinnikov^{a,b}, A. A. Davydov^{a,b}, and D. V. Tunitsky^c

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b*NUST MISIS, Moscow, Russian Federation*

^c*Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

On a two-dimensional sphere, a distributed renewable resource is considered, the dynamics of which is described by a model of the Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov–Fisher type, and the exploitation of this resource, carried out by constant or periodic impulse harvesting. It is shown that after choosing an admissible exploitation strategy, the dynamics of the resource tend to the limiting dynamics corresponding to this strategy, and that there is an admissible harvesting strategy that maximizes the time averaged harvesting of the resource.

Keywords: Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov–Fisher model, parabolic semilinear equation, weak solution, stabilization, optimal control

УДК 517.911.5, 517.988.5

СУЩЕСТВОВАНИЕ И РЕЛАКСАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МАКСИМАЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. А. Толстоногов^{1,*}

Поступило 03.03.2023 г.
После доработки 26.07.2023 г.
Принято к публикации 02.11.2023 г.

В сепарабельном гильбертовом пространстве изучается дифференциальное включение с зависящим от времени максимально монотонным оператором и возмущением. Возмущение представляет сумму зависящего от времени однозначного оператора и многозначного отображения с замкнутыми невыпуклыми значениями. Особенностью однозначного оператора является то, что сумма его с тождественным оператором, умноженным на положительную интегрируемую с квадратом функцию, является монотонным оператором. Многозначное отображение обладает свойством липшицевости по фазовой переменной. Доказываются теоремы существования и плотности в соответствующей топологии множества решений исходного включения в множестве решений с овыпукленным многозначным отображением. Для этих целей введены новые расстояния между максимально монотонными операторами.

Ключевые слова: максимально монотонный оператор, ρ -полуклонение операторов, релаксация

DOI: 10.31857/S268695432360012X, **EDN:** DAUBQA

Пусть $T = [0, a]$, $a > 0$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}^+$, H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, нормой $\| \cdot \|$, нулевым элементом Θ и единичным замкнутым шаром $\bar{B}$ с центром в Θ .

Расстояние от точки x до множества $C \subset H$ мы обозначаем $d(x, C)$.

Рассмотрим дифференциальные включения

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + F(t)x(t) + U(t, x(t)), \quad (1)$$

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + F(t)x(t) + \overline{\text{co}}U(t, x(t)), \quad (2)$$

$$x(0) = x_0 \in D(A(0)),$$

где символ $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества.

Здесь $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$ — семейство максимально монотонных операторов с об-

ластью определения $D(A(t))$, $F(t) \subset D(F(t)) \subset H \rightarrow H$ — семейство однозначных операторов с областью определения $D(F(t))$, $U : T \times H \rightrightarrows H$ — многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями.

Под решением включения (1) понимается пара $(x(\cdot), u(\cdot))$, состоящая из абсолютно непрерывной функции $x : T \rightarrow H$, $x(0) = x_0$, $x(t) \in D(A(t))$, $t \in T$ и $u(\cdot) \in L^1(T, H)$, удовлетворяющих включениям

$$-\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + F(t)x(t) + u(t) \text{ п.в.}, \quad (3)$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \text{ п.в.} \quad (4)$$

Решение включения (2) понимается аналогично с заменой включения (4) на включение

$$u(t) \in \overline{\text{co}}U(t, x(t)) \text{ п.в.}$$

Множества решений включений (1) и (2) мы обозначаем $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$ соответственно.

Целью работы являются нахождение условий непустоты множества $\mathcal{R}_U(x_0)$ и описание взаимосвязи между множествами $\mathcal{R}_U(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0)$.

Обозначим через $\text{gr}A(t)$ график оператора $A(t)$

$$\text{gr}A(t) = \{(x, y) \in H \times H; x \in D(A(t)), y \in A(t)x\}.$$

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН), Иркутск, Россия

*E-mail: alexander.tolstonogov@gmail.com

Через $C(T, H)$ мы обозначаем пространство всех непрерывных функций $x : T \rightarrow H$ с $\sup$ -нормой, а пространства H и $L^1(T, H)$, наделенные слабыми топологиями, обозначаются ω - H и ω - $L^1(T, H)$.

Так как значениями максимально монотонного оператора являются замкнутые выпуклые множества, то для любого $x \in D(A(t))$ существует элемент $A^0(t)x \in A(t)x$ минимальной нормы.

Предположения.

$H(A)$:

(1) семейство $A(t), t \in T$ измеримо, т.е. измеримо многозначное отображение $t \rightarrow \text{gr} A(t)$;

(2) существует функция $m_A(\cdot) \in L^2(T, R^+)$ и неубывающая функция $l_A : R^+ \rightarrow R^+$ такие, что

$$\|A^0(t)x\| \leq m(t)(1 + l_A(\|x\|)), \quad x \in D(A(t));$$

(3) для любого $f(\cdot) \in L^1(T, H)$ дифференциальное включение

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in A(t)x(t) + f(t), \\ x(0) &= x_0 \in D(A(0)), \end{aligned} \quad (5)$$

имеет решение.

$H(F)$:

(1) имеет место включение $D(F(t)) \supset D(A(t))$, $t \in T$;

(2) для почти каждого $t \in T$ оператор $F(t)$ является деминепрерывным, т.е. если $x_n \rightarrow x$ в H , то $F(t)x_n \rightarrow F(t)x$ в ω - H ;

(3) для любой измеримой функции $x : T \rightarrow H$, $x(t) \in D(A(t))$ функция $t \rightarrow F(t)x(t)$ измерима;

(4) существует функция $\omega(\cdot) \in L^2(T, R^+)$ такая, что

$$\langle F(t)x - F(t)y, x - y \rangle + \omega(t)\|x - y\|^2 \geq 0 \text{ п.в.};$$

(5) имеет место неравенство $\|F(t)x\| \leq m_F(t)(1 + l_F(\|x\|))$, $x \in D(F(t))$,

где $m_F(\cdot) \in L^2(T, R^+)$ и $l_F : R^+ \rightarrow R^+$ — неубывающая функция.

$H(U)$:

(1) отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо $\forall x \in H$;

(2) $\sup_{z \in H} |d(z, U(t, x)) - d(z, U(t, y))| < k(t)\|x - y\|$,

$$k(\cdot) \in L^1(T, R^+), \quad k(t) > 0, \quad t \in T,$$

$$x \neq y, x, y \in H;$$

справедливы неравенства

$$(3) \inf\{\|u\| \mid u \in U(t, \Theta)\} < m_U(t) \text{ п.в.};$$

$$(3^*) \sup\{\|u\| \mid u \in U(t, \Theta)\} \leq m_U(t) \text{ п.в.};$$

$$m_U(\cdot) \in L^1(T, R^+), \quad m_U(t) > 0, \quad t \in T.$$

Основные результаты:

Теорема 1. Пусть выполняются предположения $H(A)$, $H(U)$ (1)–(3). Тогда множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ не пусто.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения $H(A)$, $H(F)$, (1), (2), (3*). Тогда $\mathcal{R}_{\text{co}U}(u_0)$ является замкнутым подмножеством пространства $C(T, H) \times \omega$ - $L^1(T, H)$ и справедливо равенство

$$\mathcal{R}_{\text{co}U}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_U(x_0)},$$

где черта сверху означает замыкание в пространстве $C(T, H) \times \omega$ - $L^1(T, H)$.

Дадим конкретизацию предположения $H(A)$ (3).

Пусть X — нормированное пространство с метрикой $d_X(\cdot, \cdot)$ и единичным замкнутым шаром $\bar{B}_X$. Расстояние от точки $x \in X$ до множества $C \subset H$ мы обозначаем $d_X(x, C)$.

Для $\rho \in [0, +\infty]$ число

$$\text{exc}_\rho(C, D) = \sup\{d_X(x, D); x \in C \cap \rho \bar{B}_X\}$$

называется ρ -полуотклонением множества C от множества D . Если $C \cap \rho \bar{B}_X = \emptyset$, то считается $\text{exc}_\rho(C, D) = 0$.

Так как при $\rho = +\infty$ имеет место равенство $\rho \bar{B}_X = X$, то мы получаем полуотклонение $\text{exc}(C, D) = \text{exc}_\infty(C, D)$ множества C от множества D .

Теорема 3. Пусть выполняются предположения $H(A)$ (1), (2) и для любого $\rho \in [0, +\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $b_\rho : T \rightarrow R$ такая, что

$$\begin{aligned} \text{exc}_\rho(D(A(s)), D(A(t))) &\leq |b_\rho(t) - b_\rho(s)|, \\ s &\leq t, s, t \in T. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда имеет место предположение $H(A)$ (3), т.е. для любого $f(\cdot) \in L^1(T, H)$ включение (5) имеет решение.

Следствие 1. Пусть выполняются предположения $H(A)$ (1), (2) и для любого $\rho \in [0, +\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $b : T \rightarrow R$ такая, что

$$\begin{aligned} \text{exc}(D(A(s)), D(A(t))) &\leq |b(t) - b(s)|, \\ s &\leq t, s, t \in T. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.

Пусть $A_i : D(A_i) \subset H \rightrightarrows H$, $i = 1, 2$, — максимально монотонные операторы и $\rho \in [0, +\infty)$. Число

$$\text{exc dis}_\rho(A_1, A_2) = \sup \left\{ \frac{\langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle}{1 + \|y_1\| + \|y_2\|}; \right. \\ \left. \begin{aligned} x_1 \in D(A_1) \cap \rho \bar{B}, y_1 \in A_1 x_1, \\ x_2 \in D(A_2), y_2 \in A_2 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

мы назовем ρ -псевдополуотклонением оператора A_1 от A_2 . Если $D(A_1 \cap \rho \bar{B}) = \emptyset$, то считается $\text{exc dis}_\rho(A_1, A_2) = 0$.

Число

$$\text{dis}_\rho(A_1, A_2) = \max\{\text{exc dis}_\rho(A_1, A_2), \text{exc dis}_\rho(A_2, A_1)\}$$

назовем ρ -псевдорасстоянием между операторами A_1 и A_2 . При $\rho = +\infty$ мы получаем псевдорасстояние $\text{dis}(A_1, A_2) = \text{dis}_\infty(A_1, A_2)$, введенное в работе [1].

Лемма 1. Пусть выполняется предположение $H(A)(2)$ и для любого $\rho \in [0, +\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $b_\rho : T \rightarrow R$ такая, что

$$\text{exc dis}_\rho(A(s), A(t)) \leq |b_\rho(t) - b_\rho(s)|, \\ s \leq t, \quad s, t \in T.$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и имеют место неравенства (6). Поэтому справедливо утверждение теоремы 3.

Следствие 2. Пусть выполняется предположение $H(A)(2)$ и существует абсолютно непрерывная функция $b : T \rightarrow R$ такая, что

$$\text{dis}(A(s), A(t)) \leq |b(t) - b(s)|, \quad s \leq t, \quad s, t \in T. \quad (9)$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и имеет место неравенство (7). Следовательно, включение (5) имеет решение.

Так как для любого $x \in D(A)$ у максимально монотонного оператора $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ существует единственный элемент $A^0 x$ минимальной нормы, то будет определен однозначный оператор $A^0 : D(A) \subset H \rightarrow H$. Через

$$\text{gr} A^0 = \{(x, y) \in H \times H; x \in D(A), y = A^0 x\}$$

обозначим график оператора A^0 .

Пусть $A_i : D(A) \subset H \rightrightarrows H$, $i = 1, 2$ — максимально монотонные операторы и $\rho \in [0, +\infty)$.

Число

$$\text{exc}_\rho(A_1^0, A_2^0) = \text{exc}_\rho(\text{gr} A_1^0, \text{gr} A_2^0) \quad (10)$$

мы будем называть ρ -минимальным полуотклонением оператора A_1 от оператора A_2 . При $\rho = +\infty$ мы получим минимальное полуотклонение оператора A_1 от A_2

$$\text{exc}(A_1^0, A_2^0) = \text{exc}_{+\infty}(\text{gr} A_1^0, \text{gr} A_2^0).$$

Число

$$\text{haus}_\rho^0(A_1^0, A_2^0) = \max\{\text{exc}_\rho(A_1^0, A_2^0), \text{exc}_\rho(A_2^0, A_1^0)\} \quad (11)$$

называется ρ -минимальным расстоянием между операторами A_1 и A_2 .

Лемма 2. Пусть $A(t) : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$ — семейство максимально монотонных операторов и выполняется предположение $H(A)(2)$, в котором функция $m(t)$ является константой. Предположим, что для $\rho \in [0, +\infty)$ существует абсолютно непрерывная функция $c_\rho : T \rightarrow R$ такая, что

$$\text{exc}_\rho(A^0(s), A^0(t)) \leq |c_\rho(s) - c_\rho(t)|, \quad s \leq t, \quad s, t \in T.$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и существуют абсолютно непрерывные функции $b_\rho : T \rightarrow R$ такие, что будет иметь место неравенство (6). Поэтому справедливо утверждение теоремы 3.

При $\rho = +\infty$ лемма 2 допускает уточнения.

Следствие 3. Пусть выполняется предположение $H(A)(2)$ и существует абсолютно непрерывная функция $b : T \rightarrow R$ такая, что

$$\text{exc}(A^0(s), A^0(t)) \leq |b(t) - b(s)|, \quad s \leq t, \quad s, t \in T.$$

Тогда выполняется предположение $H(A)(1)$ и имеет место неравенство (7). Следовательно, включение (4) имеет решение.

Комментарии.

Впервые корректное доказательство существования абсолютно непрерывного решения включения (5) было дано в работе [2]. В этой работе предполагалось, что $f(\cdot) \in L^2(T, H)$, выполняются неравенство $\|A^0(t)x\| \leq c(1 + \|x\|)$, $t \in T$, $x \in D(A(t))$, $c > 0$ и неравенство (9), в котором $b : T \rightarrow R$ — абсолютно непрерывная функция с производной $\dot{b}(\cdot) \in L^2(T, R)$.

С тех пор появился ряд работ [2–4], в которых рассматривалось включение (5) как с однозначными, так и многозначными возмущениями. Во всех этих работах семейство операторов $A(t)$, $t \in T$ обладает теми же свойствами, что и в работе [2], а значениями возмущений являются выпуклые множества.

Теорема существования и релаксации для эволюционного включения (1) при отсутствии оператора $F(t)$ была доказана в работе [5]. В этой работе отображение $U(t, x)$ обладало свойствами $H(U)$ (1)–(3), (3*) с функциями $k(\cdot)$, $m_U(\cdot) \in L^2(T, R)$. Схема доказательства этих теорем была позаимствована из работы [6].

Отметим, что даже на уровне существования решения включения (5) наши результаты являются принципиально новыми.

Следует указать на нетрадиционное условие роста в предположении $H(A)$ (2), где функция l_A может иметь вид $l(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$ в отличие от традиционных условий роста в теории дифференциальных уравнений $l(r) = r$.

Необходимость введения полуотклонений $\text{exc dis}_\rho(A_1, A_2)$ и $\text{exc}_\rho(A_1^0, A_2^0)$ была обусловлена следующим фактом. В работе автора [7] был указан класс максимально монотонных операторов $A(t) : D(A(t)) \subset H \Rightarrow H$, для которых

$$\text{exc}(D(A(s)), D(A(t))) = \emptyset, \quad s \neq t,$$

но существовало семейство абсолютно непрерывных функций $b_\rho : T \rightarrow R$, для которых выполнялось неравенство (6). Поэтому подход, связанный с использованием полуотклонений (8), (10), позволяет расширить класс максимально монотонных операторов, для которых справедлива теорема 3 и, следовательно, теоремы 1 и 2. С другой стороны, если $\text{dis}_\rho(A_1, A_2) = 0$ для любого $\rho \in [0, +\infty)$, то $A_1 = A_2$.

Аналогично, если $\text{haus}_\rho^0(A_1^0, A_2^0) = 0$ для любого $\rho \in [0, +\infty)$, то $A_1 = A_2$. Поэтому числа $\text{dis}_\rho(\cdot, \cdot)$ и $\text{haus}_\rho^0(\cdot, \cdot)$ являются важными характеристиками максимально монотонных операторов.

Если в (11) заменить операторы A_1^0 и A_2^0 на операторы A_1 и A_2 , то мы получим ρ -расстояние между максимально монотонными операторами, которое было введено в работе [8] и использовалось для изучения максимально монотонных операторов.

Исходя из определения решения включения (1), его можно рассматривать как управляемую систему (3), (4). Поэтому результаты работы мо-

гут использоваться при изучении невыпуклых задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vladimirov A.A.* Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space // *Nonlinear Anal.* 1991. V. 17. P. 499–518. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(91\)90061-5](https://doi.org/10.1016/0362-546X(91)90061-5)
2. *Azzam-Laouir D., Belhoula W., Castaing C., Monteiro Marques M.D.P.* Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications // *J. Fixed Point Theory. Appl.* 2019. V. 21. 40. <https://doi.org/10.1007/s11784-019-0666-2>
3. *Azzam-Laouir D., Boutana Harid I.* Mixed semicontinuous perturbation to an evolution problem with time-dependent maximal monotone operator // *J. Nonlinear Convex Anal.* 2019. V. 20. № 1. P. 35–92.
4. *Azzam-Laouir D., Belhoula W., Castaing C., Monteiro Marques M.D.P.* Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators // *Evolution Equations and Control Theory.* 2019. V. 9. № 1. P. 219–254. <https://doi.org/10.3934/eect.2020004>
5. *Castaing Ch., Saidi S.* Lipschitz perturbation to evolution inclusions driven by time-dependent maximal monotone operators // *Topol. Math. Nonlinear Anal.* 2021. V. 58. № 2. P. 677–712. <https://doi.org/10.12775/TMNA.2021.012>
6. *Tolstonogov A.A.* Existence and relaxation of solutions for a subdifferential inclusion with unbounded perturbation // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. V. 447. P. 269–288. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.09.061>
7. *Tolstonogov A.A.* Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation // *Nonlinear Analysis.* 2014. V. 108. P. 291–301. <https://doi.org/10.1016/j.na.2014.06.002>
8. *Attouch H., Wets R.J.-B.* Quantitative stability of variational systems. I: The epigraphical distance // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 328. № 2. P. 695–729. <https://doi.org/10.2307/2001800>

EXISTENCE AND RELAXATION OF SOLUTIONS FOR A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH MAXIMAL MONOTONE OPERATORS AND PERTURBATIONS

Corresponding Member of the RAS A. A. Tolstonogov^a

^aMatrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation

A differential inclusion with a time-dependent maximal monotone operator and a perturbation is studied in a separable Hilbert space. The perturbation is the sum of a time-dependent single-valued operator and a multivalued mapping with closed nonconvex values. A particular feature of the single-valued operator is that its sum with the identity operator multiplied by a positive square-integrable function is a monotone operator. The multivalued mapping is Lipschitz continuous with respect to the phase variable. We prove the existence of a solution and the density in the corresponding topology of the solution set of the initial inclusion in the solution set of the inclusion with the convexified multivalued mapping. For these purposes, new distances between maximal monotone operators are introduced.

Keywords: maximal monotone operator, ρ -excess of operators, relaxation

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, РЕЛЯТИВИСТСКИХ РЕШЕНИЯХ МИЛНА-МАККРИ И О ТОЧКАХ ЛАГРАНЖА

© 2023 г. В. В. Веденяпин^{1,*}, А. А. Бай¹, А. Г. Петров²

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 22.06.2023 г.

После доработки 08.09.2023 г.

Принято к публикации 01.11.2023 г.

Мы предлагаем вывод уравнений гравитации из классического принципа наименьшего действия в форме уравнений Власова-Пуассона с лямбда-членом и применяем следствия типа Гамильтона-Якоби для получения космологических решений, а также исследуем свойства точек Лагранжа.

Ключевые слова: уравнение Власова, решения Милна-Маккри, уравнение Власова-Пуассона, точки Лагранжа

DOI: 10.31857/S2686954323600532, **EDN:** DBZLSR

Мы предлагаем вывод уравнений гравитации из классического принципа наименьшего действия в форме уравнений Власова-Пуассона с лямбда-членом и применяем следствия типа Гамильтона-Якоби для получения космологических решений, а также исследуем свойства точек Лагранжа.

1. МЕТРИКА ЛОРЕНЦА И ЛЯМБДА ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим следующее действие (ср. [1–15]):

$$S = -c \int m \left[\sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} + \frac{U}{c} \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dm dt - \\ - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U d\mathbf{x} dt$$

при $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Варируя по U , получим уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{v} dm - \frac{1}{2} c^2 \Lambda.$$

Перейдем к действию для одной частицы, подставив $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \delta(m - M)$

$$S = -cm \int \left[\sqrt{c^2 - u^2} + \frac{U}{c} \right] dt - \\ - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U d\mathbf{x} dt.$$

Для данного действия Лагранжиан и Гамильтониан выглядят следующим образом:

$$L(x, v) = -mc \sqrt{c^2 - u^2} - mU, \\ H(x, p) = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} + mU.$$

Таким образом, можем получить уравнение Лиувилля для гамильтоновой системы

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}}} \left(\frac{p}{m}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) - m \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0.$$

Мы вывели систему Власова-Пуассона для метрики Лоренца по схеме работ [5–7, 18–22]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}}} \left(\frac{p}{m}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) - m \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{v} dm - \frac{1}{2} c^2 \Lambda.$$

¹ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: vicveden@yahoo.com

Перейдем к гидродинамическим следствиям этой системы по схеме тех же работ. Для этого выполним подстановку $f(t, x, p, m) = \rho(t, x, m) \delta(p - Q(t, x))$, где Q — макроскопический импульс. Для Гамильтоновых систем проходит и дальнейшая градиентная подстановка $Q = \nabla W$. Получим гидродинамическое Гамильтон-Якобиево следствие уравнений Власова-Пуассона (см. [5–7, 16–22]) для общих гамильтоновых систем):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i(x, \nabla W))}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + mU(x) = 0,$$

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m\rho dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda,$$

где $v = -\frac{p}{m\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}}}$

Теперь рассмотрим уравнения в изотропном случае, т.е. при $U = U(r, t)$, $W = W(t, r, m)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\rho c W' x_i}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + mU(x) = 0,$$

$$3\left(\frac{U'}{r}\right) + r\left(\frac{U''}{r}\right) = 4\pi\gamma \int m\rho dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Из третьего уравнения в космологическом случае, т.е. когда плотность не зависит от координаты $\rho(x, m, t) = \rho(m, t)$ следует вид потенциала $U = \frac{r^2 B(t)}{6} - \frac{D(t)}{r}$, где $B(t) = 4\pi\gamma \int m\rho dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda$. Рассматривая космологический случай, можно также преобразовать первые два уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{c W' x_i}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho = 0$$

H — постоянная Хаббла, из определения которой следует уравнение:

$$H = \varphi + \frac{r}{3}\varphi', \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{c W'}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}},$$

решением которого является функция $\varphi = H + \frac{A(t)}{r^3}$.

Таким образом, мы получили систему уравнений Гурса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,$$

$$\frac{W'}{\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}} = \frac{1}{c} \left(rH + \frac{A(t)}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + mU(x) = 0.$$

Обозначим $\alpha(r, t) = \frac{1}{c} \left(rH + \frac{A(t)}{r^2} \right)$, $S = W'$. Тогда

$$S = \frac{mc\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \dot{S} = \frac{mc\dot{\alpha}}{(1-\alpha^2)^{3/2}}, \quad S' = \frac{mc\alpha'}{(1-\alpha^2)^{3/2}}.$$

Продифференцируем последнее уравнение по r .

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c \frac{SS'}{\sqrt{(mc)^2 + S^2}} + mU'(x) = 0,$$

$$\frac{mc\dot{\alpha}}{(1-\alpha^2)^{3/2}} + c \frac{mc\alpha'\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} + mU'(x) = 0,$$

$$(c\dot{\alpha} + c^2\alpha\alpha')^2 - (U'(x))^2(1-\alpha^2)^3 = 0.$$

Таким образом, если подставить в это уравнение

$$\alpha(r, t) = \frac{1}{c} \left(rH(m, t) + \frac{A(t)}{r^2} \right), \quad \dot{\alpha}(r, t) = \frac{1}{c} \left(rH(\dot{m}, t) + \frac{\dot{A}(t)}{r^2} \right),$$

$\alpha'(r, t) = \frac{1}{c} \left(H(m, t) - \frac{2A(t)}{r^3} \right)$, то получим следующее выражение

$$\left(r\dot{H} + \frac{\dot{A}}{r^2} + \left(rH + \frac{A}{r^2} \right) \left(H - \frac{2A}{r^3} \right) \right)^2 - \left(\frac{rB}{3} + \frac{D}{r^2} \right)^2 \left(1 - \left(rH + \frac{A}{r^2} \right)^2 \right)^3 = 0.$$

Если раскрыть скобки в этом уравнении, то в левой части получим выражение полиномиального вида относительно r . Следовательно, коэффициенты при всех степенях r в этом выражении должны будут равняться нулю. Рассмотрим коэффициент при r^8 , как можно заметить при раскрытии первого слагаемого степень r будет не больше 2, при раскрытии второго получим единственный член с этой степенью $\frac{r^8 H^6 B^2}{3}$, следовательно, $H^6 B^2 = 0$. Если пред-

положить, что $B(t) = 4\pi\gamma \int m\rho(m, t)dm - \frac{1}{2}c^2\Lambda \neq 0$, то получаем, что $H = 0$.

$$\left(\frac{\dot{A}}{r^2} - \frac{2A^2}{r^5} \right)^2 - \left(\frac{rB}{3} + \frac{D}{r^2} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{A}{r^2} \right)^2 \right)^3 = 0$$

Аналогично можно получить, что $B = 0$ из коэффициента при r^2 .

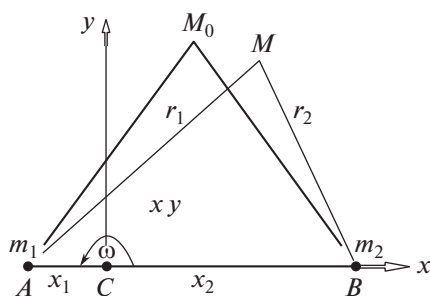


Рис. 2

$$V = -m_1 \left(\frac{\gamma}{r_1} + \frac{1}{2} C r_1^2 \right) - m_2 \left(\frac{\gamma}{r_2} + \frac{1}{2} C r_2^2 \right).$$

При $C = 0$ получаем классический случай. Безразмерная форма уравнений получается заменами координат точки $M(x, y)$

$$x = aX, \quad y = aY, \quad \dot{x} = a\dot{X}\omega, \quad \dot{y} = a\dot{Y}\omega,$$

$$C = \frac{\gamma}{a^3}c, \quad r_1 = aR_1, \quad r_2 = aR_2.$$

При этом преобразовании равносторонний треугольник AM_0B переходит в треугольник с единичными сторонами. Безразмерная функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + (X\dot{Y} - Y\dot{X}) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - V_1,$$

$$V_1 = - \left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) - K \left[\left(\frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) + \frac{1}{2}(1-\mu)R_1^2 + \frac{1}{2}\mu R_2^2 \right],$$

$$K = \frac{c}{1-c},$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Координаты вершины равностороннего треугольника $X = \frac{1}{2} - \mu$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ определяют точку равновесия системы. Делаем замену $X = \frac{1}{2} - \mu + q_1$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2} + q_2$ и находим гамильтониан движения системы в окрестности точки равновесия. Функция Гамильтона линейного приближения

$$H = \frac{1}{8} (4p_1^2 + 8p_1q_2 + 4p_2^2 - 8p_2q_1 + q_1^2 + 6\sqrt{3}(2\mu - 1)q_1q_2 - 5q_2^2) + \frac{1}{8} K (-3q_1^2 + 6\sqrt{3}(2\mu - 1)q_1q_2 - 9q_2^2).$$

Линейные уравнения Гамильтона имеют две пары собственных значений $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_3$, отличающихся знаком. Квадраты их можно привести к следующему удобному для анализа виду

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{(1-3K)^2 - 27m(1+K)^2} - (1-3K) \right),$$

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1-3K)^2 - 27m(1+K)^2} - (1-3K) \right),$$

$$K = \frac{c}{1-c}, \quad m = \mu - \mu^2.$$

При выполнении условия $m < m_*(K) = \frac{1}{27} \left(\frac{1-3K}{1+K} \right)^2$, $K < 1/3$ собственные числа являются чисто мнимыми и равновесие устойчиво в линейном приближении.

Выраженные через исходные параметры условия устойчивости принимают вид

$$\begin{aligned} \mu < \mu_*(c) &= \frac{1}{18} (9 - \sqrt{-192c^2 + 96c + 69}) = \\ &= \frac{2(1-4c)^2}{3(\sqrt{-192c^2 + 96c + 69} + 9)}, \quad c < \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Функция $\mu_*(c)$ монотонно убывает от значения $\mu_*(0) = \frac{9-\sqrt{69}}{18}$, соответствующего классическому случаю до нуля при $c = 1/4$. Таковы особенности треугольной точки Лагранжа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили Лоренц-релятивистский аналог уравнений Фридмана, обобщающий решение Милна–МакКри [23, 24] в различных направлениях: ввели лямбда-член, обосновали их модель, выведя из системы Власова–Пуассона, ввели отталкивание субстанции по аналогии с кулоновским, перешли к уравнению Гамильтона–Якоби, поставили вопрос о зависимости постоянной Хаббла от массы и заряда субстанции [25]. Полученное решение отличается от решения Милна–МакКри [23, 24] и от обобщения его добавкой Лямбда члена [20, 21] Лоренцевой метрикой и показывает несколько другое поведение: здесь лямбда член в точности компенсирует тяготение, а в [20, 21] приводит к ускоренному расширению. В рамках моделей Милна–МакКри с Лямбда-членом исследованы треугольные точки Лагранжа: оказалось, что они остаются точками Лагранжа для любого центрального закона взаимодействия. Они исследованы на устойчивость в зависимости от величины Лямбды Эйнштейна.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания 123021700055-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука. 1986.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тожество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. Choquet-Bruhat Y. General relativity and Einstein's Equations. New York: Oxford University Press. 2009.
9. Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P. BBGKY hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean approximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.
10. Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen J.E. III, Shepley L.C. "Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov-Einstein Systems," Physical Review D. 2011. V. 84, 024011 (11 p.).
11. Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J. "Theory and Applications of the Vlasov Equation," European Journal of Physics D. 2015. V. 69. P. 68 (3 p.).
12. Cercignani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. Choquet-Bruhat Y., Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.
14. Rein G., Rendall A.D. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data, Commun. Math.Phys. 1992. V. 150. P. 561–583.
15. Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov-Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. Козлов В.В., Общая теория вихрей, Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239 с.
17. Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свищевский С.Р. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. V. 62. № 6. С. 1016–1029.
19. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона-Якоби. Докл. РАН. 2013. V. 449. № 5. С. 521–526;
20. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Доклады РАН. 2020. Т. 495. С. 9–13.
21. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov-Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 2021. V. 136. № 670.
22. Веденяпин В.В. "О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона-Якоби и космологических решениях", Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. V. 504. P. 51–55.
23. Milne E.A. Relativity, Gravitation and World-Structure. Oxford Univ. Press, 1935.
24. McCrea W.H., Milne E.A. Quart. J. Math. 1934. V. 5. P. 73.
25. Gurzadyan V.G. The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory. 1985. V. 105. P. 42.

ON DERIVATION OF EQUATIONS OF GRAVITATION FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, RELATIVISTIC MILNE-MCCREE SOLUTIONS AND LAGRANGE POINTS

V. V. Vedenyapin^a, A. A. Bay^a, and A. G. Petrov^b

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^bA.Yu. Ishlinskii Institute of Mechanic Problems, Moscow, Russian Federation

We suggest the derivation of gravitation equations in the framework of Vlasov-Poisson relativistic equations with Lambda-term from the classical least action and use Hamilton-Jacobi consequence for cosmological solutions and investigate Lagrange points.

Keywords: Vlasov equation, Miln-McCree solutions, Vlasov-Poisson equation, Lagrange points

УДК 517.9

СВЯЗНОСТЬ ЛОКУСОВ ПРИМА В РОДЕ 5

© 2023 г. М. Ненашева^{1,2,*}

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым

Поступило 27.03.2023 г.

После доработки 18.07.2023 г.

Принято к публикации 05.10.2023 г.

Пространство модулей голоморфных дифференциалов на кривых рода g допускает естественное действие группы $GL_2(\mathbb{R})$. Изучение орбит этого действия и их замыканий привлекло интерес широкого круга исследователей в последние несколько десятилетий. В 2000-х годах К.~МакМаллен описал бесконечное семейство орбифолдов, являющихся замыканиями таких орбит в пространстве голоморфных дифференциалов на кривых рода 2. В пространствах голоморфных дифференциалов на кривых старших родов известными примерами орбифолдов, представляющих собой объединения замыканий орбит действия группы $GL_2(\mathbb{R})$ являются *локусы Прима*. Они непусты для поверхностей рода не выше 5. В настоящей работе приведены первые нетривиальные вычисления числа компонент связности в локусах Прима для поверхностей старшего возможного рода.

Ключевые слова: плоские поверхности, пространства модулей, голоморфные дифференциалы

DOI: 10.31857/S2686954323600155, **EDN:** DAKSRS

Локусы Прима. Для компактной римановой поверхности X с голоморфной инволюцией $\rho: X \rightarrow X$ обозначим через $\Omega(X)^-$ пространство голоморфных 1-форм на X , нечетных относительно ρ , через $(\Omega(X)^-)^* \mathbb{C}$ -двойственное к нему пространство, через $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ группу ρ -нечетных $\mathbb{Z}$ -циклов в X . Абелево многообразие $\text{Prym}(X, \rho) = (\Omega(X)^-)^* / H_1(X, \mathbb{Z})^-$ называется *многообразием Прима*. Кольцо его эндоморфизмов $\text{End}(\text{Prym}(X, \rho))$ состоит из линейных отображений $(\Omega(X)^-)^* \rightarrow (\Omega(X)^-)^*$, переводящих решетку $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ в себя. Эндоморфизм $T \in \text{End}(\text{Prym}(X, \rho))$ называется *самосопряженным*, если $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ относительно стандартного симплектического спаривания на $x, y \in H_1(X, \mathbb{Z})^-$. Если $\dim_{\mathbb{C}} \Omega(X)^- = 2$, то 1-формы $\omega \in \Omega(X)^-$ называются *дифференциалами Прима*.

Для натурального $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$ кольцо $\mathbb{O}_D \simeq \mathbb{Z}[T]/(T^2 + bT + c)$, $D = b^2 - 4c$ (для целых b, c), называется *квадратичным порядком* с дискри-

минантом D . Многообразие Прима $\text{Prym}(X, \rho)$ допускает вещественное умножение на $\mathbb{O}_D$, если в кольцо его эндоморфизмов есть собственное подкольцо $R \subset \text{End}(\text{Prym}(X, \rho))$, изоморфное $\mathbb{O}_D$ и порожденное самосопряженным эндоморфизмом. (Здесь “собственное” означает, что если $nU \in R$ для некоторого ненулевого $U \in \text{End}(\text{Prym}(X, \rho))$ и натурального n , то $U \in R$). Кольцо R действует также на $\Omega(X)^-$. Дифференциал Прима ω для пары (X, ρ) называется *собственным дифференциалом Прима*, если $0 \neq R\omega \subset \mathbb{C}\omega$; в этом случае $R\omega \subset \mathbb{Q}[\sqrt{D}]\omega$.

Множество всех собственных дифференциалов для фиксированного D называется *локусом Прима*. Локусы Прима представляют собой орбифолды в пространствах модулей H_g голоморфных дифференциалов на кривых рода g , $g \leq 5$ [10]. Из формулы Римана–Гурвица вытекает, что для $g > 5$ таких 1-форм нет.

Каждое пространство H_g стратифицировано; страт $H(k)$ этой стратификации задается разбиением $k = (k_1, \dots, k_s)$ числа $2g - 2$ и состоит из 1-форм, имеющих нули кратностей $k_1, \dots, k_s$. Будем обозначать через $\Omega E_D(k)$ пересечение локуса Прима со стратом $H(k)$. Каждый локус $\Omega E_D(k) \subset H(k)$ является несвязным объединением конечного числа орбифолдов. Количество компонент связности в $\Omega E_D(k)$ является важнейшей характеристикой геометрии стратов. Его подсчет для некоторых

¹Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

²Национальный исследовательский институт “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: marina.nenasheva@skoltech.ru

разбиений κ при $g=2, 3, 4$ выполнен в [4–6, 9]. В роде $g=5$ такие вычисления отсутствуют. Нашим основным результатом является следующее утверждение, полностью описывающее количество компонент связности в локусах Прима рода 5 для разбиения $\kappa = (4, 4)$, т.е. для страта 1-форм с двумя нулями 4-го порядка в H_5 . Локусы $\Omega E(4, 4)$ имеют комплексную размерность $3 \sim g_3$.

Теорема 1. *Локусы Прима $\Omega E_D(4, 4)$ не пусты и имеют одну компоненту связности для всех $D \geq 4$.*

Методы, использованные для получения этого результата, используют геометрию взаимного расположения нулей голоморфного дифференциала на поверхностях, принадлежащих локусам Прима. В случае, когда есть только один, ноль они не применимы. Однако для рода 5 известно, что локусы Прима в соответствующем страте пусты. В случае страт старшей размерности использовать данный подход оказывается сложнее, хотя мы надеемся получить результаты и для стратов с большим числом нулей.

Для пары (X, ρ) и собственного дифференциала Прима ω положим $Y = X/\rho$. На Y существует мероморфный квадратичный дифференциал q с полюсами кратности не выше 1, такой, что $\pi^* q = \omega^{\otimes 2}$. Полюса квадратичного дифференциала q лежат в образах неподвижных точек инволюции ρ [1]. Поскольку $\dim \Omega(X)^- = 2$, имеем $g(X) - g(Y) = 2$, т.е. $g(Y) = 3$. Поэтому разность количества нулей и количества полюсов квадратичного дифференциала q равна $4(g(X) - 2) - 4 = 4g(X) - 12 = 8$. Нули квадратичного дифференциала q могут быть либо на один меньшей кратности, чем у ω , либо удвоенной кратности, если у ω есть пара нулей равной кратности, переставляемых инволюцией ρ .

Периодические направления. Всякий ненулевой голоморфный дифференциал на римановой поверхности определяет на ней плоскую метрику с коническими особенностями в нулях дифференциала. Поэтому точки (X, ω) пространств H_g называют *плоскими поверхностями*. Отрезки геодезической в этой метрике с началом и концом в особых точках называются *седловыми связками*. Поверхность (X, ω) называется *вполне периодической вдоль данного направления* θ , если каждая идущая в этом направлении геодезическая либо замкнута, либо представляет собой объединение седловых связок; в этом случае направление θ называется *вполне периодическим*. Длина седловой связки в плоской метрике называется *относительным периодом*, а длина замкнутой геодезической *абсолютным периодом*.

Изопериодические деформации. Изопериодической деформацией плоской поверхности $(X, \omega) =$

$(X_0, \omega_0) \in H_g$ называется непрерывный путь (X_t, ω_t) , $t \in [0, 1]$ в H_g , вдоль которого интегралы 1-формы ω_t по непрерывно деформируемым замкнутым циклам постоянны. Любая изопериодическая деформация, соединяющая пару (X_0, ω_0) с (X_1, ω_1) , гомотопна композиции сдвигов, склейки и расщепления нулей дифференциалов ω_t . При сдвиге нуля 1-формы на малую величину $s \in \mathbb{C}$ ко всем ее относительным периодам с началом в этом нуле прибавляется s ; *расщепление* нуля порядка k заменяет его на пару нулей порядков k_1, k_2 , $k_1 + k_2 = k$; *склейка* — обратное преобразование к расщеплению; эти деформации подробно описаны в [7].

Пусть 1-форма ω на римановой поверхности X имеет два нуля, порядков k_1 и k_2 соответственно, $\kappa = (k_1, k_2)$. Предположим, что эти два нуля соединены парой седловых связок одинаковой длины, идущих в одном и том же направлении θ . В этом случае интеграл от ω по циклу, представляющему собой объединение этих двух седловых связок, равен 0. Сдвигая второй ноль к первому в направлении θ , мы получаем изопериодическую деформацию пары (X, ω) . Ее пределом при стремлении относительного периода к нулю, т.е. при стягивании цикла в точку, является особая риманова поверхность. Такая изопериодическая деформация называется *пламбингом*. Более общим образом, пламбинг возникает в случае, когда два нуля 1-формы соединены двумя или более седловыми связками одинаковой длины, идущими в одном и том же направлении.

Доказательство Теоремы 1 разбивается на несколько лемм.

Лемма 1. *Если $(X, \omega) \in \Omega E_D(4, 4)$, то соответствующая инволюция Прима $\rho : X \rightarrow X$ не имеет неподвижных точек.*

Доказательство. Поскольку $g(X) = 5$, род поверхности $Y = X/\rho$ равен 3. Квадратичный дифференциал q , поднимающийся в $\omega^{\otimes 2}$, может иметь только один ноль порядка 8. В этом случае у него нет полюсов, а значит, у инволюции ρ нет неподвижных точек.

На всякой поверхности Прима есть вполне периодическое направление [3], быть может, не единственное. Для произвольного вполне периодического направления на (X, ω) седловые связки при действии инволюции ρ переходят в седловые связки. Поэтому из отсутствия неподвижных точек у ρ следует, что все множество седловых связок разбивается на пары, связки внутри каждой из которых переставляются инволюцией ρ .

Лемма 2. *Любой собственный дифференциал Прима $(X, \omega) \in \Omega E_D(4, 4)$ можно соединить непре-*

рывным путем в $\Omega E_D(4,4)$ с собственным дифференциалом, для которого имеется вполне периодическое направление с седловой связкой, соединяющей различные нули.

Доказательство. Пусть у поверхности X все седловые связки вдоль вполне периодического направления θ замкнуты, т.е. конец каждой из них совпадает с ее началом. При изопериодическом сдвиге одного из нулей 1-формы ω выбранное вполне периодическое направление меняется непрерывно. Без ограничения общности мы можем считать это направление постоянным и горизонтальным. При сдвиге нуля 1-формы ω на вектор $c \in \mathbb{C}$ ко всем ее относительным периодам добавляется величина c . Подобрав значение величины c таким образом, чтобы аргумент некоторого результирующего относительного периода совпал с направлением θ , т.е. этот относительный период стал вещественным, мы добьемся того, что абсолютный и относительный период продеформированной 1-формы станут пропорциональны друг другу. Последнее означает, что у вполне периодического направления найдется седловая связка, соединяющая различные нули.

Лемма 3. Любой собственный дифференциал Прима $(X, \omega) \in \Omega E_D(4,4)$ можно соединить непрерывным путем в $\Omega E_D(4,4)$ с собственным дифференциалом, полученным пламбингом либо из плоской поверхности в $H(6)$ или $H(1,1)$, либо из особой поверхности, являющейся объединением двух поверхностей, каждая из которых лежит в $H(2)$.

Доказательство. При изопериодических сдвигах относительные периоды по седловым связкам в каждой паре, определенной инволюцией ρ , меняются на одну и ту же величину, поэтому на новой поверхности также имеется инволюция Прима. Поскольку длины абсолютных периодов сохраняются, новая 1-форма является собственной для этой инволюции, а значит такие сдвиги задают пути вдоль $\Omega E_D(4,4)$.

По лемме 2, существует путь в поверхность с парой незамкнутых седловых связок в выбранном вполне-периодическом направлении. Поскольку два нуля дифференциала Прима ω переставляются инволюцией ρ , каждая пара незамкнутых связок образует абсолютный цикл, интеграл от ω по которому равен нулю. Сдвигая один из нулей вдоль направления θ , можно уменьшить относительные периоды, получив пару седловых связок (быть может, не одну) с концами в различных нулях, такую, что длина образованного ими цикла γ сколь угодно мала. Такую поверхность можно получить пламбингом из поверхности, результат нормализации которой является поверхностью меньшего рода. По формуле Римана–Гурвица, два нуля 1-формы ω соединены в направлении θ либо двумя седловыми связками одинаковой дли-

ны, образующими один абсолютный цикл, либо четырьмя седловыми связками одинаковой длины, разбитыми на два ρ -инвариантных абсолютных цикла. В первом случае результатом вырождения является поверхность из страта $H(6)$, если абсолютный цикл не разделяющий, и пара поверхностей из страта $H(2)$, если он разделяющий. Во втором случае мы получаем поверхность из страта $H(1,1)$.

Лемма 4. Поверхность (X, ω) из локуса $\Omega E_D(4,4)$ при данном значении D можно получить пламбингом только из особых поверхностей, результат нормализации которых принадлежит локусам $\Omega E_D(6)$ или $\Omega E_D(1,1)$, либо образован парой поверхностей в $\Omega E_D(2)$.

Доказательство. Инволюция Прима на римановой поверхности продолжается по непрерывности до инволюции Прима на поверхностях, полученных из нее сдвигом. Поэтому на каждой поверхности, являющейся результатом пламбинга особой римановой поверхности Прима, зафиксирована голоморфная инволюция. При пламбинге поверхности из страта $H(6)$ особая точка раздувается в абсолютный цикл инвариантный относительно действию инволюции, причем значения остальных абсолютных периодов не меняются. Поэтому, если 1-форма на продеформированной поверхности лежит в $\Omega_D^-(X)$, то и предельная 1-форма на поверхности в $H(6)$ задает точку в $\Omega E_D(6)$. При этом, по построению, точка пламбинга — единственная неподвижная точка инволюции Прима. Для страта $H(1,1)$ аналогичное рассуждение показывает, что возмущаемая особая поверхность лежит в $\Omega E_D(1,1)$. В случае разделяющей петли γ аналогичное вычисление показывает, что пламбинг применяется к особой поверхности, образованной склейкой по одной точке двух экземпляров одной поверхности из $\Omega E_D(2)$, $D = d^2$. Здесь точка пламбинга это единственный ноль дифференциала на каждой копии.

На пространстве H_g определено естественное действие группы $GL_2^+(\mathbb{R})$, возникающее как обобщение ее действия на пространстве плоских то-ров $GL_2^+(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{R})$ [8]. Страты $H_g(k)$ инвариантны относительно этого действия. Каждая компонента связности локуса Прима представляет собой аффинно-инвариантный орбиформ. Аффинно-инвариантным орбиформом называется замкнутое связное подмножество $M \subset H(k)$, являющееся образом какого-то орбиформа $\mathcal{M}$ при собственной иммерсии f , такой, что для любой точки $x \in \mathcal{M}$ найдется открытая окрестность $U(x)$, такая, что окрестность $f(U)$ точки $f(x)$ задается однородными линейными уравнениями в координатах

периодов. Афинно-инвариантные орбиолды инварианты относительно действия группы $GL_2^+(\mathbb{R})$ на H_g [11]. Операция пламбинга для точек локусов Прима, в случае когда точки пламбинга неподвижные точки инволюции или нули дифференциала, эквивариантна относительно действия группы $GL_2^+(\mathbb{R})$. Здесь эквивариантность означает, что действие элемента g переводит окрестность, которую можно получить при пламбинге в разных направлениях из точки X , в окрестность, полученную пламбингом из точки gX' , где X' — результат нормализации X .

Эндоморфизм из кольца $R \simeq O_D$ можно представить как целочисленный оператор, действующий на векторах, составленных из абсолютных периодов ω по циклам, нечетным относительно инволюции Прима. Условие того, что ω является собственным дифференциалом Прима, эквивалентно тому, что данный вектор абсолютных периодов является собственным для соответствующего оператора с собственным значением из кольца O_D .

Лемма 5. *В случае данного значения $D \neq d^2$, локус $\Omega E_D(4, 4)$ не содержит поверхности, которую можно получить пламбингом из особых поверхностей, результат нормализации которых принадлежит локусам $\Omega E_D(1, 1)$.*

Доказательство. Инволюция Прима на поверхности в $\Omega E_D(1, 1)$, в отличие от инволюции в $\Omega E_D(4, 4)$, не меняет местами нули дифференциала. Пламбинг по конструкции осуществляется в особой точке кривой, чья нормализация лежит $\Omega E_D(1, 1)$, при этом оба нуля возникают в точках нормализации. Поэтому по конструкции пламбинга, если на полученной поверхности в $H(4, 4)$ есть инволюция, переставляющая нули, то и поверхность в $\Omega E_D(1, 1)$ имеет в дополнение к инволюции Прима симметрию второго порядка s , переставляющую два нуля. На поверхности из $\Omega E_D(1, 1)$ инволюция s существует только при условии, что абсолютные периоды попарно равны. Но это означает, что действием $GL_2^+(\mathbb{R})$, можно получить поверхность из того же локуса, со значением периодов в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[i]$ [2]. Следовательно, так как оператор эндоморфизма имеет целые коэффициенты, собственное значение для вектора периодов также целое, но оно принадлежит кольцу O_D , значит $D = d^2$. Следовательно, при $D \neq d^2$ таких точек нет. В случае, если $D = d^2$, действием $GL_2^+(\mathbb{R})$ любую поверхность в $\Omega E_D(4, 4)$ можно перевести в поверхность, чей вектор периодов целочисленный.

Для $D \neq d^2$ любую поверхность в $\Omega E_D(4, 4)$ можно изопериодически продеформировать в поверхность, полученную пламбингом из поверхности в $\Omega E_D(6)$ или из двух экземпляров поверхности в $\Omega E_D(2)$. Всякая поверхность, полученная пламбингом из двух экземпляров одной поверхности в $\Omega E_D(2)$, связана непрерывным путем внутри страта с поверхностью, полученной пламбингом из $\Omega E_D(6)$. Такие пути задаются сдвигом одного из нулей вдоль подходящей неразделяющей кривой на поверхности. Наличие такой кривой следует из классификации поверхностей в $\Omega E_D(2)$, $D \neq d^2$ [9].

Наоборот, каждую поверхность из $\Omega E_D(6)$ можно изопериодически продеформировать в поверхность из $\Omega E_D(4, 4)$.

Поскольку условие изопериодичности не зависит от относительных периодов, пламбинг можно осуществлять в любом направлении. Множество поверхностей в $\Omega E_D(4, 4)$, которые можно получить пламбингом точки из $\Omega E_D(6)$, линейно связано по конструкции. Отсюда вытекает, что множество афинно-инвариантных орбиолдов в $\Omega E_D(4, 4)$ для $D \neq d^2$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством таких орбиолдов в $\Omega E_D(6)$. Поскольку страт $\Omega E_D(6)$ связан и не пуст для $D \neq 9, 4$ (см. [6]), страт $\Omega E_D(4, 4)$ также связан для $D \neq d^2$. Для $D = d^2$, $D > 9$, всякая поверхность, полученная пламбингом из поверхности в $\Omega E_D(1, 1)$ или двух экземпляров одной поверхности в $\Omega E_D(2)$, связана непрерывным путем внутри страта с поверхностью, полученной пламбингом из $\Omega E_D(6)$. Такие пути задаются сдвигом одного из нулей вдоль подходящей неразделяющей кривой на поверхности. Наличие такой кривой следует из классификации поверхностей в $\Omega E_D(1, 1)$, $\Omega E_D(2)$, $D = d^2$ [9].

Для $D = 9$ имеем $\Omega E_9(6) = \emptyset$, поэтому поверхность из $\Omega E_9(4, 4)$ может быть получена пламбингом только из двух экземпляров одной поверхности в $\Omega E_9(2)$ или из поверхности в $\Omega E_9(1, 1)$. Из классификации поверхностей в $\Omega E_9(1, 1)$, $\Omega E_9(2)$ вытекает наличие непрерывного пути между поверхностями этих двух типов, задаваемого изопериодическими сдвигами.

В свою очередь, для $D = 4$ имеем $\Omega E_4(6) = \Omega E_4(2) = \emptyset$, поэтому поверхность может быть получена только из поверхности в $\Omega E_4(1, 1)$. Страты $\Omega E_9(1, 1)$, $\Omega E_4(1, 1)$ связны и непусты [9]. Локусы Прима $\Omega E_D(1, 1)$, $\Omega E_D(2)$, $\Omega E_D(6)$ пусты для $D < 4$, [6, 9]. Доказательство закончено.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Э. Ланно и С.К. Ландо за ценные замечания и полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ 23-11-00150 “Математические проблемы современной математической физики”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Douady A., Hubbard J. On the density of strebel differentials. *Inventiones Mathematicae*. 1975. V. 30. № 06. P. 175–179.
2. Eskin A., Kontsevich M., Zorich A. Sum of lyapunov exponents of the hodge bundle with respect to the teichmüller geodesic flow. *Publications mathématiques*. 2011. V. 120. № 12. P. 207–333.
3. Lanneau E., Nguyen D. Complete periodicity of prym eigenforms. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 2013. V. 49. № 01. P. 87–130.
4. Lanneau E., Nguyen D. Teichmüller curves generated by weierstrass prym eigenforms in genus three and genus four. *Journal of Topology*. 2014. V. 7. P. 475–522.
5. Lanneau E., Nguyen D. $gl_2^+(\mathbb{R})$ -orbits in prym eigenform loci. *Geometry and Topology*. 2016. V. 20. P. 1359–1426.
6. Lanneau E., Nguyen D. Weierstrass prym eigenforms in genus four. *Journal of The Institute of Mathematics of Jussieu*. 2018. V. 19. P. 2045–2085.
7. Eskin A., Masur H., Zorich A. Moduli spaces of abelian differentials: the principal boundary, counting problems, and the siegel-veech constants. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*. 2002. V. 97. P. 61–179.
8. Masur H., Tabachnikov S. Rational billiards and flat structures. *Handbook of Dynamical Systems*. 2002. V. 1. № 01. P. 1015–1089.
9. McMullen C. Teichmüller curves in genus two: discriminant and spin. *Mathematische Annalen*. 2005. V. 333. P. 87–130.
10. McMullen C. Prym varieties and teichmüller curves. *Duke Mathematical Journal*. 2006. V. 133. P. 569–590.
11. Eskin A., Mirzakhani M., Mohammadi A. Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $sl_2(\mathbb{R})$ action on moduli space. *Annals of Mathematics*. 2015. V. 182. P. 673–721.

ОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРАКА

© 2023 г. А. М. Савчук^{1,*}, И. В. Садовничая^{1,**}

Представлено академиком Б.С. Кашиным

Поступило 26.06.2023 г.

После доработки 25.10.2023 г.

Принято к публикации 01.11.2023 г.

В работе изучается вопрос о построении и оценках сильно непрерывной операторной группы, порожденной одномерным оператором Дирака, действующем в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$. Потенциал предполагается суммируемым. Доказано, что эта группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$ и в пространствах $\mathbb{H}_U^\theta$, $\theta > 0$, учитывающих краевые условия. Аналогичные результаты получены и в пространствах $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. Кроме того, получены оценки на рост группы.

Ключевые слова: оператор Дирака, суммируемый потенциал, операторная группа

DOI: 10.31857/S2686954323600568, **EDN:** CZLLLF

Рассмотрим одномерный оператор Дирака

$$\mathcal{L}y = By' + P(x)y,$$

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$x \in [0, \pi]$, $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$. Предполагается, что краевые условия

$$Uy = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0$$

регулярны по Биркгофу, т.е. $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$. Здесь J_{ik} — определитель, составленный из i -го и k -го столбцов матрицы $U = (u_{ij})_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 4}$. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ определен на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{y \in W_1^1[0, \pi] : \mathcal{L}y \in \mathbb{H}, Uy = 0\}.$$

Функция $P(x)$ — комплекснозначная, $p_j \in L_1[0, \pi]$. Работа посвящена построению и оценкам сильно непрерывной операторной группы

$$T(t) = \exp\{it\mathcal{L}_{P,U}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, ищется решение динамического уравнения

$$i \cdot u_t = Bu + P(x)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}.$$

Показано, что указанная группа определена в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$ и в пространствах $\mathbb{H}_U^\theta$, $\theta \in (0, 1]$, построенных по оператору $\mathcal{L}$ с помощью комплексной интерполяции

$$\mathbb{H}_U^\theta = [\mathbb{H}, \mathbb{H}_U^1]_\theta.$$

В частности, $\mathbb{H}_U^\theta$ совпадает с классическим пространством бесселевых потенциалов $\mathbb{H}^\theta$ при $\theta \in [0, 1/2)$. Пространство $\mathbb{H}_U^1$ — это классическое пространство Соболева $(W_2^1[0, \pi])^2$, суженное на краевые условия $Uy = 0$. Аналогичные результаты получены и в пространствах $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. Кроме того, получены оценки вида

$$\|T(t)\| \leq C(1 + |t|^p)e^{\beta|t|}. \quad (1)$$

Несложно показать, что спектр невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi} \ln z_0 + \pi$ и $2n$ и $-\frac{i}{\pi} \ln z_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения

$$J_{23}z^2 - [J_{12} + J_{34}]z - J_{14} = 0, \quad (2)$$

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: savchuk@cosmos.msu.ru

**E-mail: ivsad@yandex.ru

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\text{Im } z \in (-\pi, \pi]$. В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну. В случае, если дискриминант квадратного уравнения (2) равен нулю, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны. Краевые условия будем называть *сильно регулярными*, если $(J_{12} + J_{34})^2 \neq 4J_{23}J_{14}$. Обозначим $\kappa_0 = -\frac{i}{\pi} \ln z_0$, $\kappa_1 = -\frac{i}{\pi} \ln z_1 - 1$. Справедливо следующее утверждение (см. [1, 2]).

Лемма 1. *Любой регулярный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом представим в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$, ограниченного в $\mathbb{H}$ оператора V и неограниченного замкнутого оператора A с плотной областью определения и компактной резольвенты. В частности, если краевые условия сильно регулярны, то оператор V можно взять конечномерным.*

Спектр $\sigma(A)$ расположен в некоторой полосе Π_α и состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Их нумерацию (с учетом алгебраической кратности) можно провести так, чтобы выполнялись асимптотические равенства

$$\lambda_n = n + \kappa_{[n/2]} + o(1), \quad |n| \rightarrow \infty,$$

причем геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений совпадают, т.е. оператор A не имеет присоединенных функций. Система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в $\mathbb{H}$.

Таким образом, оператор iA порождает сильно непрерывную группу в $\mathbb{H}$. Возмущение генератора группы ограниченным оператором снова дает генератор группы.

Теорема 1. *Оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ порождает в $\mathbb{H}$ сильно непрерывную операторную группу. Базисность Рисса позволяет записать группу явно*

$$T(t)u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle u, z_n \rangle e^{i\lambda_n t} y_n$$

Здесь $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — система СПФ, собственные функции нормированы $\|y_n\| = 1$, присоединенные выбираются классически (максимальные цепочки по Келдышу). $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — биортогональная система — собственные и присоединенные функции сопряженного оператора. Для нормы $\|T(t)\|$ справедлива оценка (1), где $\beta = \sup |\text{Im } \lambda_n|$, точная грань берется по всем собственным значениям оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Кроме того, если $P \in L_\kappa$ при $\kappa > 1$, то β ограниченно зависит от $\|P\|_\kappa$.

Константа в оценке $\|T(t)\| \leq Ce^{\beta t}$ есть константа Рисса базисов $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$. В более ранних рабо-

тах авторов показано, что при фиксации краевых условий она зависит только от $\|P\|_\kappa$, $\kappa > 1$.

Заметим далее, что оператор $(\mathcal{L} - \lambda_0 I)^{-1}$ является изоморфизмом пространства $\mathbb{H}$ на пространство $\mathbb{H}_U^1$. Тогда из существования операторной группы $\exp(i\mathcal{L}_{P,U})$ в $\mathbb{H}$ следует ее ограниченное действие и в $\mathbb{H}_U^1$. Случай пространства $\mathbb{H}_U^0$ получается из доказанного интерполяцией оператора $\exp(i\mathcal{L}_{P,U})$.

В пространствах L_μ при $\mu \neq 2$ вместо базисности Рисса доказана лишь базисность Шаудера системы СПФ, что не позволяет напрямую определить операторную группу. Критерий Хилле–Иосиды труднопроверяем. Оценок на $\|(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-k}\|$ нет. Достаточный признак существования полугруппы (А.М. Гомилко, [3]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|(\mathcal{L}_{P,U} - (\sigma + i\tau)I)^{-2}\| d\sigma < \infty$$

(в гильбертовом случае является критерием), по-видимому, не выполнен. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом. Тогда оператор $i\mathcal{L}_{P,U}$ является генератором сильно непрерывной операторной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ в $(L_\mu[0, \pi])^2$ для любого $\mu \in (1, \infty)$. При этом справедливы оценки вида*

$$\|T(t)\| \leq C \exp(\beta t) \|T_0(t)\|,$$

T_0 — группа, порожденная оператором с нулевым потенциалом, числа β и C зависят только от $\|P\|_{L_1}$.

Идея доказательства заключается в использовании операторов преобразования и асимптотик для собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ специального вида, полученных в статье С. Альбеверии, Р. Гринива и Я. Микитюка [4]:

$$\lambda_n = n + e_n(p), \quad e_n(p) = \int_0^\pi p(x) e^{inx} dx,$$

где функция p определяется потенциалом — если $P \in L_\kappa$, то и $p \in L_\kappa$.

С историей вопроса и близкими результатами можно ознакомиться в работах [2, 5–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкаликов А.А. // УМН. 1979. Т. 34. № 5(209). С. 235–236.
2. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. // Math. Notes. 2014. V. 96 № 5. P. 777–810.

3. Гомилко А.М. // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33 № 4. С. 66–69.
4. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. // Russian J. Math. Phys. 2005. V. 12. № 4. P. 406–42.
5. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О. // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
6. Djakov P., Mityagin B. // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141. № 4. P. 1361–1375.
7. Beigl A., Eckhardt J., Kostenko A., Teschl G. // J. Math. Phys. 2015. V. 56, 012102.
8. Djakov P., Mityagin B. // Russ. Math. Surv. 2020. V. 75. № 4. P. 587–626.
9. Савчук А.М., Садовническая И.В. // Совр. мат-ка. Фунд. напр-я. 2020. Т. 66. № 3. С. 373–530.
10. Лунев А.А., Маламуд М.М. // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2022. Т. 516. С. 69–120.

OPERATOR GROUP GENERATED BY A ONE-DIMENSIONAL DIRAC SYSTEM

A. M. Savchuk^a and I. V. Sadovnichaya^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

In this paper, we construct a strongly continuous operator group generated by a one-dimensional Dirac operator acting in the space $\mathbb{H} = (L_2[0, \pi])^2$. The potential is assumed to be summable. It is proved that this group is well-defined in the space $\mathbb{H}$ and in the Sobolev spaces $\mathbb{H}_{\ell}^{\theta}$, $\theta > 0$, with fractional index of smoothness θ and under boundary conditions U . Similar results are proved in the spaces $(L_{\mu}[0, \pi])^2$, $\mu \in (1, \infty)$. In addition we obtain estimates for the growth of the group as $t \rightarrow \infty$.

Keywords: Dirac operator, summable potential, operator group

УДК 517.926

ЦИФРОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. В. Ильин^{1,2,3,*}, А. С. Фурсов^{1,2,**}

Поступило 08.07.2023 г.

После доработки 27.10.2023 г.

Принято к публикации 05.11.2023 г.

Предлагается подход к построению цифрового регулятора, стабилизирующего непрерывную переключаемую линейную систему с соизмеримыми запаздываниями в управлении. Подход к стабилизации последовательно включает в себя построение переключаемой непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели, представляемой в виде переключаемой системы с режимами различных порядков, построение дискретного динамического регулятора на основе квадратичного условия устойчивости замкнутой переключаемой дискретной системы.

Ключевые слова: дискретные системы, переключаемые системы, цифровой регулятор, стабилизация дискретных систем

DOI: 10.31857/S268695432360163X, **EDN:** ZBIMPA

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена одной из актуальных задач для управляемых переключаемых линейных систем, а именно задаче стабилизации нулевого положения равновесия таких систем. При этом особенный интерес представляет случай, когда переключающий сигнал, определяющий активный режим системы в каждый момент времени, является не наблюдаемым, т.е. не доступным для измерения. В этом случае, фактически, речь идет об управлении системой в условиях неопределенности, обусловленной непредсказуемым скачкообразным изменением ее математической модели в процессе функционирования. И, таким образом, указанную задачу управления можно отнести к классу задач об универсальных стабилизаторах. Традиционно для решения задач построения универсальных стабилизаторов используются методы теории робастного управления, теории адаптивного управления, теории абсолютной устойчивости, теории систем с пере-

менной структурой [1–4]. В работах [5, 6] для стабилизации переключаемых линейных систем было предложено использовать методы теории одновременной стабилизации [7], позволяющие находить универсальные регуляторы, стабилизирующие каждый режим переключаемой системы в отдельности и, таким образом, обеспечивающие необходимое условие стабилизации этой системы.

Однако, несмотря на достаточно активное развитие методов анализа и синтеза переключаемых систем управления, в настоящее время проблемам управления переключаемыми системами с запаздыванием посвящено сравнительно немного публикаций. Основной набор методов, используемых для решения задач стабилизации переключаемых линейных систем с запаздыванием, в наиболее полном объеме приведен едва ли не в единственном источнике — в монографии [8]. А именно, в ней рассмотрен подход к стабилизации по фазовому вектору линейных стационарных переключаемых систем с постоянным или зависящим от времени запаздыванием в фазовых координатах с использованием аналогового пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора. Настоящая работа посвящена проблеме стабилизации переключаемых линейных систем с запаздыванием в управлении с использованием другого типа регулятора — цифрового стабилизатора, работающего по измеряемой выходной переменной.

¹Электротехнический университет, Ханчжоу, Китай

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

³Федеральный исследовательский центр информатики и управления РАН, Москва, Россия

*E-mail: iline@cs.msu.ru

**E-mail: fursov@cs.msu.ru

В статье [9] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаковое для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для ее решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага — переход от исходной непрерывной системы к ее точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Одним из важных предположений, при котором решалась указанная задача, являлось условие синхронности моментов переключений стабилизируемой системы с моментами времени работы дискретного регулятора.

В настоящей работе предлагается обобщить приведенную задачу стабилизации на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении.

Итак, рассматривается непрерывная переключаемая линейная система со скалярным входом и скалярным выходом с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}u(t - \theta_{\sigma}), \\ y(t) = c_{\sigma}x(t), \end{cases} \quad \sigma \in S_{0,\gamma}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\sigma: R_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал); $S_{0,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ , точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \dots$; $x \in R^n$ — вектор состояния, $y \in R$ — измеряемый скалярный выход, $u \in R$ — управляющий вход; $A_{\sigma} = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A: I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ ; $b_{\sigma} = b \circ \sigma$, $c_{\sigma} = c \circ \sigma$ и $\theta_{\sigma} = \theta \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $b: I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$, $c: I \rightarrow \{c_1, \dots, c_m\}$, $\theta: I \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$. Здесь $\theta_i > 0$ — величины постоянных запаздываний, причем θ_i/γ и θ_i/θ_j — рациональные числа для любых $i, j \in I$. Далее считаем, что переключающий сигнал $\sigma(t)$ не доступен для измерения в процессе функционирования системы (1).

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i, A_i, b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t - \theta_i), \\ y(t) = c_i x(t). \end{cases}$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), начальном условии $x(0) = x_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{0,\gamma}$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Построение цифрового алгоритма управления для переключаемой линейной системы (1) предполагает построение соответствующей непрерывно-дискретной системы, включающей цифровой регулятор. Такая система описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведем в явном виде эти уравнения.

Цифровой регулятор для непрерывной системы представляется в виде последовательного соединения трех звеньев: идеального квантователя (модель аналого-цифрового преобразователя), преобразующего аналоговый сигнал $y(t)$ в дискретную (решетчатую) функцию $y[lT] = y(lT)$ ($T > 0$, $l = 0, 1, \dots$); дискретного регулятора (алгоритм работы для цифрового вычислительного устройства)

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \end{cases} \quad v[0] = v_0 \quad (3)$$

и формирующего элемента (модель цифро-аналогового преобразователя)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{T}\right]} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$), $[\cdot]$ — целая часть действительного числа, $Q \in R^{r \times r}$, $q \in R^{r \times 1}$, $H \in R^{1 \times r}$, $h \in R$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [10].

Замыкая систему (1) регулятором (3)–(4), получаем замкнутую непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}u(t - \theta_{\sigma}), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_{\sigma}x(lT), \\ \sigma(t) \in S_{0,\gamma}, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \end{cases} \quad (5)$$

где управляющая функция u описывается следующим образом

$$u(t - \theta_\sigma) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\left[\frac{t-\theta_\sigma}{T}\right]} (Hv[lT] + hc_\sigma x(lT)) S(t - \theta_\sigma - mT), & \text{если } t \geq \theta_\sigma, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \theta_\sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Система (5) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы $\left(l = \left[\frac{t}{T}\right]\right)$, т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

По аналогии с уравнением состояния системы (1) решением уравнения состояния системы (5) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), начальных условиях $x(0) = x_0$, $v[0] = v_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{0,\gamma}$ будем считать решение линейной нестационарной дифференциально-разностной системы с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + b_{\sigma(t)} u(t - \theta_{\sigma(t)}), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_{\sigma(l)} x(lT), \\ lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (5) будем называть $S_{0,\gamma}$ -устойчивой, а регулятор (3)–(4) стабилизирующим, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad l = \left[\frac{t}{T}\right]. \quad (7)$$

Здесь под нормой вектора понимается евклидова норма. Теперь приведем точную постановку задачи стабилизации.

Задача. Для переключаемой линейной системы (1) с заданным $\gamma > 0$ построить цифровой регулятор вида (3)–(4), обеспечивающий $S_{0,\gamma}$ -устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы (5).

Задачу построения цифрового стабилизатора для непрерывно-дискретной системы (5) сведем к задаче построения дискретного стабилизатора для соответствующей дискретной модели. При этом необходимо обеспечить выполнение условий согласованности, гарантирующих эквивалентность свойства устойчивости замкнутой непрерывно-дискретной системы (5) и ее дискретной модели, замкнутой тем же регулятором.

3. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Для решения сформулированной задачи стабилизации перейдем от непрерывно-дискретной системы (5) к ее дискретной модели. Для этого

воспользуемся методом точной дискретизации [10, с. 81; 11, с. 40], в соответствии с которым вначале строится дискретная модель для исходной системы (1), а затем она замыкается дискретным регулятором (3).

Выберем константы $l_0 \in N$ и $T > 0$ так, чтобы, во-первых, выполнялось равенство $\gamma = l_0 T$ и, во-вторых, нашлись бы константы $l_i \in N$ ($i \in I$), для которых $\theta_i = l_i T$ (заметим, что это всегда можно сделать в силу соизмеримости запаздываний).

Заметим теперь, что если $\sigma(t) \in S_{0,\gamma}$, то на решения системы (5) влияют значения переключающего сигнала только в моменты $t = lT$ ($l = 0, 1, \dots$). Поэтому будем в дальнейшем для дискретной модели переключаемой системы (5) в качестве переключающих сигналов рассматривать соответствующие решетчатые функции $\sigma[lT]$ ($T > 0$, $l = 0, 1, \dots$), а множество таких функций обозначать через $[S]_{0,\gamma}$. Обозначим через $x[lT]$ решетчатую вектор-функцию для вектора состояния $x(t)$ системы (1).

Итак, пусть в момент времени $t = lT$ вектор состояния системы (1) равен $x[lT]$ и $\sigma[lT] = i$. Тогда, используя формулу Коши для решений линейной стационарной неоднородной системы, имеем

$$x[(l+1)T] = e^{AT} x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A((l+1)T-\xi)} b_i u(\xi - \theta_i) d\xi.$$

Поскольку на входе непрерывной системы (1) действует фиксатор нулевого порядка, то $u(t - \theta_i) \equiv u[(l - l_i)T]$ для всех $t \in [lT, (l+1)T)$. Следовательно,

$$x[(l+1)T] = e^{AT} x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A((l+1)T-\xi)} d\xi b_i u[(l - l_i)T].$$

Выполнив под интегралом замену переменной $\mu = \xi - lT$, получим

$$x[(l+1)T] = e^{AT} x[lT] + \int_0^T e^{A(T-\mu)} d\mu b_i u[(l - l_i)T].$$

Введем обозначения

$$\hat{A}_i = e^{AT}, \quad \hat{b}_i = \int_0^T e^{A(T-\mu)} d\mu b_i,$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}[lT] &= u[(l-1)T], \\ x_{n+2}[lT] &= u[(l-2)T], \\ &\dots \\ x_{n+l_i}[lT] &= u[(l-l_i)T]. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x_{n+1}[(l+1)T] &= u[lT], \\
x_{n+2}[(l+1)T] &= x_{n+1}[lT], \\
x_{n+3}[(l+1)T] &= x_{n+2}[lT], \\
&\dots \\
x_{n+l_i}[(l+1)T] &= x_{n+l_i-1}[lT].
\end{aligned} \quad (9)$$

Используя введенные обозначения и учитывая, что $\sigma \in S_{0,\gamma}$, получим дискретную модель i -го режима системы (1) в следующем виде

$$\begin{cases} x^{(i)}[(l+1)T] = \bar{A}_i x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i u[lT] \\ y[lT] = \bar{c}_i x^{(i)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma} \end{cases} \quad (10)$$

где

$$x^{(i)}[lT] = (x_1[lT], \dots, x_n[lT], x_{n+1}[lT], \dots, x_{n+l_i}[lT])^\top$$

— расширенный вектор состояния дискретной модели i -го режима системы (1),

$$\begin{aligned}
\bar{A}_i &= \begin{pmatrix} \hat{A}_i & O_{n \times (l_i-1)} & \hat{b}_i \\ O_{1 \times n} & O_{1 \times (l_i-1)} & 0 \\ O_{(l_i-1) \times n} & E_{(l_i-1) \times (l_i-1)} & O_{(l_i-1) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_i = \begin{pmatrix} O_{n \times 1} \\ 1 \\ O_{(l_i-1) \times 1} \end{pmatrix}, \\
\bar{c}_i &= (c_i O_{1 \times l_i}) \in R^{1 \times (n+l_i)}.
\end{aligned}$$

— блочные матрица и векторы. Здесь O , E — нулевая и единичная матрицы соответствующих размерностей.

Таким образом, получаем дискретную модель системы (1) в виде переключаемой дискретной системы вида

$$\begin{cases} x^{(\sigma)}[(l+1)T] = \bar{A}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma u[lT] \\ y[lT] = \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

Теперь заметим, что режимы (10) построенной переключаемой дискретной системы (11) уже не содержат запаздываний, однако имеют различные динамические порядки, поскольку $x^{(i)} \in R^{n+l_i}$ для каждого $i \in I$. В связи с этим, для того чтобы определить решение уравнения состояния полученной переключаемой системы, необходимо решить вопрос о согласовании начальных условий для уравнений состояния различных режимов при переключениях между ними.

Итак, пусть в момент времени $\tilde{l}T$ режим j переключаемой системы (11) сменяется режимом i , причем $\theta_j \neq \theta_i$. Тогда, учитывая (8) и (9), зададим начальное значение для вектора состояния $x^{(i)}$ i -го режима в момент $\tilde{l}T$ следующим образом

$$\begin{aligned}
x^{(i)}[\tilde{l}T] &= \\
&= (x_1[\tilde{l}T], \dots, x_n[\tilde{l}T], u[(\tilde{l}-1)T], \dots, u[(\tilde{l}-l_i)T])^\top, \quad (12)
\end{aligned}$$

где $x_1[\tilde{l}T], \dots, x_n[\tilde{l}T]$ — конечные значения первых n компонент вектора состояния $x^{(j)}$ j -го режима на предыдущем промежутке времени.

Решением уравнения состояния переключаемой системы (11) при заданном управлении u , переключающем сигнале $\sigma \in [S]_{0,\gamma}$ и начальном условии $x^{(\sigma(0))}[0] \in R^{n+l_\sigma}$ будем называть дискретную вектор-функцию $\tilde{x}[lT] \in R^{n+p}$ ($p = \arg \max_i l_i$), совпадающую на каждом промежутке активности i -го режима ($i \in I$) с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}[lT] \in R^{n+p}$. При этом вектор-функция

$$\tilde{x}^{(i)}[lT](x_1[lT], \dots, x_n[lT], x_{n+1}[lT], x_{n+l_i}[lT], \underbrace{0, \dots, 0}_{p-l_i})^\top \in R^{n+p}$$

порождается решением уравнения состояния i -го режима (10) на соответствующем промежутке активности $[\tilde{l}T; \hat{l}T]$ этого режима с начальными условиями (12).

При введенном выше согласовании начальных условий в моменты переключений системы (11), выполняется свойство точной дискретизации [10, с. 81]

$$\begin{aligned}
x(t)|_{t=lT} &= \bar{x}[lT] = (x_1[lT], \dots, x_n[lT])^\top, \\
l &= 0, 1, \dots,
\end{aligned}$$

где $x(t)$ — решение уравнения состояния непрерывной системы (1) при фиксированном управлении u и заданных $\sigma \in S_{0,\gamma}$, $x(0) \in R^n$, а $\bar{x}[lT]$ — вектор, образованный первыми n компонентами вектора $\tilde{x}[lT]$ решения соответствующей дискретной системы (11) при согласованных начальных условиях

$$\begin{pmatrix} x_1^{(\sigma(0))}[0] \\ \vdots \\ x_n^{(\sigma(0))}[0] \\ x_{n+1}^{(\sigma(0))}[0] \\ \dots \\ x_{n+l_{\sigma(0)}}^{(\sigma(0))}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Замыкая систему (11) регулятором (3), получим дискретную модель замкнутой непрерывно-дискретной системы (5)

$$\begin{cases} x^{(\sigma)}[(l+1)T] = (\bar{A}_\sigma + \bar{b}_\sigma h \bar{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \bar{b}_\sigma H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q \bar{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + Q v[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma} \end{cases} \quad (14)$$

Решением системы (14) считаем вектор $(\tilde{x}[lT] v[lT])^\top$. Замкнутую дискретную переключаемую систему (14) будем называть $[S]_{0,\gamma}$ -устойчи-

вой, если для любых начальных условий $x^{\sigma[0]}[0]$, $v[0]$, и $\sigma \in [S]_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{x}[lT] \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \rightarrow 0, \quad \text{при } l \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

На основании результатов работы [9] сформулируем теорему о согласованности свойства устойчивости систем (5) и (14).

Теорема 1. *Непрерывно-дискретная система (5) $S_{0,\gamma}$ -устойчива тогда и только тогда, когда $[S]_{0,\gamma}$ -устойчива переключаемая дискретная система (14).*

Таким образом, поставленная в п. 2 задача стабилизации, в соответствии с теоремой 1, может быть сведена к задаче стабилизации по выходу дискретной системы (11) дискретным регулятором (3).

4. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Прежде чем перейти к проблеме построения стабилизирующей обратной связи для системы (11), рассмотрим вопрос о проверке устойчивости замкнутой системы (14). Одно из известных [9, 12–15] достаточных условий устойчивости переключаемой линейной системы при произвольных переключениях основано на проверке факта существования общей функции Ляпунова для конечного набора режимов этой системы. А именно, справедлива следующая теорема [9].

Теорема 2. *Пусть существует положительно определенная матрица P , удовлетворяющая системе линейных матричных неравенств*

$$\Gamma_i P \Gamma_i^\top - P < 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда дискретная переключаемая линейная система

$$\begin{aligned} \xi[(l+1)T] &= \Gamma_\sigma \xi[lT], \\ \xi &\in R^n, \quad \Gamma_i \in R^{n \times n}, \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma} \end{aligned} \quad (16)$$

$[S]_{0,\gamma}$ -устойчива.

Для того чтобы применить сформулированное достаточное условие для проверки $[S]_{0,\gamma}$ -устойчивости замкнутой системы (14), применим к ней метод расширения динамического порядка [7, 16, 17] для приведения всех ее режимов к единой размерности. В соответствии с данным методом сопоставим системе (14) переключаемую линейную $(n+p)$ -мерную систему вида

$$\begin{cases} \tilde{x}[(l+1)T] = (\tilde{A}_\sigma + \tilde{b}_\sigma h \tilde{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \tilde{b}_\sigma H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q \tilde{c}_\sigma \tilde{x}[lT] + Q v[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{pmatrix} \bar{A}_i & O_{(n+l_i) \times (p-l_i)} \\ O_{(p-l_i) \times (n+l_i)} & A_i^* \end{pmatrix} \in R^{(n+p) \times (n+p)}, \\ \tilde{b}_i &= \begin{pmatrix} \bar{b}_i \\ O_{(p-l_i) \times 1} \end{pmatrix} \in R^{(n+p) \times 1}, \quad \tilde{c}_i = (\bar{c}_i O_{1 \times (p-l_i)}) \in R^{1 \times (n+p)} \end{aligned}$$

— блочные матрица и векторы. Здесь A_i^* — произвольные устойчивые матрицы порядка $p-l_i$, O — нулевая матрица соответствующей размерности. Система (17) является динамическим расширением системы (14). Заметим, что динамическое расширение определяется неоднозначно и зависит от выбора устойчивых матриц A_i^* .

Опираясь на результаты работы [16], сформулируем следующую теорему о связи устойчивости систем (14) и (17).

Теорема 3. *Пусть некоторое динамическое расширение (17) дискретной переключаемой системы (14) $[S]_{0,\gamma}$ -устойчиво, тогда система (14) также $[S]_{0,\gamma}$ -устойчива.*

Таким образом, проверка $[S]_{0,\gamma}$ -устойчивости дискретной системы (14) может быть сведена к проверке $[S]_{0,\gamma}$ -устойчивости некоторого ее динамического расширения (17) с использованием сформулированного выше достаточного условия (теорема 2).

5. ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОИСКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

Теорема 1 позволяет свести задачу построения цифрового стабилизатора (3), (4) для непрерывной переключаемой системы (1) к задаче построения дискретного регулятора (3), стабилизирующего дискретную переключаемую систему (11). Решение этой задачи существенно усложняет предположение о ненаблюдаемости переключающего сигнала в процессе функционирования рассматриваемой переключаемой системы. В связи с этим для решения указанной задачи, по аналогии с работой [9], воспользуемся методами теории одновременной стабилизации [7]. Поскольку регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности, то синтез соответствующего дискретного регулятора, фактически, можно свести к задаче об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов (10) ($i \in I$) единым регулятором вида (3).

Для решения задачи об одновременной стабилизации по выходу конечного семейства дискретных объектов (10), в соответствии с методами, изложенными в монографии [7]:

1) необходимо перейти к описанию этих объектов через передаточные функции

$$W_i(z) = \bar{c}_i(zI - \bar{A}_i)^{-1}\bar{b}_i = \frac{\beta_i(z)}{\alpha_i(z)} = \frac{b_{n+l_i-1}^{(i)}z^{n+l_i-1} + \dots + b_1^{(i)}z + b_0^{(i)}}{z^{n+l_i} + a_{n+l_i-1}^{(i)}z^{n+l_i-1} + \dots + a_1^{(i)}z + a_0^{(i)}}; \quad (18)$$

2) с помощью вычислительных процедур на основе алгоритма SIVIA [7, 18] построить для семейства дискретных объектов (18) множество $\mathcal{R}$ одновременно стабилизирующих регуляторов в виде передаточных функций порядка r

$$R(z) = \frac{p(z)}{g(z)} = \frac{p_r z^r + p_{r-1} z^{r-1} + \dots + p_1 z + p_0}{z^r + g_{r-1} z^{r-1} + \dots + g_1 z + g_0}. \quad (19)$$

Далее, пусть множество одновременно стабилизирующих регуляторов $\mathcal{R}$ не пусто и $R(z) \in \mathcal{R}$. В соответствии с методами теории реализации [19], перейдем от описания регулятора в виде передаточной функции (19) к его описанию в пространстве состояний, т.е. к виду (3). Тогда, в силу того, что рассматриваемый регулятор одновременно стабилизирующий, то он обеспечивает для всех $i = 1, \dots, m$ асимптотическую устойчивость замкнутых систем

$$\begin{cases} x^{(i)}[(l+1)T] = (\bar{A}_i + \bar{b}_i h \bar{c}_i) x^{(i)}[lT] + \bar{b}_i H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q \bar{c}_i x^{(i)}[lT] + Q v[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,r} \end{cases} \quad (20)$$

Однако одновременно стабилизирующий регулятор гарантирует лишь необходимое условие устойчивости замкнутой переключаемой системы (устойчивость каждого режима в отдельности, но не гарантирует устойчивость переключаемой системы), поэтому необходимо обеспечить дополнительную проверку стабилизирующих свойств регуляторов из множества $\mathcal{R}$.

Известно [7], что множеству регуляторов $\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие объединение $\mathcal{P}$ конечного набора параллелотопов в пространстве R^{2r+1} коэффициентов их передаточных функций (19). Учитывая это, приведем один из возможных вариантов реализации численного алгоритма выбора на множестве $\mathcal{R}$ стабилизирующего регулятора для переключаемой системы (11).

Шаг 1. На множестве $\mathcal{P}$ в пространстве R^{2r+1} построим равномерную сетку.

Шаг 2. Для каждого j -го узла сетки, соответствующего некоторому одновременно стабилизирующему регулятору, выпишем соответствующую замкнутую систему вида (11), для которой построим произвольное динамическое расширение вида (17).

Шаг 3. Выполним проверку системы (17) на $[S]_{0,r}$ -устойчивость, используя теорему 2 п. 4. Если

ли хотя бы для одного узла сетки проверка дала положительный результат, то на этом работа алгоритма закончена, поскольку, в силу теорем 1 и 3, найденный регулятор будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы (5).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что изложенный в п. 5 настоящей работы алгоритм поиска стабилизатора на множестве одновременно стабилизирующих регуляторов с использованием квадратичного условия устойчивости (теорема 2 п. 4.) не является единственно возможным. Например, для проверки устойчивости замкнутых переключаемых дискретных систем можно также использовать критерий, основанный на понятии обобщенного спектрального радиуса конечного набора квадратных матриц [9, 15], или критерий, основанный на понятии сверхустойчивости дискретных систем [20]. Однако нахождение точного значения обобщенного спектрального радиуса для дискретной переключаемой системы является весьма сложной вычислительной задачей, а свойство сверхустойчивости, к сожалению, присуще весьма узкому множеству переключаемых систем. В связи с этим, по мнению авторов, наиболее оптимальным с вычислительной точки зрения следует признать использование именно квадратичного условия для проверки устойчивости переключаемых дискретных систем.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М., 1989.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М., 2004.
4. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
5. Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф. К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
6. Фурсов А.С., Капалин И.В. Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1109–1120.

7. *Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.
8. *Mahmoud M.S.* Switched time-delay systems. Stability and control. Springer Sciencelk, Media, LCC 2010.
9. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1132–1141.
10. *Поляков К.Ю.* Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. СПбГМУ, 2002.
11. *Chen T., Francis B.* Optimal sample-data control systems. Springer-Verlag. Berlin. 1994.
12. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. / Сборник статей “Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН”. Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23–81.
13. *Liberzon D., Morse A.S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems. 1999. V. 19. № 5. P. 59–70.
14. *Шпилевая О.А., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
15. *Sun Z., Ge S.S.* Stability theory of switched dynamical systems. Springer-Verlag London Limited, 2011.
16. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.
17. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1555–1563.
18. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 468 с.
19. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С.* Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.
20. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.

DIGITAL STABILIZATION OF A SWITCHABLE LINEAR SYSTEM WITH COMMENSURATE DELAYS

Corresponding member of RAS **A. V. Ilin^{a,b,c}** and **A. S. Fursov^{a,b}**

^a*Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, RPC*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^c*Federal Research Center for Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

An approach to the construction of a digital controller that stabilizes a non-continuous switchable linear system with commensurate delays in control is proposed. The approach to stabilization sequentially includes the construction of a switchable continuously discrete closed system with a digital controller, the transition to its discrete model, represented as a switchable system with modes of various orders and the construction of a discrete dynamic controller based on the quadratic stability condition of a closed switchable discrete system.

Keywords: discrete systems, switchable systems, digital controller, stabilization of discrete systems

УДК 519.16 + 519.85

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СЕРИИ АСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

© 2023 г. Е. Д. Незнахина^{1,2,*}, Ю. Ю. Огородников^{1,2,**}, К. В. Рыженко^{1,***},
Член-корреспондент РАН М. Ю. Хачай^{1,****}

Поступило 19.09.2023 г.

После доработки 18.10.2023 г.

Принято к публикации 05.11.2023 г.

Обосновываются первые алгоритмы с константными оценками точности для серии асимметричных постановок задач маршрутизации: задачи о штейнеровском цикле, задачи коммивояжера с призами, задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов и др. В большинстве своем предложенные алгоритмы опираются на оригинальные схемы сведения исследуемых постановок к вспомогательным постановкам асимметричной задачи коммивояжера и прорывные результаты О. Свенссона, Я. Тарнавски, Л. Вега и В. Трауб, Й. Вигена в области эффективной аппроксимиремости данной задачи. Алгоритм для задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов опирается на технику, связанную с более глубокой модификацией подхода Свенссона-Трауб.

Ключевые слова: асимметричная задача коммивояжера, приближенные алгоритмы, константная оценка точности, задача о штейнеровском цикле минимального веса, задача маршрутизации транспорта, задача о покрытии графа ограниченным числом циклов

DOI: 10.31857/S268695432360218X, EDN: CYSMDDZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье приведены недавние авторские результаты в области полиномиальной аппроксимиремости актуальных задач комбинаторной оптимизации, заданных на реберновзвешенных ориентированных графах с асимметричными функциями потерь и являющихся обобщениями классических задач коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) [1] и маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem, VRP) [2].

Исследуемое семейство задач включает NP-трудные в сильном смысле задачи, успешность проектирования для которых точных алгоритмов с полиномиальной трудоемкостью ввиду известной гипотезы $P \neq NP$ представляется сомнительной. Поэтому наибольший интерес в области алгоритмического анализа данных задач сконцентрирован вокруг методов, основанных на том или

ином компромиссе между производительностью и точностью получаемых решений.

Наряду с традиционными методами ветвления (*branch-and-bound*, *branch-and-cut*, *branch-and-price*) [3], эвристиками и метаэвристиками [4], заметное место среди подходов к алгоритмическому анализу этих задач занимают *приближенные алгоритмы* [5, 6], обладающие априорными теоретическими оценками точности и трудоемкости.

По определению приближенным алгоритмом с оценкой точности (фактором аппроксимации) $\alpha > 1$ для задачи комбинаторной минимизации называется полиномиальный алгоритм, находящий для произвольной постановки задачи допустимое решение, стоимость которого превышает ее оптимальное значение не более чем в α раз. В общем случае фактор аппроксимации $\alpha = \alpha(n)$ является функцией от размера исследуемой постановки задачи (как правило выражаемого в терминах числа вершин соответствующего графа n). Поэтому особого интереса заслуживают комбинаторные задачи, принадлежащие аппроксимационному классу APX, для которых обосновано существование приближенных алгоритмов с фиксированной оценкой точности $\alpha = \text{const}$.

Как известно, *метрические* версии большинства исследуемых нами задач, постановки которых задаются неориентированными графами с неотрицательными функциями транспортных за-

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

*E-mail: eneznakhina@yandex.ru

**E-mail: yogorodnikov@gmail.com

***E-mail: kseniarizhenko@gmail.com

****E-mail: mkhachay@imm.uran.ru

трат, удовлетворяющими *неравенству треугольника*, обладают такими приближенными алгоритмами. Обоснование этого факта восходит к классическим результатам Н. Кристофидеса и А. Сердюкова [7, 8] для задачи коммивояжера и М. Хаймовича и А. Ринной Кана для задачи маршрутизации транспортных средств ограниченной грузоподъемности (Capacitated VRP, CVRP) [9].

В то же время вопрос о возможности полиномиальной аппроксимируемости асимметричных постановок маршрутных задач в классе алгоритмов с константными оценками точности долгие годы оставался открытым. Так, вплоть до 2018 г. наилучшим по точности для асимметричной задачи коммивояжера (Asymmetric Traveling Salesman Problem, ATSP) считался алгоритм [10] с $\alpha = O(\log n / \log \log n)$. Прорывным результатом в этом направлении стала работа О. Свенссона, Я. Тарнавски и Л. Вега [11], в которой предложен первый приближенный алгоритм для задачи ATSP с фиксированным фактором аппроксимации. Усовершенствованная версия этого технически сложного в обосновании и в реализации алгоритма представлена в работе В. Трауб и Й. Вигена [12] и имеет оценку точности $22 + \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

В данной статье приведены первые приближенные алгоритмы с константными оценками точности для серии асимметричных постановок задач маршрутизации: задачи о штейнеровском цикле, задачи коммивояжера с призами, задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов и др.

В большинстве своем предложенные в работе алгоритмы основаны на полиномиальном сведении исследуемой задачи к одной или нескольким вспомогательным постановкам ATSP с последующим применением алгоритма Свенссона-Трауб. Идея подобного сведения, конечно же, не является новой и применялась в более ранних работах (см., напр., [16]). Однако полученные авторами данной статьи результаты опережают известные по точности аппроксимации.

Исключение составляет аппроксимируемость задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов в классе полиномиальных алгоритмов с фиксированным фактором, обоснование которой потребовало более глубокой адаптации подхода, предложенного в работах [11, 12].

Полные версии представленных результатов опубликованы в недавних работах авторов [13–15].

2. ЗАДАЧИ О ШТЕЙНЕРОВСКОМ ЦИКЛЕ И СЕЛЬСКОМ ПОЧТАЛЬОНЕ

Зададимся произвольным реберно-взвешенным ориентированным графом $G = (V, E, c)$ с неотрицательной весовой функцией, удовлетворяющей неравенству треугольника: для произволь-

ных дуг (v, u) , (u, w) и (v, w) справедливо соотношение

$$c(v, w) \leq c(v, u) + c(u, w). \quad (1)$$

В задаче о штейнеровском цикле (Steiner Cycle Problem, SCP) требуется построить минимальный по весу замкнутый маршрут, посещающий выделенное подмножество $T \subseteq V$ терминальных вершин. Задача очевидно труднорешаема, поскольку в частном случае при $|T| = n$ совпадает с классической задачей коммивояжера. В свою очередь в также труднорешаемой задаче сельского почтальона (Rural Postman Problem, RPP) необходимо построить замкнутый маршрут минимальной стоимости, включающий каждую терминальную дугу из заданного подмножества $R \subseteq E$. С помощью добавления фиктивных вершин на дуги из выделенного подмножества и разделения транспортных издержек между индуцированными дугами возможно обосновать сведение RPP к подходящей постановке SCP [13] с сохранением стоимости допустимых решений, что гарантирует аппроксимируемость данных постановок с одним и тем же фактором.

Теорема 1. *Существование α -приближенного алгоритма для задачи ATSP с неравенством треугольника влечет аппроксимируемость задач SCP и RPP в классе α -приближенных полиномиальных алгоритмов.*

3. ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С НЕДЕЛИМЫМ СПРОСОМ

Задача маршрутизации заключается в поиске набора замкнутых маршрутов минимального суммарного веса для идентичных по грузоподъемности транспортных средств, начинающихся на складе и удовлетворяющих в совокупности спрос всех потребителей.

Условие асимметричной задачи маршрутизации с ограничением на грузоподъемность и неоднородным потребительским спросом (Capacitated Vehicle Routing Problem with Unsplittable Client Demands, CVRP-UCD) задается упорядоченной парой (G, D) , где $G = (V, E, c, d)$ – взвешенный ориентированный сильно связный граф, в котором $V = X \cup \{O\}$: X – множество потребителей и $\{O\}$ – склад, весовая функция $c : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ определяет транспортные издержки и удовлетворяет неравенству треугольника (1), функция $d : X \rightarrow \mathbb{Z}_+$ задает потребительский спрос, а D – грузоподъемность имеющихся в распоряжении транспортных средств.

Допустимым маршрутом в исследуемой задаче является упорядоченная пара $R_i = (\Pi_i, d_i)$, в которой $\Pi_i = O, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}, O$ – цикл в графе G , возмож-

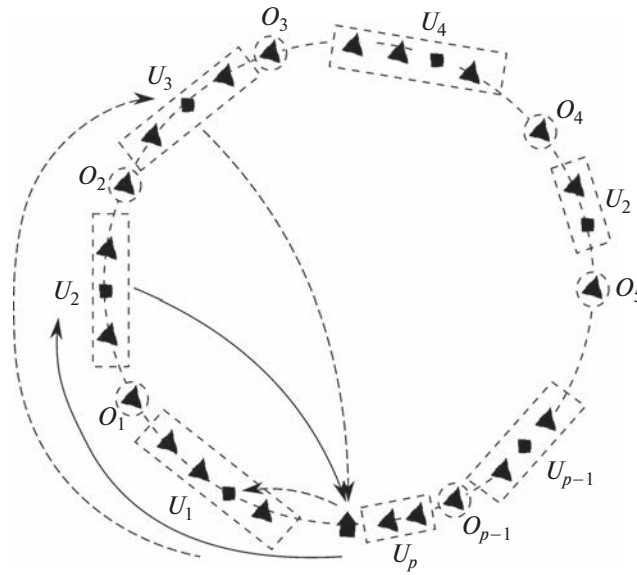


Рис. 1. Приближенное решение задачи маршрутизации транспорта.

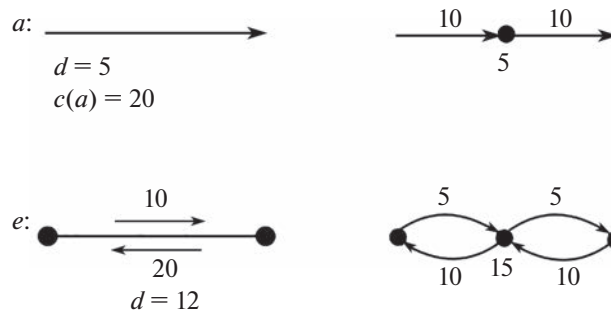


Рис. 2. Добавление фиктивных вершин на дугу и ребро.

но, посещающий некоторые вершины более одного раза, $d_i: X \rightarrow \mathbb{Z}_+$ – функция спроса, удовлетворяемого в вершинах Π_i , так что $d_i(x_{ij}) \in \{0, d(x_{ij})\}$ для $j = \overline{1, l}$ и выполняется ограничение на грузоподъемность $\sum_{j=1}^l d_i(x_{ij}) \leq D$. Вес (стоимость) маршрута R_i совпадает с суммарной стоимостью входящих в него дуг. Задача состоит в построении множества допустимых маршрутов $S = \{R_1, \dots, R_s\}$ минимальной суммарной стоимости, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос.

Алгоритм 1

1. Выделим множество $T \subseteq V$, содержащее потребителей с ненулевым спросом и особую вершину-склад O .

2. Построим для исходного графа и множества терминальных вершин T α -приближенное решение C задачи о штейнеровском цикле.

3. Определим разбиение цикла C на максимально полные по включению фрагменты $U_1, U_2, \dots, U_k$ и следующих за ними выделенных потребителей с ненулевым спросом $O_1, O_2, \dots, O_m$, так что суммарный спрос вершин в любом из фрагментов разбиения не превосходит D (рис. 1).

4. Построим множество маршрутов $R_1, \dots, R_{k+m}$ как набор кратчайших циклических маршрутов, каждый из которых содержит фрагмент или выделенного потребителя из разбиения, удовлетворяет их общий спрос и содержит склад.

5. Найденное семейство маршрутов $S = \{R_1, \dots, R_{k+m}\}$ искомоe.

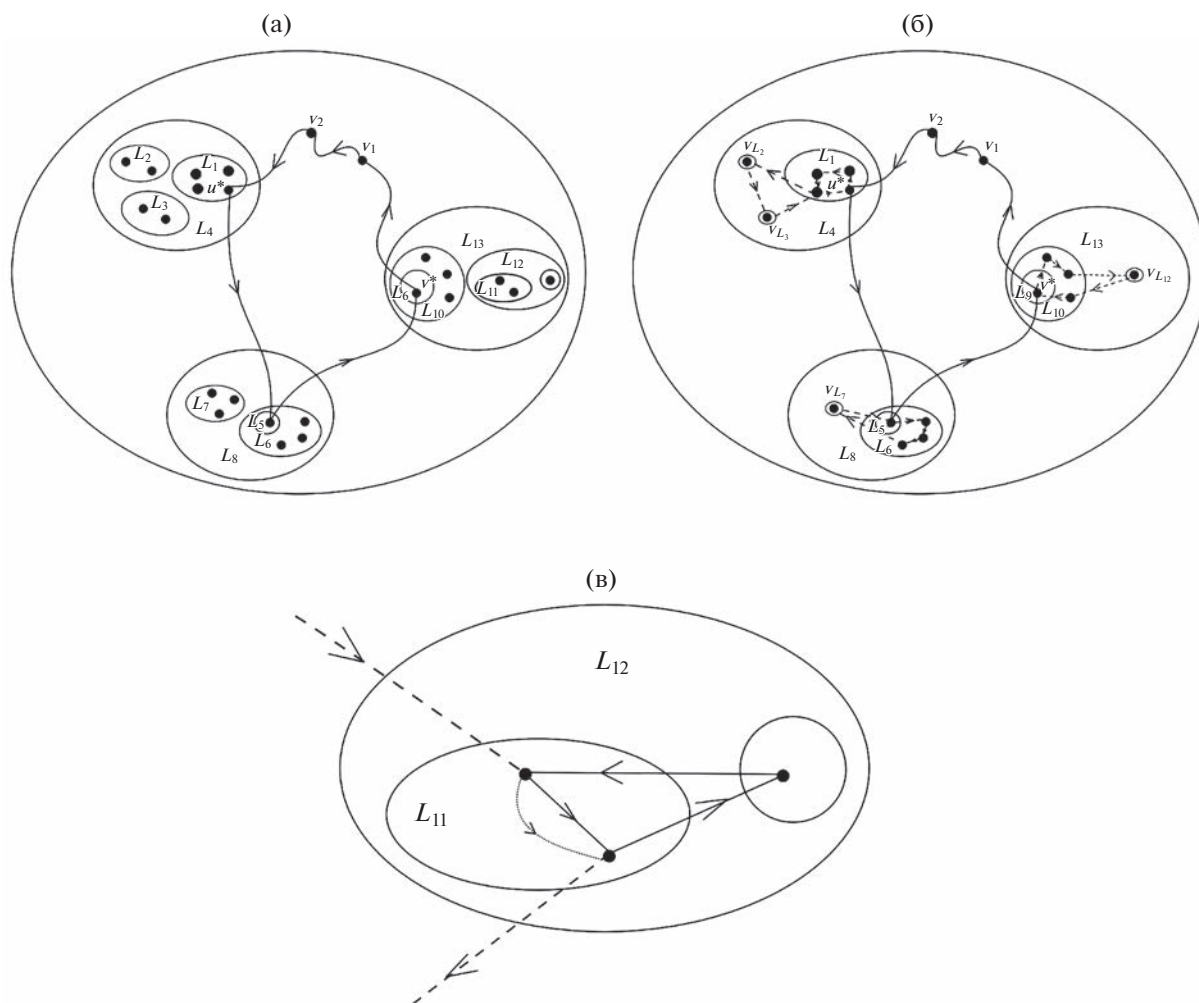


Рис. 3. (а): получение прототипа хребта $\mathcal{B}$ (волнистая линия) для $S = \{v_1, v_2\}$; (б): сжатие подмножеств $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ и получение эйлерова мультимножества ребер в графе G' с помощью (k, n) -алгоритма; (в): результат применения $\mathcal{A}_{ATSP}^*$ для множества L_{12} и дополнение результата $\mathcal{L}$ -путем (пунктирная линия).

В плане построения алгоритмов с гарантированными оценками точности двойственная для задачи маршрутизации постановка — это задача обхода дуг и ребер со спросом на смешанных графах (Capacitated Arc Routing Problem, CARP) [16], в которой также требуется построить набор замкнутых маршрутов, отвечающих ограничениям на грузоподъемность и полностью удовлетворяющих весь заданный спрос, не разграничивая требования между транспортными средствами в парке. Нетрудно показать [13] с помощью преобразования исходного графа, добавления фиктивных вершин на дуги и ребра с ненулевым спросом и разделения транспортных издержек между инцидентными новым вершинам дугами (рис. 2), что асимметричные постановки CARP и CVRP-UCD

эквивалентны, в результате задача обхода дуг имеет тот же коэффициент аппроксимации.

Теорема 2. Из существования α -приближенного алгоритма для ATSP следует, что

(i) алгоритм 1 строит $(3\alpha + 2)$ -приближенное решение задачи ACVRP-UCD;

(ii) задача CARP на смешанных графах обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с тем же фактором аппроксимации.

Отметим, что значение $3\alpha + 2$ для CARP с неравенством треугольника существенно улучшает предыдущий известный результат $8\alpha \cdot (C + 1) + 27$ [16], где C — это количество компонент связности в подграфе, индуцированном дугами и ребрами с ненулевым спросом, а α , по-прежнему, коэффициент аппроксимации ATSP.

4. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА С ПРИЗАМИ

В работе [14] обоснована полиномиальная аппроксимируемость асимметричной задачи коммивояжера с призами (Prize Collecting Traveling Salesman Problem, PCATSP) в классе алгоритмов с константной оценкой точности. Предложенный авторами алгоритм опирается на полиномиальное сведение к вспомогательной постановке ATSP, получаемой в результате округления оптимального решения вещественной релаксации исходной задачи.

Зададимся полным ориентированным графом $G = (V, E, c, \pi)$ с неравенством треугольника относительно весовой функции c , $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ задает штрафы за непосещение допустимым маршрутом вершин. Требуется построить маршрут $R = x_{i_1}, e_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, e_k, x_{i_1}$, где $k = 0, n$, для которого стоимость с учетом штрафов минимальна:

$$\text{cost}(R) = \sum_{i=1}^k c(e_i) + \sum_{v \in V \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}} \pi(v).$$

Очевидно, что в частном случае при достаточно больших значениях штрафов для всех вершин заданного графа задача коммивояжера с призами эквивалентна классической задаче коммивояжера, как следствие, является труднорешаемой даже на евклидовой плоскости [17]. В работе [18] для метрической постановки задачи был предложен $\frac{5}{2}$ -приближенный алгоритм, использующий идею округления дробных решений релаксации задачи целочисленного линейного программирования и алгоритм Кристофидеса–Сердюкова для индуцированной метрической TSP в качестве “черного ящика”. Воспользуемся аналогичным подходом при построении алгоритма с константным фактором аппроксимации для общей постановки PCATSP.

Рассмотрим вспомогательную постановку PCATSP $_{\{u,v\}}$ с дополнительным ограничением: произвольный допустимый маршрут проходит через

вершины $\{u, v\} \subset V$. Легко видеть, что оптимум исходной задачи соответствует минимуму среди решений всевозможных постановок PCATSP $_{\{u,v\}}$ или значению целевой функции для “пустого” маршрута R_{emp} , не посещающего ни одной вершины. Для PCATSP $_{\{u,v\}}$ используем следующую модель задачи целочисленного линейного программирования:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{w \in V} \pi_w (1 - y_w) \quad (2)$$

$$x(\delta^+(w)) = x(\delta^-(w)) \quad (w \in V), \quad (3)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2 \quad (S \subset V : |S \cap \{u, v\}| = 1), \quad (4)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2y_w \quad (S \subseteq V \setminus \{u, v\}, w \in S), \quad (5)$$

$$x_e \in \mathbb{Z}_+, \quad y_w \in \{0, 1\}, \quad (6)$$

$$y_u = y_v = 1, \quad (7)$$

ограничения (3) обеспечивают эйлеровость, а (4), (5) – связность индуцированного подграфа, в свою очередь y_v указывает, посещается ли вершина $v \in V$ допустимым маршрутом.

Алгоритм 2

1. Сопоставим исходной задаче PCATSP семейство вспомогательных постановок PCATSP $_{\{u,v\}}$ для всевозможных $\{u, v\} \subset V$.

2. Для каждой задачи из семейства найдем $(\bar{x}, \bar{y})_{\{u,v\}}$ – оптимальное решение соответствующей PCATSP $_{\{u,v\}}$ вещественной релаксации с ограничениями в виде неравенств $x_e \geq 0$ и $0 \leq y_w \leq 1$. Выделим множество вершин $T_{\{u,v\}} \subseteq V$, для которых значения $\bar{y}$ не менее $\frac{\alpha}{\alpha + 1}$, и найдем α -приближенное решение $R_{\{u,v\}}$ задачи ATSP на индуцированном подграфе $G[T_{\{u,v\}}]$.

3. Решение определяется следующим соотношением

$$\bar{R} = \begin{cases} \arg \min \{\text{cost}(R_{\{u,v\}})\}, & \text{если } \min \{\text{cost}(R_{\{u,v\}}) + \sum_{w \in V} \pi_w\}, \\ R_{\text{emp}}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 3. Алгоритм 2 находит $(\alpha + 1)$ -приближенное решение задачи PCATSP.

Для перечисленных выше результатов использовался подход, основанный на полиномиальном сведении исследуемой задачи к одной или нескольким вспомогательным постановкам задачи ATSP. При построении алгоритма для задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов

обратимся к более глубокой адаптации подхода Свенссона–Трауб.

5. ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ ГРАФА ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ

Задача о покрытии минимальной стоимости графа не более чем k циклами (Minimum-weight k-Size Cycle Cover Problem, Min-k-SCCP) являет-

ся известной комбинаторной задачей, занимающей “промежуточное” положение между полиномиально разрешимой задачей о назначениях и NP-трудной в сильном смысле задачей коммивояжера. Как известно [19], симметричная версия задачи при произвольном фиксированном k наследует аппроксимационные свойства задачи TSP:

– аппроксимируемость задачи в общем случае с фактором $\alpha = \Omega(2^n)$ влечет равенство $P = NP$;

– метрическая постановка задачи допускает аппроксимацию с константным фактором;

– в конечномерных числовых пространствах фиксированной размерности задача аппроксимируема в классе полиномиальных приближенных схем (PTAS).

Обратимся к асимметричной постановке задачи, условие которой задается упорядоченной парой (G, c) , где $G = (V, E)$ – ориентированный граф, в котором $|V| > k$, а стоимости перемещения по произвольной дуге $e = (u, v)$ определяются весовой функцией $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей неравенству треугольника (1). Требуется построить остовный эйлеров подмультиграф без изолированных вершин $(V, F) \subset G$ минимальной стоимости $c(F) = \sum_{e \in F} c_e x_e$, число компонент связности которого не превосходит k . Здесь и ниже используем x_e для обозначения кратности вхождения дуги e в мультимножество F .

Предлагаемый подход основан на последовательном сведении исходной постановки к аппроксимации вспомогательных задач, первую из которых договоримся называть *специализированной* и обозначать $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$. Условие задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ задается кортежем (G, c, S) , где $S \subset V$, $|S| = k$, а множество допустимых решений стеснено дополнительным ограничением: каждая компонента связности произвольного допустимого подграфа должна иметь непустое пересечение с подмножеством S .

Лемма 1. Для произвольного фиксированного $k > 1$ аппроксимируемость задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ в классе приближенных алгоритмов с фактором $\alpha \geq 1$ влечет полиномиальную аппроксимируемость задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}$ с той же оценкой точности.

Воспользуемся стандартными обозначениями $\delta^+(U) = \{(v, u) \in E : v \in U, u \notin U\}$ и $\delta^-(U) = \delta^+(V \setminus U)$ для исходящего и входящего разрезов, порождаемых непустым подмножеством $U \subset V$, и их объединения $\delta(U) = \delta^+(U) \cup \delta^-(U)$. В частном случае $U = \{v\}$ договоримся использовать сокращение $\delta(v) = \delta(\{v\})$.

Запишем для задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ следующую модель целочисленного линейного программирования (ILP-модель):

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (9)$$

$$x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0 \quad (v \in V), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x(\delta(U)) &\geq 2 \\ ((\emptyset \neq U \subset V \setminus S) \vee (U = \{u\} : u \in S)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$x_e \in \mathbb{Z}_+ \quad (e \in E). \quad (12)$$

Здесь целевая функция (9) выражает стоимость искомого подграфа, ограничение (10) гарантирует его эйлеровость, а ограничение (11) обеспечивает отсутствие изолированных вершин и выполнение ограничения на число компонент связности. Договоримся использовать обозначения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{D}$ для вещественной релаксации данной модели и двойственной к ней задачи линейного программирования.

По аналогии с подходом, предложенным в работах [11, 12], сведем далее задачу построения приближенного алгоритма для задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ к аппроксимации *сильно ламинарных* постановок данной задачи. Условие сильно ламинарной постановки задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ задается кортежем $\mathcal{F} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$, где:

$G = (V, E)$ – сильно связный ориентированный граф, $|V| > k$;

S – k -элементное подмножество V ;

$\mathcal{L}$ – ламинарное семейство¹ подмножеств $V \setminus S$, для каждого элемента L которого индуцированный подграф $G[L]$ сильно связан;

$x : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ – допустимое решение подсистемы (10)–(11), удовлетворяющее соотношению $x(\delta(L)) = 2$ при каждом $L \in \mathcal{L}$;

y – отображение $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Из классических соотношений двойственности следует, что произвольный кортеж $\mathcal{F}$ индуцирует постановку $(G, \bar{c}, S)$ задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$, весовая функция $\bar{c}$ которой задается соотношением

$$\bar{c}_e = \bar{c}(e) = \sum_{L \in \mathcal{L}: e \in \delta(L)} y_L \quad (e \in E),$$

а оптимальное значение вещественной релаксации $\mathcal{P}_{ind}$ и двойственной к ней задачи линейного программирования $\mathcal{D}_{ind}$ – соотношением

¹ Семейство подмножеств $\mathcal{L}$ называется ламинарным, если для произвольных $A, B \in \mathcal{L}$ выполняется одна из трех альтернатив: $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ или $A \cap B = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{LP}(\mathcal{P}) &= \text{OPT}(\mathcal{P}_{\text{ind}}) = \\ &= \sum_{e \in E} \bar{c}_e x_e = \sum_{L \in \mathcal{L}} 2y_L = \text{OPT}(\mathcal{D}_{\text{ind}}). \end{aligned} \quad (13)$$

Лемма 2. Пусть для некоторого $\alpha \geq 1$ существует полиномиальный алгоритм, сопоставляющий произвольной сильно ламинарной постановке $\mathcal{P} = (G, \mathcal{L}, l, S, x, y)$, $l \leq k$ приближенное решение, стоимость которого не превосходит $\alpha \sum_{e \in E} \bar{c}_e x_e$. Тогда для задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ существует полиномиальный алгоритм, находящий для произвольной постановки (G, c, S) допустимое решение стоимости $c(F) \leq \alpha \cdot \text{OPT}(\mathcal{P})$.

Таким образом, аппроксимируемость исходной задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}$ нами редуцирована к задаче построения приближенного алгоритма для сильно ламинарных постановок задачи. Для описания этого алгоритма нам потребуется несколько дополнительных определений и обозначений.

Пусть $u, v \in V$ и $W \in \mathcal{L} \cup \{V\}$ — минимальное по включению множество, содержащее обе вершины. Путь $P_{u,v}$, соединяющий вершины u и v в сильно связном подграфе $G[W]$ графа G и посещающий каждое подмножество $L \in \mathcal{L}$ не более одного раза, называется $\mathcal{L}$ -путем. Весовой характеристикой $\mathcal{L}$ -пути $P_{u,v}$ между вершинами $u, v \in W$ назовем величину $D_W(u, v) = \sum_{\substack{L \in \mathcal{L}: L \subseteq W, \\ L \cap P_{u,v} \neq \emptyset}} 2y_L$.

Диаметром множества W назовем величину $D_W = \max_{u, v \in W} D_W(u, v)$.

Хребтом называется связный эйлеров мультиподграф $B \subset G$, в котором $V(B) \cap L \neq \emptyset$ для произвольного $L \in \mathcal{L}_{\geq 2} = \{L \in \mathcal{L} : |L| \geq 2\}$. Упорядоченную пару $(\mathcal{F}, B)$ назовем вертебральной.

Вслед за работой [12] (κ, η) -алгоритмом для произвольных $\kappa, \eta \geq 0$ договоримся называть алгоритм с полиномиальной трудоемкостью, достраивающий хребет B произвольной вертебральной пары $(\mathcal{F}, B)$ до связного эйлерова подмультиграфа $(V, E(B) \cup F')$, так что

$$c(F') \leq \kappa \text{LP}(\mathcal{F}) + \eta \sum_{v \in V \setminus V(B); \{v\} \in \mathcal{L}} 2y_{\{v\}},$$

где LP задается соотношением (13).

Лемма 3. Для произвольных $k > 1$, $\varepsilon > 0$ и класса вертебральных пар $(\mathcal{F}, B)$, где $\mathcal{F} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$ — сильно ламинарная постановка задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ и B — произвольный хребет, содержащий подмножество S , существует (κ, η) -алгоритм при $\kappa = 2$ и $\eta = 14 + \varepsilon$.

Перейдем к описанию алгоритма для сильно ламинарной постановки $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$. В качестве параметров выступают (κ, η) -алгоритм, достраивающий хребет B до остовного связного эйлерова подграфа, и алгоритм Свенссона-Трауб $\mathcal{A}_{\text{ATSP}}^*$ для поиска приближенных решений вспомогательных сильно ламинарных постановок ATSP , на выходе алгоритм строит связный эйлеров подмультиграф (V, F) графа G . Основная идея заключается в построении соответствующей исходной постановки $\mathcal{P}$ вертебральной пары, в которой все вершины из множества S принадлежат хребту, применении к построенной паре (κ, η) -алгоритма, в случае, если результирующий подмультиграф не является остовным и эйлеровым, дополнении его вспомогательными маршрутами и $\mathcal{L}$ -путями.

Алгоритм 3

1. Построим заготовку хребта $\mathcal{B}$.

1.1. Выберем такие $u^*, v^* \in V$, для которых $D_V = D_V(u^*, v^*)$, и построим путь P_{u^*, v^*} .

1.2. Пронумеровав произвольным образом вершины заданного множества $v_1, \dots, v_k \in S$, построим $\mathcal{L}$ -пути $P_{v^*, v_1}, P_{v_1, v_2}, \dots, P_{v_k, u^*}$ и получим заготовку хребта $\mathcal{B} = P_{u^*, v^*} \cup P_{v^*, v_1} \cup P_{v_1, v_2} \dots \cup P_{v_k, u^*}$ путем последовательного объединения путей (рис. 2).

2. Проверим, посещает ли $\mathcal{B}$ все множества из ламинарного семейства $L \in \mathcal{L}_{\geq 2}$. Пусть $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ — семейство максимальных по включению множеств $L \in \mathcal{L}_{\geq 2}$ среди тех, что остались непосещенными подграфом $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \emptyset$, пара $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ является вертебральной. Применив к ней (κ, η) -алгоритм, получим мультимножество дуг F' и перейдем к завершающему шагу 7. В противном случае продолжим вычисления с шага 3.

3. Сформируем вертебральную пару $(\mathcal{F}', \mathcal{B})$. Для этого перейдем к новой постановке

$$\mathcal{F}' = (G', \mathcal{L}', k, S, x', y')$$

путем сжатия каждого $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ в соответствующую дополнительную вершину v_L . В результате такого преобразования получаем новый орграф

$$G' = \left(\left(V \setminus \bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}} L \right) \cup \left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}} v_L \right), E \setminus \bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}} E[L] \right),$$

новое ламинарное семейство

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{L \in \mathcal{L} : (\exists U \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}} : L \subseteq U)\} \cup \bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}} \{v_L\},$$

не включающее множества $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ и их подмножества и дополненное синглетами $\{v_L\}$.

Определим x' как x на множество дуг графа G' , а двойственные переменные $y' : \mathcal{L}' \rightarrow \mathbb{R}_+$ зададим следующим образом:

$$y'_L = \begin{cases} y_L, & \text{если } L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'; \\ y_L + D_L/2, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По построению $(\mathcal{F}', \mathcal{B})$ — вертебральная пара.

4. Применим (κ, η) -алгоритм к вертебральной паре $(\mathcal{F}', \mathcal{B})$ и получим эйлерово мультимножество ребер F' в графе G' (см. рис. 2).

5. Вернемся к постановке $\mathcal{F}$. Применив алгоритм $\mathcal{A}_{ATSP}^*$, построим приближенное решение задачи коммивояжера для каждого подграфа $G[L]$, индуцированного произвольным множеством $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, множество дуг которого назовем F_L . Для сохранения эйлеровости окончательного решения дополним его $\mathcal{L}$ -путями P_L (см. рис. 2). Количество вызовов алгоритма $\mathcal{A}_{ATSP}^*$ равно $|\mathcal{L}_{\mathcal{B}}| = O(n)$.

6. Объединим все полученные мультимножества в $F'' = \left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}} (F_L \cup P_L) \right) \cup F'$.

7. Положим $F = E(\mathcal{B}) \cup F''$.

Результатом работы алгоритма является эйлеров подграф (V, F) .

По построению, Алгоритм 3 находит допустимое решение для заданной сильно ламинарной постановки $\mathcal{F}$ и обладает полиномиальной трудоемкостью. Верхняя оценка его фактора аппроксимации приведена в следующей лемме.

Лемма 4. Пусть для заданных $\kappa, \eta \geq 0$ существует (κ, η) -алгоритм $\mathcal{A}_{(\kappa, \eta)}$. Тогда для произвольной сильно ламинарной постановки $\text{Min-}k\text{-SCCP}_S$ алгоритм 3 находит за полиномиальное время решение (V, F) стоимости

$$\begin{aligned} c(F) &\leq \\ &\leq \begin{cases} (3\kappa + \eta + 2) \cdot \text{LP}\mathcal{F}, & \text{при } k \leq 2\kappa + \eta \\ (\kappa + k + 2) \cdot \text{LP}\mathcal{F}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Основной результат данного раздела следует из лемм 1–4.

Теорема 4. Для произвольных $k \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ задача $\text{Min-}k\text{-SCCP}$ допускает аппроксимацию в классе α -приближенных полиномиальных алгоритмов, где α определяется как

$$\alpha = \begin{cases} 22 + \varepsilon, & \text{если } k \leq 18 + \varepsilon, \\ 4 + k, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В развитие пионерского подхода Свенссона-Трауб в данной работе предложены первые полиномиальные приближенные алгоритмы с фиксированными теоретическими оценками точности для ряда асимметричных постановок маршрутных задач комбинаторной оптимизации. Среди открытых вопросов отметим предполагаемое распространение предложенного подхода на более широкий класс оптимизационных задач. Кроме того, представляет интерес вопрос уточнения найденных верхних оценок, в том числе путем проведения численных экспериментов на современных библиотеках текстовых примеров (напр., [20]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данное исследование поддержано Российским научным фондом, грант № 22-21-00672, <https://rscf.ru/project/22-21-00672/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gutin G., Punnen A.P. The Traveling Salesman Problem and Its Variations. Springer US, Boston, MA, 2007.
2. Toth P., Vigo D. Vehicle Routing. Problems, Methods, and Applications. SIAM, Philadelphia, 2014.
3. Desrosiers J. and Lübbecke M.E. Branch-Price-and-Cut Algorithms. In Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science (eds. J.J. Cochran, L.A. Cox, P. Keskinocak, J.P. Kharoufeh and J.C. Smith). Wiley and Sons, NJ. 2015.
4. Gendreau M., Potvin J.-Y. Handbook of Metaheuristics. Springer. 2019.
5. Vazirani V. Approximation algorithms. Springer. Berlin. 2003.
6. Williamson D.P., Shmoys D.B. The Design of Approximation Algorithms. New York, USA, 2011.
7. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the Travelling Salesman Problem // Technical Report 388. Graduate School of Industrial Administration. Carnegie-Mellon University. 1976.
8. Сердюков А.И. О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. 1978. Т. 17. С. 76–79.
9. Haimovich M., Rinnooy Kan A.H.G. Bounds and Heuristics for Capacitated Routing Problems // Mathematics of Operations Research. 1985. V. 10. № 4. P. 527–542.
10. Asadpour A., Goemans M.X., Mądry A., Gharan S.O., Saberi A. An $O(\log n / \log \log n)$ -approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem // Operations Research. 2017. V. 65. № 4. P. 1043–1061.
11. Svensson O., Tarnawski J., Vègh L.A. A constant-factor approximation algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem // J. ACM. 2020. V. 67. № 6. P. 1–53.
12. Traub V., Vygen J. An improved approximation algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem // SIAM Journal on Computing. 2022. V. 51. № 1. P. 139–173.

13. *Khachay M., Neznakhina E., Ryzhenko K.* Constant-factor approximation algorithms for a series of combinatorial routing problems based on the reduction to the Asymmetric Traveling Salesman Problem // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2022. V. 319. № 1. P. S140–S155.
14. *Rizhenko K., Neznakhina K., Khachay M.* Fixed ratio polynomial time approximation algorithm for the Prize-Collecting Asymmetric Traveling Salesman Problem // *Ural Math. Journal.* 2023. V. 9. № 1. P. 135–146.
15. *Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д., Рыженко К.В.* Полиномиальная аппроксимируемость асимметричной задачи о покрытии графа ограниченным числом циклов // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2023. Т. 29. № 3. С. 261–273.
16. *van Bevern R., Hartung S., Nichterlein A., Sorge M.* Constant-factor approximations for capacitated arc routing without triangle inequality // *Operations Research Letters.* 2014. V. 42. № 4. P. 290–292.
17. *Papadimitriou C.* Euclidean TSP is NP-complete // *Theoret. Comput. Sci.* 1977. V. 4. P. 237–244.
18. *Bienstock D., Goemans M.X., Simchi-Levi D., Williamson D.* A note on the Prize-Collecting Traveling Salesman Problem // *Math. Program.* 1993. V. 59. P. 413–420.
19. *Khachay M., Neznakhina K.* Approximability of the Minimum-Weight k -Size Cycle Cover Problem // *J. of Global Optimization.* 2016. V. 66. № 1. P. 65–82.
20. *VRP-REP: the vehicle routing problem repository.* <http://www.vrp-rep.org/> Дата обращения 12.09.23.

APPROXIMATION ALGORITHMS WITH CONSTANT FACTORS FOR A SERIES OF ASYMMETRIC ROUTING PROBLEMS

**E. D. Neznakhina^{a,b}, Yu. Yu. Ogorodnikov^{a,b}, K. V. Rizhenko^a,
and Corresponding member of the RAS M. Yu. Khachay^a**

^a*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia*

^b*Ural federal university, Ekaterinburg, Russia*

In this paper, the first fixed-ratio approximation algorithms are proposed for the series of asymmetric settings of the well-known combinatorial routing problems. Among them are the Steiner cycle problem, the prize-collecting traveling salesman problem, the minimum cost cycle cover problem by a bounded number of cycles, etc. Almost all the proposed algorithms rely on original reductions of the considered problems to auxiliary instances of the Asymmetric Traveling Salesman Problem and employ the breakthrough approximation results for this problem obtained recently by O. Svensson, J. Tarnawski, L. Végh, V. Traub and J. Vygen. On the other hand, approximation of the cycle cover problem was proved by more deep extension of their approach.

Keywords: asymmetric traveling salesman problem, approximation algorithm, constant ratio, Steiner cycle problem, Vehicle Routing Problem, Cycle Cover Problem

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2023 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком В.В. Козловым

Поступило 09.10.2023 г.

После доработки 20.10.2023 г.

Принято к публикации 15.11.2023 г.

Получены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость

DOI: 10.31857/S2686954323602257, **EDN:** DDWPZU

1. ВВЕДЕНИЕ

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1–3], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет

результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система с двумя степенями свободы на своем четырехмерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

2. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Проиллюстрируем предлагаемый в работе подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z – фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой – однородные полиномы (для простоты, степени 2) по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot{z} &= d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot{\alpha} &= g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle \cdot \rangle$, $v \neq 0$), а также новую

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

фазовую Z , $z = Zv$, систему (1), можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad (2)$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \quad (3)$$

$$Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z),$$

при этом уравнение (2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (3) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$.

Особняком стоит случай некоторой усеченной системы, когда выполнены тождества $d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0$. Тогда система (2), (3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \text{const}. \quad (4)$$

Для полной интегрируемости усеченной системы (2), (3) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (4). Но мы для простоты ограничимся следующим важным частным случаем системы (2), (3) третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha), \quad (5)$$

$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad (6)$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, и будем рассматривать систему (5), (6) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Предложение 1. Система (5), (6) имеет два гладких (автономных) первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z \delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$

$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (6)

на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный [8] по Z (автономный) первый интеграл вида $\Phi(Z; \alpha) = (1 - 2b_0 Z \delta(\alpha))/Z^2 = C = \text{const}$, который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (6) также не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (5), (6) не нарушает консервативности системы.

Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм (для начала объема) для интегрируемости системы (5), (6). Для поиска функции $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет искомую инвариантную форму $\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ$, под-

считаем дивергенцию векторного поля $w(v; \alpha, Z)$ рассматриваемой системы (5), (6) в евклидовых координатах. Тогда составная система уравнений характеристик (для поиска решения линейного уравнения $\text{div}[\rho(v; \alpha, Z)w(v; \alpha, Z)] = 0$ в частных производных) будет состоять из системы (5), (6) и следующего добавочного уравнения: $\rho' = -3b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha)\rho$.

Как отмечалось, система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла. А дополнительный первый интеграл системы уравнений характеристик имеет вид $\rho Z^3 = C_\rho = \text{const}$. Теперь нетрудно убедиться, что следующие функции $\rho_1(Z) = 1/Z^3$, $\rho_2(v) = v^3$ являются примерами функции $\rho(v; \alpha, Z)$, определяющей инвариантную форму $\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ$.

Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (5), (6) внешнее гладкое силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (7)$$

Создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность “подтвердилась” бы наличием в системе двух гладких (автономных) первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (5), (7) существует гладкий первый интеграл, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система (5), (7), вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств).

Предложение 2. Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (5), (7) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) =$$

$$= v^2 \left(1 - b_0 Z \delta(\alpha) - b_0 (Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctg \frac{\delta(\alpha)}{Z} \right) = \quad (8)$$

$$= C_0 = \text{const},$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}.$$

Более того, как видно из (8), притягивающие и отталкивающие предельные множества рассматриваемой системы (5), (7) могут быть найдены из системы недифференциальных равенств $Z = 0$, $\delta(\alpha) = 0$.

Модифицируем далее систему (5), (7) при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \delta(\alpha), \quad (9)$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha),$$

$$Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}, \quad (10)$$

$\mu > 0$. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b_0 , а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр b_1 .

Выше мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (5), (7), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b_0 = 0$.

Но мы расширим введение силового поля, положив $b_0, b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^1\{Z; \alpha\}$ примет вид (9), (10). Как будет видно далее, только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема 1. Если выполнено условие $F(\alpha) = \lambda \delta(\alpha) \tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором – двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она обладает двумя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Действительно, пусть выполнено условие $F(\alpha) = \lambda \delta(\alpha) \tilde{\delta}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Используем для подсчета дивергенции векторного поля $w_1(v; \alpha, Z)$ системы (9), (10) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (5), (6) без внешнего поля сил). Тогда составная система уравнений характеристик (уравнения $\text{div}[\rho(v; \alpha, Z)w_1(v; \alpha, Z)] = 0$) будет состоять из системы (9), (10) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\delta}(\alpha) \rho. \quad (11)$$

Вводя новую однородную переменную u , $Z = u\delta$, системе (9)–(11) уравнений характеристик можно сопоставить два соотношения:

$$\begin{aligned} \delta \frac{du}{d\delta} &= \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u + u^2}{-u + b_0 u^2 \delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}, \\ \delta \frac{d\rho}{d\delta} &= \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{-u + b_0 u^2 \delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Первое уравнение из (12) (приводящееся к линейному неоднородному) позволяет выписать первый интеграл, вообще говоря, с существенно особыми точками независимой системы (10). Имеется также гладкий первый интеграл (для простоты, при $b_0 = b_1$) следующего вида:

$$\begin{aligned} \Theta_0(v; Z; \alpha) &= v^2 (1 - 2b_0 Z \delta(\alpha) + b_0^2 \mu Z^2) = \\ &= C_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (13)$$

А второе уравнение из (12), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \exp \left\{ b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u + u^2} \right\} &= \\ &= C_\rho = \text{const}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$\begin{aligned} \rho(v; \alpha, Z) dv \wedge d\alpha \wedge dZ &= \\ = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u + u^2} \right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \\ u &= \frac{Z}{\delta(\alpha)}. \end{aligned}$$

3. СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть $v, \alpha, \beta, z_1, z_2$ – фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой – однородные полиномы степени 2 по переменным v, z_1, z_2 с коэффициентами, зависящими от α, β (система, аналогичная (1)). Выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые $Z_k, z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, будем рассматривать систему пятого порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \tilde{\delta}(\alpha), \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad (14)$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \delta(\alpha),$$

$$Z_2' = \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2 - \\ &- Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta' = Z_1 f(\alpha),$$

$b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (14) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (15) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, см. также [7]). Рассмотрим структуру системы (15). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\alpha, \beta; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ (в частности, сферы — с двумя ненулевыми коэффициентами связности):

$$\ddot{\alpha} + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \ddot{\beta} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0. \quad (16)$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1 , z_2 в касательном пространстве в виде

$$\dot{\alpha} = -z_2, \quad \dot{\beta} = z_1 f(\alpha), \quad (17)$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (15))

$$Z_1' = \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (18)$$

$$Z_2' = \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

при этом уравнения (16) почти всюду эквивалентны совокупности (17), (18), которая, прежде всего, присутствует в системе (15) (при этом вместо (17) лучше выбрать равенства $\alpha' = -Z_2$, $\beta' = Z_1 f(\alpha)$).

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (16). Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. также [9–11]).

Далее, в системе (15) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (6), они не нарушают консервативности, поскольку система (14), (15) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n = 2$, т.е. 6 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна.

К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f(\alpha)$ из (17)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” $2(n(n-1))$ штуками при $n = 2$ ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (16). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет $1(n(n-1)/2)$ штук при $n = 2$. Таким образом, мы имеем 3 функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(2)$) на имеющиеся $A(2) = 3$ функции ($A(n) = 3n(n-1)/2$ штук при $n = 2$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. В данной работе будем накладывать $B(2) = 2$ условия на имеющиеся $A(2) = 3$ функции.

Число $B(2)$ складывается из трех слагаемых: $B(2) = B_1(2) + B_2(2) + B_3(2)$. Число $B_1(2)$ равно количеству условий, накладываемых на функцию $f(\alpha)$. При $n = 2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функцию $f(\alpha)$, т.е. $B_1(2) = 0$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \quad (19)$$

т.е. $B_2(2) = 1$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$). Число $B_3(2)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функцию $f(\alpha)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha) =: \Gamma_2(\alpha), \quad 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha) \equiv 0, \quad (20)$$

т.е. $B_3(2) = 1$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2$).

Видно, что в общем случае $B(n) = B_1(n) = B_2(n) + B_3(n) = (n-1)^2 + n(n-1)/2$, при этом $A(n) - B(n) = n - 1$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на $n - 1$ (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(2) - B(2) = 1$.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (14), (15) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбина-

цию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [5, 7]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (16), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, i = 1, 2, \text{ является гладкая}$$

функция $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым “выпрямив” квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 2 алгебраических и дифференциальных соотношения (19), (20) на 3 функции: на функцию $f(\alpha)$ и на 2, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Теорема 2. Если выполнены условия (19), (20), то система (14), (15), рассмотренная на произведении $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$, обладает полным набором, состоящим из четырех гладких первых интегралов вида

$$\begin{aligned} \Phi_0(v; Z_2; \alpha) &= v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \\ \Phi_1(v; Z_2, Z_1) &= v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \text{const}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(v; Z_1; \alpha) &= v^2 Z_1 \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \\ A_1 &= \text{const}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(\alpha, \beta) &= \beta - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(b)}{A(b) + b C_1^2 \delta^2(b)} db = \\ &= C_4 = \text{const}, \end{aligned}$$

$A(\alpha)$ — некоторая гладкая функция.

Более того, после замены фазовых переменных $w_2 = Z_2$, $w_1 = Z_1$, $w_1^* = \ln |w_1|$ фазовый поток системы (14), (15) сохраняет фазовый объем с плотностью $\rho_2(v) = v^3$ на произведении $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма $v^3 dv \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta$.

Заметим также, что равенство (20) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (21). История и текущее состояние рассмотрения

данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

4. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (14), (15), при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (23), (24) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b, b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha),$$

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$$Z_2' = F(\alpha) + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' &= Z_1 f(\alpha), \end{aligned}$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Силовое поле в уравнениях на v' , Z_1' , Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, та-

кое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [5–7]).

5. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы пятого порядка (23), (24) при выполнении свойств (19), (20), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (23), (24) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 2 алгебраических и 2 дифференциальных соотношения (19), (20) на 3 функции: на функцию $f(\alpha)$ и на 2, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Тогда система (24) распадется следующим образом:

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha),$$

$$Z_2' = F(\alpha) + \Gamma_2(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (25)$$

$$Z_1' = -\Gamma_2(\alpha) f^2(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

$$\beta' = Z_1 f(\alpha). \quad (26)$$

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$f^2(\alpha) \Gamma_2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}, \quad (27)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ – равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\delta}(\alpha) \delta(\alpha). \quad (28)$$

Условие (27) назовем “геометрическим”, а условие – “энергетическим”. Условие (27) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условие (28) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять

же относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом сама функция $\delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [12–14]).

Теорема 3. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются условия (27) и (28). Тогда система (23), (25), (26) обладает полным набором – четырьмя (одним гладким и тремя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает четырьмя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Действительно, благодаря однородным переменным u_k , $Z_k = u_k \delta(\alpha)$, $k = 1, 2$ из системы (25) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\delta \frac{du_2}{d\delta} = \frac{\lambda + \kappa u_1^2 + u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2) \delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}, \quad (29)$$

$$\delta \frac{du_1}{d\delta} = \frac{(1 - \kappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2) \delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)},$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1 - \kappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \quad (30)$$

Уравнение (30) имеет вид уравнения Абеля [15–17]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1 \lambda \mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (31)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1 \left(\frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)} \right) =$$

$$= \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - b_1 \lambda \mu Z_2 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{Z_1 \delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (32)$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля $w_2(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta)$ системы (23), (25), (26) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную для системы (14), (15)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\text{div}[\rho(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta) w_2(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta)] = 0 \quad (33)$$

будет состоять из системы (23), (25), (26) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\delta}(\alpha) \rho. \quad (34)$$

Системе (23), (25), (26), (34) уравнений характеристик можно сопоставить три соотношения: два из (29) и

$$\delta \frac{d\rho}{d\delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}. \quad (35)$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если $\kappa = -1$, то используется равенство (31)). Из него, при участии уравнений (29), (26) получаются два других первых интеграла, имеющие следующие структурные виды:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \quad (36)$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_3 = \text{const}. \quad (37)$$

При этом (при $\kappa = -1$) первый интеграл (36) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{u(u_2) - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4u(u_2)}\right\},$$

$$u(u_2) = \lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2.$$

Выражение первых интегралов (36), (37) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Кроме того, у системы (23), (25), (26) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (13)), который, например, при $b = b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha) + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \text{const}. \quad (38)$$

А уравнение (35), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const},$$

$$U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) - C_1U(C_1, u_2).$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ_2 \wedge dZ_1 \wedge d\beta,$$

$$u_2 = \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (33) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3],$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]$ — произвольная гладкая функция четырех аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — четыре независимых первых интеграла (38), (32), (36), (37) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (33) в частных производных можно взять следующие функции ($u_k = Z_k/\delta(\alpha)$, $k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \rho_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) &= v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha), \\ \rho_1(v; Z_2, Z_1; \alpha) &= v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha), \\ \rho_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) &= v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha), \\ \rho_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta) &= v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta). \end{aligned}$$

6. СТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Система (23), (24) является динамической системой с переменной диссипацией [12–14]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (14), (15). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (21), (22). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (23), (24) при условии (28) обладает первым интегралом вида

$$\Theta|_{B=0}(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (39)$$

где $\Theta(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - B\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha))$ — семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (39), (22) также является первым интегралом системы (23), (24) при не равенстве функции

$F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\begin{aligned} \Theta|_{B=b_1}(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = \\ = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const} \end{aligned} \quad (40)$$

и (22) по отдельности не является первым интегралом системы (23), (24). Однако отношение функций (40), (22) является первым интегралом (32) системы (23), (24) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [4, 13].

Выделим теперь существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на двумерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \delta(\alpha) = \sin \alpha. \quad (41)$$

Случай (41) формирует класс систем (23), (24) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (41), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [12]. В частности, если $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данной же работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем пятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Показана связь наличия данных инвариантов и набором первых интегралов. Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде (см. также [18, 19]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Gauthier—Villars, Paris. 1912. 40 p.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
7. *Шамолин М.В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 52 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
12. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
14. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
16. *Polyanin A.D., & Zaitsev V.F.* (2017). Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315117638>
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
18. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
19. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.

INVARIANTS OF FIVE-ORDER HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin^a

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

New cases of integrable dynamical systems of the fifth order homogeneous in terms of variables are obtained, in which a system on a tangent bundle to a two-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of a different sign. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of dynamical system, essentially singular points of invariant, system with dissipation, integrability

УДК 519.6

МНОГОМЕРНЫЕ КУБАТУРЫ СО СВЕРХСТЕПЕННОЙ СХОДИМОСТЬЮ

© 2023 г. А. А. Белов^{1,2,*}, М. А. Тинтул^{1,**}

Представлено академиком Е.Е. Тыртышниковым

Поступило 06.03.2023 г.

После доработки 18.09.2023 г.

Принято к публикации 15.11.2023 г.

Во многих приложениях возникают многомерные интегралы по единичному гиперкубу, которые вычисляют с помощью методов Монте-Карло. Сходимость лучших из них оказывается довольно медленной. В данной работе предложены принципиально новые кубатуры со сверхстепенной сходимостью, основанные на усовершенствованных сетках Коробова и специальной замене переменных. Построены апостериорные оценки погрешности, практически неотличимые от фактической точности. Приведены примеры расчетов, иллюстрирующие преимущества предложенных методов.

Ключевые слова: многомерные интегралы, метод Монте-Карло, сверхстепенная сходимость, сетки Коробова

DOI: 10.31857/S2686954323600118, **EDN:** DAUIMM

1. ПРОБЛЕМА

1° Рассмотрим вычисление s -мерного интеграла от гладкой функции по единичному гиперкубу

$$I = \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1 \dots x_s) dx_1 \dots dx_s. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ — s -мерный вектор. Например, в статистической физике требуется вычислять моменты одночастичной функции распределения, которая зависит от $s = 6$ переменных. Коэффициент теплопроводности среды выражается через интегралы рассеяния, кратность которых равна $s = 12$. Возникают задачи и с большим числом переменных.

2° Для размерностей $s \leq 3$ применяют многомерные варианты сеточных квадратур средних, трапеций и Симпсона [1]. Их погрешность δ зависит от шага сетки по одной координате по степенному закону. Пусть N есть число точек многомерной сетки. Тогда $\delta \sim N^{-q/s}$, где q — порядок

точности квадратуры. Такая скорость сходимости быстро убывает с ростом s .

Для интегралов более высокой размерности наиболее эффективны методы Монте-Карло (МК). Они основаны на использовании равномерно распределенных случайных чисел. На практике используют детерминированные наборы чисел, имитирующие свойства случайных последовательностей. Лучшими являются квазислучайные последовательности Соболя [2] и теоретико-числовые сетки Коробова [3]: для непериодической функции погрешность $\delta \sim N^{-1}$ независима от s . Однако даже такая сходимость довольно медленна, и расчеты с высокой точностью требуют больших объемов вычислений.

3° Важным аспектом является апостериорный контроль погрешности расчета. Для сеточных методов известны асимптотически точные оценки погрешности по Ричардсону [4]. Для методов МК таких оценок не предложено.

4° В данной работе 1) предложены кубатуры со сверхстепенной сходимостью для гладких подынтегральных функций, в том числе непериодических. Они основаны на использовании сеток Коробова и специальной замены переменных в интеграле. Предложенный подход кардинально (на много порядков) повышает точность расчета. Он является принципиально новым. 2) Построены апостериорные оценки точности, практически неотличимые от фактической погрешности. В методах МК такие оценки ранее были неизвестны. 3) Предложены усовершенствованные сетки Ко-

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

²Российский университет дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

*E-mail: aa.belov@physics.msu.ru

**E-mail: maksim.tintul@mail.ru

робова, названные экстремальными. Их узлы распределены в гиперкубе существенно более равномерно при заметно меньшей трудоемкости нахождения параметров сеток. Найдены параметры таких сеток, достаточные для вычисления интегралов размерности $2 \leq s \leq 12$ с точностью вплоть до ошибок округления.

2. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ СЕТКИ

1° Эти сетки были предложены Коробовым [3, 5]. Напомним их определение. Узлы имеют вид

$$M_k = (\{a_1 k N^{-1}\}, \dots, \{a_s k N^{-1}\}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x ; $a_1, \dots, a_s$ — так называемые оптимальные коэффициенты. В [3] предложен следующий алгоритм их вычисления. Пусть $N = N_1 N_2$, где N_1, N_2 — простые числа, причем $N_2 \sim \sqrt{N_1}$. Рассмотрим

$$H_1(z) = 3^s N_1^{-1} \sum_{k=1}^{N_1} \prod_{q=0}^{s-1} (1 - 2\{kz^q N_1^{-1}\})^2, \quad (3)$$

где z — целые числа, $1 \leq z \leq N_1$. Пусть оно достигает минимума $\min_z H_1$ при $z = a$. Далее рассмотрим выражение

$$H_2(z) = 3^s N_1^{-1} N_2^{-1} \times \sum_{k=1}^{N_1 N_2} \prod_{q=0}^{s-1} (1 - 2\{(N_1 z^q + N_2 a^q) k N_1^{-1} N_2^{-1}\}). \quad (4)$$

Здесь z — целые, $1 \leq z \leq N_2$. Пусть оно имеет минимум $\min_z H_2$ при $z = b$. Тогда оптимальные коэффициенты имеют вид

$$a_q = N_1 b^{q-1} + N_2 a^{q-1}, \quad 1 \leq q \leq s. \quad (5)$$

2° В данной работе предложено усовершенствование алгоритма (3)–(5). Рассмотрим (4) как функцию двух целочисленных переменных z и a , $1 \leq z \leq N_2$, $1 \leq a \leq N_1$, и найдем **одновременный** минимум $\min_{z,a} H_2$ по этим переменным. Координаты минимума обозначим b_0, a_0 соответственно. Далее вычислим коэффициенты (5), заменяя $a \rightarrow a_0, b \rightarrow b_0$, и узлы сетки M_k согласно (2). Назовем такие сетки **экстремальными сетками Коробова**.

3° Величина $\min H_2$ характеризует качество сетки. Чем она меньше, тем равномернее распределены точки M_k в гиперкубе и тем выше точность кубатуры (6). Расчеты показывают, что при увеличении N величина $\min_z H_2$ уменьшается до некоторого предельного значения, зависящего от s , и при дальнейшем сгущении сеток перестает убывать. Это ограничивает предельно достижи-

мую точность кубатур на классических сетках Коробова.

В то же время величина $\min_{z,a} H_2$ убывает с увеличением N вплоть до достижения фона ошибок округления, который в 10^3 – 10^5 раз меньше, чем предельно достижимое $\min_z H_2$. Тем самым предлагаемые экстремальные сетки Коробова имеют существенно лучшую равномерность распределения точек в гиперкубе по сравнению с классическими сетками Коробова.

4° Видно, что число арифметических операций при вычислении $H_1(z)$ и $H_2(z)$ при всех указанных z равно $\sim N^{4/3}$. В [6] предложен алгоритм вычисления оптимальных коэффициентов с трудоемкостью $\sim N$ операций.

В предлагаемом алгоритме для вычисления $H_2(z, a)$ при всех указанных значениях аргументов требуется $\sim N^{4/3}$ арифметических операций. Однако функция $H_2(z, a)$ имеет несколько минимумов. Они имеют одинаковую глубину, и соответствующие b_0, a_0 дают эквивалентные сетки. Эти минимумы реализуются уже при $a \leq 20 \ll N_1$. Поэтому фактическая трудоемкость есть $\sim 20N^{2/3}$ операций, что экономичнее известных алгоритмов. Для типичных $N \sim 10^6$ выигрыш составляет ~ 5 раз.

5° Найдены параметры N_1, N_2, b_0, a_0 экстремальных сеток Коробова для размерностей $2 \leq s \leq 12$. Они приведены в табл. 1. Последняя сетка для каждого s соответствует точности порядка ошибок компьютерного округления для кубатуры. Таблица 1 рекомендуется к использованию в расчетах.

3. КУБАТУРЫ СО СВЕРХСТЕПЕННОЙ СХОДИМОСТЬЮ

1° Кубатура для интеграла (1) на сетке (2) имеет вид

$$I_N = N^{-1} \sum_{k=1}^N f(M_k). \quad (6)$$

Для периодических подынтегральных функций, имеющих r непрерывных производных, кубатура (6) сходится с точностью $O((\ln N)^r / N^r)$, где γ — некоторое число [3]. Такая сходимость близка к степенной.

2° Пусть f есть гладкая, но непериодическая функция. Для ускорения сходимости применяют замены переменных интегрирования [7]. Известна полиномиальная замена $x_q \in (0, 1) \rightarrow \xi_q \in (0, 1)$, $1 \leq q \leq s$, которая обращает в нуль несколько низших производных функции f на гранях гипер-

Таблица 1. Параметры экстремальных сеток Коробова

s	N_1	N_2	a_0	b_0	s	N_1	N_2	a_0	b_0	s	N_1	N_2	a_0	b_0
2	3	2	3	1	3	7	3	3	1	4	7	3	3	1
	7	3	6	1		23	5	9	3		47	7	5	1
	23	5	2	1		113	11	6	3		167	13	8	9
	113	11	9	10		283	17	5	7		839	29	16	26
	283	17	7	14		839	29	8	9		9403	97	18	11
5	3	2	19	1	6	47	7	3	4	7	23	5	11	2
	23	5	12	2		283	17	12	14		167	13	18	10
	167	13	10	11		839	29	9	5		839	29	7	10
	1367	37	11	5		6229	79	7	42		2803	53	12	22
	5039	71	14	10		38803	197	14	34		32749	181	11	16
8	283	17	4	2	9	283	17	13	12	10	167	13	3	6
	1367	37	13	8		953	31	11	29		839	29	13	25
	6229	79	8	19		6229	79	13	22		3719	61	4	18
	26561	163	14	10		29927	173	4	10		19319	139	19	13
	76717	277	15	6		72353	269	12	5		78941	281	14	4
11	1669	41	16	13	12	167	13	20	10					
	5039	71	17	13		839	29	14	13					
	17159	131	13	11		6883	83	16	2					
	52433	229	14	8		27883	167	13	7					
	94229	307	7	6		85847	293	6	4					

куба [3]. Это повышает порядок точности кубатуры, но сходимость остается степенной.

3° В данной работе предложена следующая замена переменных:

$$\begin{aligned} x_q(t_q) &= 0.5 + 0.5 \operatorname{th} t_q, \\ t_q(\xi_q) &= (\xi_q - 0.5) \xi_q^{-1} (1 - \xi_q)^{-1}, \quad 1 \leq q \leq s. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда интеграл (1) принимает вид

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \tilde{f}(\xi_1, \dots, \xi_s) d\xi_1 \dots d\xi_s, \\ \tilde{f}(\xi_1, \dots, \xi_s) &= f(x_1(\xi_1), \dots, x_s(\xi_s)) \times \\ &\times \prod_{q=1}^s (dx_q/dt_q)(dt_q/d\xi_q), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} dx_q/dt_q &= 0.5(\operatorname{ch} t_q)^{-2} \\ dt_q/d\xi_q &= (\xi_q^2 - \xi_q + 0.5)(\xi_q - \xi_q^2)^{-2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко видеть, что $\lim_{\xi_q \rightarrow 0+0} \tilde{f} = \lim_{\xi_q \rightarrow 1-0} \tilde{f} = 0$. То же верно для всех производных $\tilde{f}$, т.е. эта функция допускает гладкое периодическое продолжение за пределы отрезка $[0, 1]$ по каждой переменной. Поэтому все степенные слагаемые в остаточ-

ном члене кубатуры (6) сокращаются. Тем самым верна

Теорема. Кубатура (6) для интеграла (8) на экстремальных сетках Коробова сходится по сверхстепенному закону.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет строить прецизионные кубатуры со сверхстепенной сходимостью для многомерных интегралов от произвольных гладких функций, в том числе непериодических. Такая скорость сходимости кардинально превосходит традиционную степенную.

4° Грани гиперкуба (т.е. точки $\xi_q = 0, 1$; $1 \leq q \leq s$) становятся существенно особыми точками функции $\tilde{f}$. Точка $\mathbf{x} = (0, \dots, 0)$ является узлом сетки (2). Доопределим в ней $\tilde{f} = 0$.

Считается [8], что наличие существенно особых точек не позволяет добиться сходимости. В данной работе впервые показано, что это не препятствует сходимости, и замена (7) позволяет реализовать сверхстепенную сходимость. Поэтому предлагаемый подход является принципиально новым.

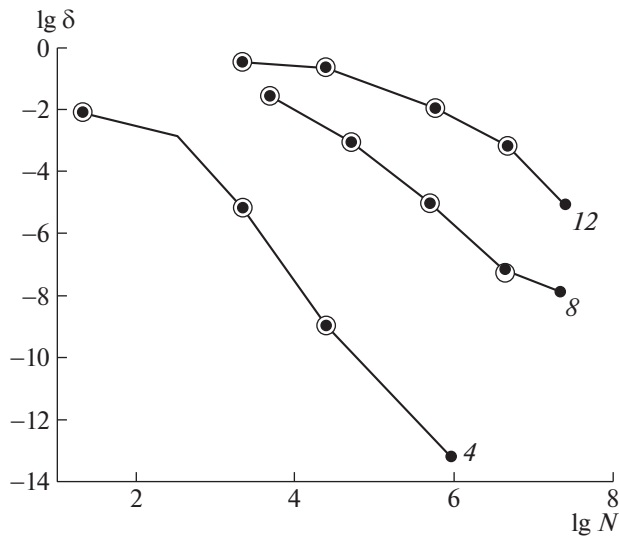


Рис. 1. Погрешность расчета в тесте (11) на экстремальных сетках Коробова с заменой переменных (7). ● — погрешность относительно точного ответа, ○ — апостериорная оценка (11). Цифры около линий — размерность s .

4. КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ

Проведем расчет на наборе сеток из табл. 1. Точность кубатуры I_{end} на последней сетке сопоставима с ошибками компьютерного округления. Поэтому погрешность δ_N на предыдущих сетках N можно оценить сравнением с последней сеткой

$$\delta_N = I_{\text{end}} - I_N. \quad (10)$$

В методах МК такие оценки ранее были неизвестны.

5. АПРОБАЦИЯ

1° Рассмотрим пример. Пусть

$$f = \prod_{q=1}^s f_q(x_q), \quad f_q(x_q) = e^{-x_q} x_q^{\alpha-1} / \gamma(1, \alpha), \quad (11)$$

$$\alpha = 1.7.$$

Здесь γ — нижняя неполная гамма-функция. Точное значение этого интеграла есть $I = 1$. Эффективная размерность интеграла равна s (т.е. совпадает с формальной), поэтому такой тест достаточно представительен.

2° Были проведены расчеты интеграла от (11) для различных $s = 4, 8, 12$. Погрешность определялась как разность кубатуры и точного значения I . Полученные погрешности приведены на рис. 1. Масштаб графика двойной логарифмический. Прямая линия соответствует степенной сходимости, а линия, убывающая быстрее прямой (выпуклая вверх), — сверхстепенной.

Видно, что все кривые являются выпуклыми вверх, и закон сходимости действительно является

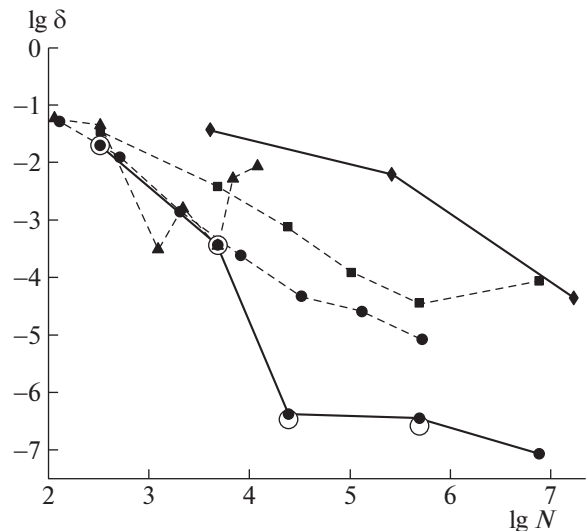


Рис. 2. Сравнение методов в тесте (11). Сплошные линии — замена переменных (7), штриховые — без замены. Темные маркеры — погрешность относительно точного ответа, светлые — апостериорная оценка (10). ● — экстремальная сетка Коробова, ▲ — классическая сетка Коробова, ■ — точки Соболя, ◆ — формула средних.

ся сверхстепенным. На самых подробных сетках погрешность сопоставима с ошибками округления и перестает убывать.

Также на рис. 1 приведены апостериорные оценки (10). Видно, что они практически неотличимы от фактической погрешности. Это показывает высокую практическую ценность предлагаемых оценок.

3° Проведем сравнение различных методов: кубатуры (6) на экстремальных сетках Коробова с заменой переменных (7) и без нее, на классических сетках Коробова [3], на сетках Соболя, а также многомерная формула средних с заменой (7). Пусть подынтегральная функция имеет вид (11) при $s = 6$. Погрешности данных методов приведены на рис. 2. График выполнен в двойном логарифмическом масштабе.

Видно, что экстремальные сетки Коробова позволяют достигать существенно более высокой точности по сравнению с классическими сетками Коробова. Введение замены переменных (7) резко ускоряет сходимость и существенно повышает количественную точность. При этом формула трапеций с заменой (7) сильно уступает по точности кубатуре на экстремальных сетках Коробова с той же заменой. Видно также, что совокупность предлагаемых подходов — экстремальные сетки Коробова и замена переменных (7) — кардинально превосходят по точности другие перечисленные методы. Выигрыш составляет от 10^2 до 10^5 раз. Кроме того, предлагаемые методы позволяют

апостериорно подтверждать достигнутую точность. Поэтому они также превосходят известные методы по надежности.

Работа поддержана грантом РНФ № 22-71-00028.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н.Н., Альшина Е.А.* Численные методы. Т. 1. Численный анализ. М.: Академия, 2013.
2. *Соболев И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1975.
3. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
5. *Демидов С.С. и др.* // Чеб. сборник. 2017. Т. 18. № 4. С. 6.
6. *Коробов Н.М.* // ДАН. 1982. Т. 267. № 2. С. 289.
7. *Гельфанд И.М. и др.* // Изв. ВУЗов. Матем. 1958. Т. 6. № 5. С. 32.
8. *Iri M., Moriguti S., Takasawa Y.* // J. Comp. Appl. Math. 1987. V. 17. P. 3.

MULTIDIMENSIONAL CUBATURES WITH SUPER-POWER CONVERGENCE

A. A. Belov^{a,b} and M. A. Tintul^a

^a*M.V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russian Federation*

^b*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E. E. Tyrtshnikov

In many applications, multidimensional integrals over the unit hypercube arise, which are calculated using Monte Carlo methods. The convergence of the best of them turns out to be quite slow. In this paper, fundamentally new cubatures with super-power convergence based on the improved Korobov grids and special variable substitution are proposed. A posteriori error estimates are constructed, which are practically indistinguishable from the actual accuracy. Examples of calculations illustrating the advantages of the proposed methods are given.

Keywords: multidimensional integrals, Monte Carlo method, super-power convergence, Korobov grids

УДК 519.676

ЧИСЛЕННО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СУПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА СРЕДНЕГО ПОТОКА ЧАСТИЦ, РАЗМНОЖАЮЩИХСЯ В ОДНОРОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. чл.-корр. РАН Г. А. Михайлов^{1,2,*}, Г. З. Лотова^{1,2,**}

Поступило 14.04.2023 г.

После доработки 18.09.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

Для эффективного численно-аналитического исследования суперэкспоненциального роста среднего потока частиц с размножением в случайной среде вводится новая корреляционно-сеточная аппроксимация однородного случайного поля плотности. Сложность реализации траектории частицы при этом не зависит от корреляционного масштаба. Тестовые расчеты для критического шара с изотропным рассеянием показали высокую точность соответствующих оценок среднего потока. Для сеточной аппроксимации случайного поля плотности обоснована возможность гауссовской асимптотики средней скорости размножения частиц при уменьшении корреляционного масштаба.

Ключевые слова: численное статистическое моделирование, поток частиц, суперэкспоненциальная асимптотика, случайная среда, поле Вороного, сеточная аппроксимация

DOI: 10.31857/S2686954323600210, **EDN:** CZXVJY

1. Известно (см., например, [1]), что плотность потока частиц $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ в системе, образованной размножающей средой в области $\mathbf{D}$, в достаточно широких условиях является асимптотически экспоненциальной по времени t : $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sim e^{\lambda t} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $t \rightarrow \infty$. Временная постоянная λ является ведущим характеристическим числом соответствующего однородного стационарного кинетического уравнения [1, 2], а $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — стационарная плотность потока (характеристическая функция этого уравнения). Используемые здесь и далее обозначения: $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — полное сечение (коэффициент ослабления); $\sigma = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c$, σ_s — сечение рассеяния, σ_f — сечение деления, σ_c — сечение поглощения; v — число частиц, вылетающих из точки деления; $\mathbf{v} = v\omega$ — вектор скорости, ω — единичный вектор направления, $v = |\mathbf{v}|$; $\mathbf{r}$ — пространственная точка.

С целью построения и исследования алгоритмов метода Монте-Карло далее в качестве соот-

ветствующей (см., например, [2]) математической модели процесса переноса используется однородная обрывающаяся с вероятностью единица цепь Маркова, состояниями которой являются фазовые точки $x_n = (\mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, t_n)$, ($n = 0, 1, \dots, N$) последовательных “столкновений частицы с элементами вещества” (где $\mathbf{r}_n$ — точка n -го столкновения, $\mathbf{v}_n$ — скорость непосредственно перед столкновением, $t_n = t_{n-1} + |\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n|/|\mathbf{v}_n|$), которая определяется плотностью $f(x)$ распределения начального столкновения x_0 и субстохастической плотностью $k(x', x)$ перехода из состояния x' в x [2]. Плотность

столкновений $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ представляет собой ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода $\varphi = K\varphi + f$, $f \equiv \varphi_0$, где K — интегральный оператор с ядром $k(\cdot, \cdot)$ [2]; предполагается, что $\|K\|_{L_1} < 1$.

Используемая обычно в теории переноса интенсивность излучения $\Phi(x)$ (плотность потока частиц) связана с плотностью столкновений соотношением $\varphi(x) = \sigma(x)\Phi(x)$. Методы Монте-Карло, как правило, используются для оценки линейных функционалов вида $J_h = (\varphi, h) = (\sigma\Phi, h)$, $h \in L_\infty$. Для построения весовых алгоритмов используется цепь Маркова с начальной плотностью $f_0(x)$ и плотностью перехода $p(x', x)$. При этом вводятся вспомогательные веса по форму-

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*E-mail: gam@sscc.ru

**E-mail: lot@osmf.sscc.ru

лам $Q_0 = f(x_0)/f_0(x_0)$, $Q_n = Q_{n-1}k(x_{n-1}, x_n)/p(x_{n-1}, x_n)$. Если выполняются “условия несмещенности”

[2], то $J_h = E\xi$, где $\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n)$. Если, кроме того, $\|K_p\| < 1$, где K_p – оператор с ядром $k^2(x', x)/p(x', x)$, и $f^2/f_0 \in L_1(X)$, то $D\xi < +\infty$. Случайная величина ξ называется “оценкой по столкновениям” для функционала J_h . Если все весовые множители меньше единицы, то при $\|K\| < 1$ имеем и $\|K_p\| < 1$. Известно (см., например, [2]) соотношение, состоящее в том, что если в реализуемой вспомогательной модели используется сечение поглощения $\sigma_c + \lambda_0/v$, то текущий вес частицы в момент времени t после реализации столкновения домножается на величину $\exp(\lambda_0 t)$ и, следовательно, к получаемой в результате расчетов оценке значения λ надо добавлять λ_0 .

2. Далее рассматривается односкоростной процесс переноса ($v = \text{const}$) с изотропным рассеянием (в том числе после деления).

Лемма 1. Согласно кинетическому уравнению [2] односкоростной процесс переноса с изотропным рассеянием можно упростить с сохранением потока $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ путем следующей замены параметров:

$$\begin{aligned} \sigma_s, \sigma_c &\mapsto 0, \quad \sigma_f \mapsto \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c, \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v}^* = \frac{\sigma_s + \mathbf{v}\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}. \end{aligned} \quad (1)$$

В упрощенном процессе каждое столкновение – это деление с коэффициентом $\mathbf{v}^*$, а длина свободного пробега распределена с плотностью $p(\ell) = \sigma(r(\ell))\exp(-\tau_{op}(\ell))$, где $\tau_{op}(\ell)$ – оптическая длина пробега [2]. Введя дополнительное искусственное поглощение, согласно замечанию в конце пункта 1, можно перейти к моделированию процесса без размножения.

Предполагается, что $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r})$ – однородное изотропное случайное поле, причем отношения σ_s/σ , σ_f/σ фиксированы. Если $h_0(\mathbf{r}) = I_D(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$, где I_D – индикатор области $\mathbf{D}$, то функционал $J(t, \sigma) = (\Phi, h_0) = \iint \Phi(\mathbf{r}, \omega, t) h_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\omega$ представляет собой полный поток частиц в области $\mathbf{D}$ для заданного момента времени t .

Как и в [3] полагаем, что $J(t, \sigma) \sim \exp^{\lambda(\sigma)t}$ при $t \rightarrow \infty$ для $f_0(t) = \delta(t)$ и $\int_0^\infty f(t)\exp^{-\lambda(\sigma)t} dt < C_0 < +\infty$. Соответственно этому, предполагая гауссовость случайной величины $\lambda(\sigma)$ и равномерность (по σ) предельного перехода $J(t, \sigma) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} C(\sigma)e^{\lambda(\sigma)t}$, мож-

но оценить асимптотику функции $EJ(t, \sigma) = J_t$ при $t \rightarrow \infty$:

$$J_t \approx \frac{C}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2d^2}\right) dx,$$

где $a = E\lambda(\sigma)$, $d^2 = D\lambda(\sigma)$. При этом также предполагается, что множители $C(\sigma)$ и $e^{\lambda(\sigma)t}$ в асимптотике слабо коррелированы и, следовательно, $C \approx EC(\sigma)$. Используя интегральную формулу из [4], далее получаем

$$J_t \approx C \exp\left(\frac{d^2}{2} t^2 + at\right). \quad (2)$$

Следовательно, можно предположить, что

$$\frac{d \ln J_t}{dt} \approx d^2 t + a. \quad (3)$$

Определяемый формулой (2) закон роста среднего числа частиц можно назвать “суперэкспоненциальным”. Отметим, что формулы (2), (3) могут служить основой для численных исследований конкретных вариантов задачи при $t < T < +\infty$ [3].

3. Символом $f_t^{(m)}$ далее обозначается m -кратная производная от функции f по t . Предполагается, что $f(\mathbf{r}, \omega, t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Лемма 2. [3] Пусть точка $(\mathbf{r}_0, \omega_0)$ распределена для $t_0 \equiv 0$ с плотностью $f_0(\mathbf{r}, \omega)$, выполняются условия несмещенности [2],

$$|f_t^{(m)}(\mathbf{r}, \omega, t)/f_0(\mathbf{r}, \omega)| < C_0 < +\infty, \quad \|K_p\| < 1.$$

Тогда выполняется соотношение $J^{(m)}(t) = E\xi_t^{(m)}$, где

$$\begin{aligned} \xi_t^{(m)} &= \sum_{k=0}^{N_c} Q_k h(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) f_t^{(m)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t - t_k) / f_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0), \\ Q_0 &\equiv 1, \end{aligned} \quad (4)$$

причем $D\xi_t^{(m)} < +\infty$, $m = 0, 1, \dots, n$. Справедливо равенство

$$\frac{J'_t}{J_t} = \frac{d \ln J_t}{dt} = \frac{E\xi'_t(\Omega, \sigma)}{E\xi_t(\Omega, \sigma)} \approx \frac{\tilde{J}'_t}{\tilde{J}_t}, \quad (5)$$

где $\tilde{J}'_t$, $\tilde{J}_t$ – соответствующие статистические оценки, получаемые методом двойной рандомизации [3].

Для каждой реализации среды здесь можно строить лишь одну траекторию Ω частицы, используя (5) для $m = 0; 1$.

Отметим, что полная дисперсия оценки $\tilde{J}'_t/\tilde{J}_t$ оценивается сверху стандартным способом с помощью линеаризации дроби (5).

4. Постановка задачи (мотивация работы). Ранее суперэкспоненциальный рост среднего потока был получен авторами для сферически симмет-

ричного случайного поля $\sigma(\mathbf{r})$ [3]. Целью настоящей работы является проведение аналогичного исследования для более реалистичного (см., например, [5]) однородного поля типа случайной мозаики Вороного (см. далее пункт 5). Для повышения эффективности численно-статистических расчетов предложена универсальная корреляционно-сеточная аппроксимация однородного поля с сохранением осредненного по реализациям корреляционного радиуса L , что обеспечивает, как показали расчеты, достаточно точную оценку среднего потока при достаточно малых L . Кроме весьма существенного уменьшения трудоемкости моделирования, такая аппроксимация дает возможность исследовать флуктуации результатов, соответствующие флуктуациям $\sigma(\mathbf{r})$, и выяснить возможность нормализации распределения параметра $\lambda(\sigma)$ при уменьшении корреляционного масштаба среды.

5. Детальные численные исследования (см., например, [6]) показали, что осредненная вероятность прохождения частицы в значительной степени определяется корреляционным радиусом

$$L = \int_0^\infty k(l)dl, \text{ где } k(l) - \text{коэффициент корреляции}$$

между значениями поля $\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r}')$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = l$, и одномерным распределением среды. В связи с этим в настоящей работе для исследования осредненного потока частиц в качестве базового используется имеющее простой геометрический смысл мозаичное поле Вороного. Оно строится на основе пуассоновского точечного потока $\{\mathbf{r}_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ интенсивности λ_p , который определяет разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек, наиболее близких к одной из точек потока (мозаика или диаграмма Вороного). Геометрические свойства такого разбиения детально изучены, например, в [7]. Элементы разбиения являются выпуклыми многогранниками, и $L \approx 0.459\lambda_p^{-1/3}$ [7].

Предлагаемая в настоящей работе корреляционно-сеточная аппроксимация поля $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_h(\mathbf{r})$ строится путем разбиения пространства R^3 на ансамбль $\{S_h\}$ кубиков с ребром h , в каждом из которых значения поля выбираются независимо из одномерного распределения σ (с конечной дисперсией). Соответствующий эффективный корреляционный радиус ℓ_h получается путем осреднения указанного выше коэффициента корреляции $k(\ell)$ по $\mathbf{r} \in S_h$ и случайному направлению $\omega = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, т.е. по формуле

$$\ell_h = \frac{1}{4\pi h^3} \int \int_{S_h} \ell(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} d\omega, \quad (6)$$

где $\ell(\mathbf{r}, \omega)$ – расстояние от $\mathbf{r} \in S_h$ до границы S_h в направлении ω . Ясно, что $L = \ell_h = h\ell_1$ и $h = L/\ell_1$. Расчеты дали значение $\ell_1 = 0.44831$ с точностью, не превосходящей 10^{-5} . Отметим, что трудоемкость (сложность) построения траектории частицы для $\sigma_h(\mathbf{r})$ не зависит от h , что позволяет эффективно оптимизировать сеточную модель по числу M траекторий, моделируемых для каждой реализации $\sigma_h(\mathbf{r})$ в алгоритме двойной рандомизации при $h \rightarrow 0$.

6. Для проведения тестовых расчетов рассматривался односкоростной процесс переноса частиц в шаре радиуса $R = 7.72043$ со случайной плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$ и макроскопическими сечениями $\rho\sigma^{(0)}$, $\rho\sigma_s^{(0)}$, $\rho\sigma_f^{(0)}$, где

$$\sigma^{(0)} = 1, \quad \sigma_s^{(0)} = 0.97, \quad \sigma_f^{(0)} = 0.03, \\ v = 2.5, \quad v = 1.$$

Одномерное распределение поля $\rho(r)$ равномерно на отрезке $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. При $\rho \equiv 1$ шар критичен: $\lambda = 0 \pm 10^{-7}$.

Для построения эффективных алгоритмов метода Монте–Карло в сформулированную модель было введено поглощение с постоянным неслучайным коэффициентом σ_c/v , который приводит к замене $\lambda \mapsto \lambda - \sigma_c/v \forall \sigma(\mathbf{r})$, как указано в конце пункта 1. Отметим, что такой прием является универсальным и может существенно повысить эффективность весового метода, исключая необходимость ветвления моделируемых траекторий.

На основе формулы (1) было использовано осреднение, состоящее в том, что моделировался процесс с константами $\sigma_s^* = 0$, $\sigma_f^* = \rho\sigma_s + \rho\sigma_f + \sigma_c$, $v^* = 1$, а вес в каждой точке столкновения домножался на величину

$$q^*(\rho) = \frac{\sigma_s + v\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/\rho} \leq \frac{\sigma_s + v\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/(1 + \varepsilon)} = 1$$

при $\sigma_c = \sigma_f(v - 1)(1 + \varepsilon)$.

В расчетах, как и в [3], был использован метод максимального сечения (см., например, [2]) с $\sigma_{\max} = 1 + \varepsilon$. Для уменьшения дисперсии оценок, основанных на соотношении (5), значения ξ_i и ξ'_i вычислялись для всех столкновений, включая “дельта-рассеяние”, в отличие от работы [3], где они вычислялись только для “физических” столкновений.

Плотность распределения первых столкновений была взята в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = 4t \exp(-2t)g(\mathbf{r}), \quad t > 0, \quad r = |\mathbf{r}| < R, \quad (7)$$

где $g(\mathbf{r}) = C \sin(\alpha(1)r)/r$ – улучшенное диффузионное приближение к пространственной характе-

Таблица 1. Значения $\tilde{J}_t \exp(-\sigma_c t) \pm \delta$ при $N_s = 4 \times 10^9$, $L = 2.186$

t	Поле Вороного	Сеточная аппроксимация
1	0.124241 ± 0.000002	0.124242 ± 0.000002
5	0.173513 ± 0.000002	0.173495 ± 0.000002
10	0.129121 ± 0.000002	0.129093 ± 0.000002
15	0.096155 ± 0.000002	0.096152 ± 0.000002
20	0.071678 ± 0.000002	0.071699 ± 0.000002

ристической функции для $\sigma = 1$, $\alpha(1) = 0.3739866$ [8]. В (4) полагали также $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h_1(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$, где $h_1(\mathbf{r}) = \sin(\alpha(1)r)/r$, причем (см. [8]) $\alpha(\rho) = (\pi(\sigma_s + v\sigma_f)\rho)/(R(\sigma_s + v\sigma_f) + 0.71044)$. При этом $J_t^{(m)} = (\Phi, h_1 f_t^{(m)}/f_0)$, т.е. вычисляются функционалы от потока частиц. Расчеты показали, что использование таких функциональных параметров алгоритма существенно улучшает важную здесь сходимость $J_t'(\rho)/J_t(\rho) \rightarrow \lambda$ при $t \rightarrow \infty$, $\forall \rho$, сравнительно с вариантом, в котором $f(\mathbf{r}, t)$ определяется формулой (7), а $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv 1$. Отметим, что формула (6) для сеточной мозаики дает значения $L = \ell_{4.8762} = 2.186$ при $h = 4.8762$.

Базовый пуассоновский точечный поток для поля Вороного строился в шаре радиуса $R_1 = 10 \approx R + L$. Проведенные в [6] модельные расчеты показывают, что такое ограничение потока может обеспечить достаточно высокую точность оценки средней вероятности вылета частицы, которая играет определенную роль в рассматриваемой задаче.

В сеточной модели трудоемкость построения конкретной траектории частицы существенно меньше трудоемкости реализации поля $\sigma_h(\mathbf{r})$, т.к. не требуется “перебор” по $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ для определения $\sigma_h(\mathbf{r})$.

В табл. 1 приведены оценки функции $J_t \exp(-\sigma_c t)$ и соответствующие значения средне-квадратических погрешностей δ для поля Вороного (при $m = 0$) и сеточной аппроксимации (при $M=1 \approx M_{\text{опт}}$). Здесь N_s – число траекторий.

Для двух вариантов поля – сеточного и Вороного – при $L = 2.186$ были вычислены оценки функции J_t'/J_t в точках $t = 1, \dots, 10, \dots, 20$, приведенные на графиках рис. 1, причем доверительные интервалы имеют ширину $\pm \tilde{\sigma}_t = \pm \sqrt{\tilde{D}(J_t'/J_t)/N}$, почти точно совпадающую с размерами значков узловых значений. Затем на основе линейной регрессионной аппроксимации (при $15 \leq t \leq 20$) были получены оценки коэффициентов d^2 , a (см. табл. 2).

Таким образом можно констатировать, что в решаемой задаче результаты, полученные на основе поля Вороного и соответствующей сеточной аппроксимации, практически совпадают. Трудоемкость при переходе к оптимальной аппроксимации сокращается примерно в 2 раза.

Расхождение оценок можно, в частности, объяснить ограничением области моделирования вспомогательного точечного потока, хотя значение L вычисляется без этого ограничения.

7. Остановимся теперь вкратце на возможности обоснования предельного гауссовского распределения величины λ для сеточной модели поля σ в рассматриваемой задаче. Обозначим через

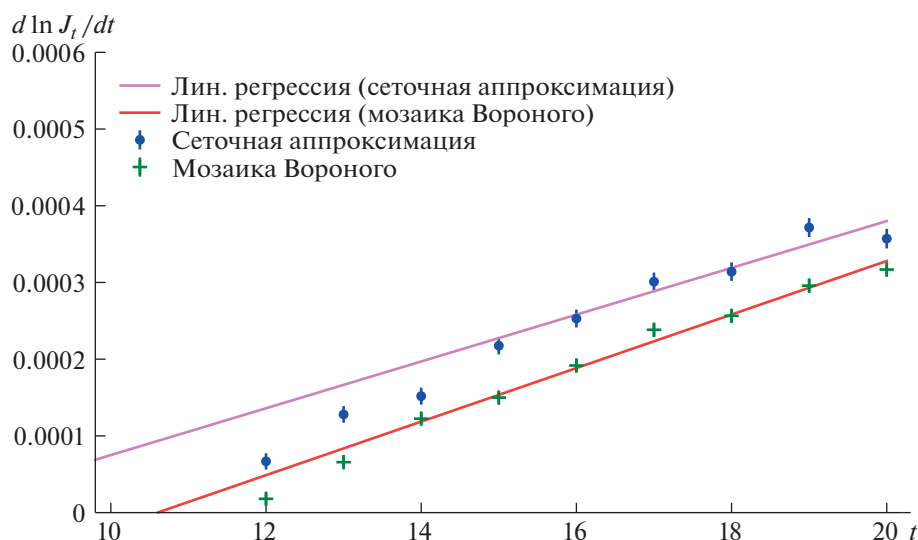


Рис. 1. Оценки логарифмической производной и регрессионная аппроксимация.

$N = N_h$ число элементов сетки (кубиков), полностью или частично принадлежащих области $\mathbf{D}$ объема V . Предполагается, что при $h \rightarrow 0$ выполняется соотношение (в частности, для куба, цилиндра, шара)

$$N_h = n_h + o(n_h), \quad (8)$$

где n_h – размер вписанной в $\mathbf{D}$ части сетки. Рассмотрим равенство $\lambda = \lambda_N(\tau_1, \dots, \tau_N)$, причем $\tau_i = v_i(\sigma_{h,i} - 1)$, где v_i – “действующий” объем в $\mathbf{D}$ сеточного элемента (в основном, вследствие (8) $v_i = h^3 \sim V/n_h$), а $\sigma_{h,i}$ – независимые значения поля $\sigma(\mathbf{r})$, равномерно распределенные в $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, причем $D\tau_i \sim (1/3)\epsilon^2 V^2/n_h^2$.

Далее предполагается, что

$$\left| \frac{\partial^2 \lambda_N}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right| \leq C_1 < +\infty; \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Формула Тейлора 2-го порядка с малыми приращениями $\tau_i = \tau/N$, $i = 1, \dots, N$, дает соотношение

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} \sim \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \lambda_N}{\partial \tau_i},$$

которое позволяет сделать предположение (фактически численно проверенное, как и (9), для тестового шара [3]) о том, что

$$0 < C_0^{(1)} < \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_i} < C_0^{(2)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Используя полученные соотношения на основе формулы Тейлора 2-го порядка, получаем следующее асимптотическое представление

$$\lambda \sim C \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^N \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i)}{\sqrt{D \left(\sum_{i=1}^N \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i) \right)}} + \frac{\sqrt{n}}{2C \epsilon_{i,j=1}^N} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \tau_i \tau_j \right) =$$

$$= C \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} (\xi_N + \eta_N),$$

причем $D \left(\sum_{i=1}^N \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i) \right) \sim C^2 \epsilon^2 / n$, $|\eta_N| \leq C_1 V^2 \epsilon \sqrt{n} / (2C)$. Отсюда, используя метод характеристических функций и выполнение $\forall \epsilon \in (0, 1)$ условий Линдеберга ([9], глава 3, параграф 4, (с)) для $\sum_{i=1}^N n \tau_i (\partial \lambda_N / \partial \tau_i)$ вследствие ограниченности величин $n \tau_i$, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняются соотношения (9), (10) и $\lambda_N(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad \forall N$. Тогда, если $n =$

Таблица 2. Регрессионные оценки коэффициентов a и d^2

t	Сеточная аппроксимация	Поле Вороного $L = 2.186$
$\tilde{a} \times 10^5$	-23 ± 5.0	-37 ± 5.0
$\tilde{d}^2 \times 10^5$	3.0 ± 0.3	3.5 ± 0.2

$= n_h \rightarrow \infty$, $a \epsilon \sqrt{n} \rightarrow 0$, то величина $\frac{\sqrt{n}}{\epsilon} C^{-1} \lambda$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Отметим, что использование формулы Тейлора более высокого порядка при условии равномерной ограниченности соответствующих производных сохраняет утверждение Теоремы 1, так как дополнительные слагаемые в асимптотике оцениваются степенями величины ϵ .

Напомним, что $h = L/\ell_1$ и, следовательно, $n \sim V/h^3 = (V\ell_1/L)^3$.

Интересно отметить, что Теорема 1 согласуется с результатами работы [5], в которой нормализация распределения λ была получена на основе экспериментов для малой величины типа $D\tau$. Фактически это же показали расчеты для модельной сферически слоистой мозаики [3].

В заключение отметим, что разработанная методика может быть использована для исследования потока частиц любого типа. В частности, в [3] путем исследования мировой статистики ВОЗ для COVID-19 был выявлен интервал значимого суперэкспоненциального роста числа зараженных индивидуумов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2022-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960, 514 с.
2. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
3. Лотова Г.З., Михайлов Г.А. Численно-статистическое и аналитическое исследование асимптотики среднего потока частиц с размножением в случайной среде. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. V. 61. № 8. Р. 1353–1362. <https://doi.org/10.31857/S0044466921060077>
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

5. *Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A.* Neutron multiplication in random media: Reactivity and kinetics parameters // *Annals of Nuclear Energy*. 2018. V. 111. P. 391–406.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2017.09.006>
6. *Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.* Solution of radiative transfer theory problems for ‘realistic’ models of random media using the Monte Carlo method // *Rus. J. Num. Anal. Math. Model.* 2016. V. 31. № 3. P. 1–10.
<https://doi.org/10.1515/rnam-2016-0013>
7. *Gilbert E.N.* Random subdivisions of space into crystals // *Ann. Math. Statist.* 1962. № 33. P. 958–972.
<https://doi.org/10.1214/aoms/1177704464>
8. *Романов Ю.А.* Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // *Исследование критических параметров реакторных систем*. М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.
9. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 575 с.

NUMERICAL-STATISTICAL INVESTIGATION OF SUPEREXPONENTIAL GROWTH OF THE MEAN PARTICLE FLUX WITH MULTIPLICATION IN A HOMOGENEOUS RANDOM MEDIUM

G. A. Mikhailov^{a,b} and G. Z. Lotova^{a,b}

^a*Institute of computational mathematics and mathematical geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation*

^b*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

The new correlative-grid approximation of a homogeneous random field is introduced for the effective numerically-analytical investigation of the superexponential growth of the mean particles flux with multiplication in a random medium. A complexity of particle trajectory realization is not dependent on the correlation scale. The test computations for a critical ball with isotropic scattering showed high accuracy of the corresponding mean flux estimates. For the correlative-grid approximation the possibility of Gaussian asymptotics of the mean particles multiplication rate when the correlation scale decreases is justified.

Keywords: numerical statistical simulation, particles flux, superexponential asymptotics, random medium, the Voronoi mosaic, grid approximation

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РИССА ДРОБНОГО ПОРЯДКА, МЕНЬШЕГО ЕДИНИЦЫ, ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

© 2023 г. А. О. Леонтьева^{1,*}

Представлено академиком В.И. Бердышевым

Поступило 01.07.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

Рассматривается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ целых функций экспоненциального типа в равномерной норме на вещественной оси. Для этого оператора получена соответствующая интерполяционная формула; она имеет неравномерные узлы. При помощи этой формулы при всех $0 < \alpha < 1$ найдено точное неравенство Бернштейна, а именно, выписаны экстремальная целая функция и точная константа.

Ключевые слова: целые функции экспоненциального типа, производная Рисса, неравенство Бернштейна, равномерная норма, функции Бесселя

DOI: 10.31857/S2686954323600611, **EDN:** CZIEUW

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСТОРИЯ

Неравенства Бернштейна для производных целого и дробного порядка тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа играют важную роль в теории приближения функций. Обзор результатов по этой тематике можно найти, например, в статьях [1–3]. В данной статье обсуждается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ на классе С.Н. Бернштейна $\mathbf{B}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на вещественной оси. Исторические сведения и подробную информацию о дробных интегралах и производных Рисса можно найти в [4, гл. 25, 26].

Нас будет интересовать производная Рисса для целых функций одной переменной из класса $\mathbf{B}_\sigma$. Этот класс содержит подкласс $\mathbf{V}_\sigma \subset \mathbf{B}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа, представимых в виде

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iz} ds(t),$$

где s — комплекснозначная функция ограниченной вариации. На функциях класса $\mathbf{V}_\sigma$ производная Рисса порядка $\alpha > 0$ определяется при помощи множителя Фурье $|t|^\alpha$:

$$D^\alpha f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e^{itz} ds(t). \quad (1)$$

Таким определением пользовались, в частности, П. Сайвин [5] и П.И. Лизоркин [6].

Из (1) видно, что производную Рисса в одномерном случае можно считать дробной степенью второй производной: $D^\alpha = (-D^2)^{\alpha/2}$. Для $m \in \mathbb{N}$ при $\alpha = 2m$ она превращается в классическую производную порядка $2m$: $D^{2m} f = (-1)^m f^{(2m)}$. При $\alpha = 2m - 1$ получается производная порядка $2m - 1$ сопряженной функции: $D^{2m-1} f = (-1)^{m-1} \widetilde{f^{(2m-1)}} = (-1)^{m-1} \widetilde{f^{(2m-1)}}$.

Для целого неотрицательного $\sigma = n$ класс $\mathbf{V}_\sigma$ содержит пространство $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка n с комплексными коэффициентами. Для них, согласно (1), производная Рисса задается при помощи множителя Фурье $|k|^\alpha$:

$$D^\alpha f_n(x) = \sum_{k=-n}^n |k|^\alpha c_k e^{ikx}, \quad f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

¹Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*E-mail: lao-imm@yandex.ru

Для $0 < \alpha < 1$ определение (1) равносильно определению при помощи сингулярного интеграла

$$D^\alpha f(x) = C(\alpha) \int_0^\infty \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^{\alpha+1}} dy, \quad (2)$$

$$0 < \alpha < 1; \quad C(\alpha) = -\frac{\Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}.$$

Интеграл (2) был введен Е.М. Стейном [7] при $0 < \alpha < 2$ в связи с изучением потенциала Рисса в многомерном случае. П.И. Лизоркин [8] и С.Г. Самко [9] изучали представление дробных производных в виде сингулярных интегралов для произвольного $\alpha > 0$ в связи с исследованием потенциала Рисса. Будем считать, что производная Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ определяется при помощи формулы (2).

В данной статье нас будет интересовать точное неравенство Бернштейна для производной Рисса целых функций из $\mathbf{B}_\sigma$:

$$\|D^\alpha f\| \leq \mathcal{B}_\sigma(\alpha) \|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad (3)$$

в равномерной норме $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in (-\infty, \infty)\}$ на числовой оси.

Неравенство (3) хорошо изучено при $\alpha \geq 1$. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема А. Для производной Рисса порядка $\alpha > 0$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ имеет место интерполяционная формула по равномерным узлам

$$D^\alpha f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mu_\ell(\alpha) f\left(x + \frac{\pi\ell}{\sigma}\right) \quad (4)$$

со свойствами коэффициентов

$$1. (-1)^\ell \mu_\ell(\alpha) \geq 0, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \geq 1,$$

$$2. \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell \mu_\ell(\alpha) = \sigma^\alpha.$$

Как следствие, справедлива

Теорема В. При $\alpha \geq 1$ выполняется точное неравенство Бернштейна

$$\|D^\alpha f\| \leq \sigma^\alpha \|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad (5)$$

на функции $f(x) = a \cos \sigma x$ оно обращается в равенство.

Н.И. Ахиезер [10] в случае $\alpha = 1$ явно нашел формулу (4) и, как следствие, из нее получил неравенство (5) с константой σ . П. Сайвин [5] показал, что для широкого класса операторов, действующих на множестве $\mathbf{V}_\sigma$, в частности, для производной Рисса, возможно представление вида

(4). Из его результатов следует, что коэффициенты формулы (4) для производной Рисса порядка $\alpha > 0$ с точностью до множителя являются коэффициентами Фурье функции, равной $|t|^\alpha$ при $|t| \leq \pi$ и 2π -периодически продолженной на всю ось. П.И. Лизоркин [6] установил их знакопеременность при $\alpha \geq 1$. Пользуясь этим, он обосновал неравенство (5) для всех $\alpha \geq 1$ на множестве $\mathbf{B}_\sigma$.

Неравенство (5) выполняется с константой σ^α также в пространствах L_p , $1 \leq p < \infty$, как для полиномов, так и для целых функций. В этом можно убедиться, применив неравенство треугольника к (4). Кроме того, в L_p , $1 \leq p < \infty$, константа σ^α является точной. В случае тригонометрических полиномов оценку снизу дает полином e^{int} . В случае целых функций это доказал П.И. Лизоркин [6], построив последовательность целых функций из $L_p(\mathbb{R})$, сходящуюся к $\cos \sigma x$. Более того, он показал, что неравенство с константой σ^α при $1 \leq p < \infty$ точное, но не обращается в равенство ни на какой функции.

В 1935 г. Г.Т. Соколов [11] исследовал поставленную С.Н. Бернштейном задачу о нахождении точной константы $B_n(\alpha)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha f_n\| \leq B_n(\alpha) \|f_n\|, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad \alpha \geq 0. \quad (6)$$

Он установил неравенство (6) для полиномов из $\mathcal{T}_n$ с константой n^α при $\alpha \geq 1$. При $\alpha = 1$ такой результат содержится в более ранней работе Г. Сеге [12]. А.И. Козко [13] явно нашел коэффициенты интерполяционной формулы для производных Вейля–Сеге, в частности, для производной Рисса порядка α тригонометрических полиномов. На этом пути он установил справедливость неравенства (6) с константой n^α в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, для $\alpha \geq 1$.

Случай $0 < \alpha < 1$ представляется малоизученным. В 1935 г. Г.Т. Соколов [11] показал, что при $n = 2$ для $0 < \alpha < 1$ справедливо строгое неравенство $B_2(\alpha) > 2^\alpha$. А.И. Козко [13], обобщил этот результат на все четные n . В.В. Арестов и П.Ю. Глазырина [14], доказали, что $B_n(\alpha) > n^\alpha$ для $0 < \alpha < 1$ при всех $n \geq 2$.

Теорема С. При $0 < \alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\|D^\alpha f\| \leq \frac{2\sigma^\alpha}{\alpha+1} \|f\|, \quad f \in \mathbf{V}_\sigma. \quad (7)$$

Это неравенство получил Г.Т. Соколов [11] на множестве $\mathcal{T}_n$. Он исходил из интерполяционной формулы по равномерным узлам и определял знаки ее коэффициентов, пользуясь выпуклостью вверх функции t^α при $0 < \alpha < 1$. П. Сайвин [5] аналогичными методами перенес неравенство (7) на функции из класса V_σ .

В работе автора [15] рассматривалось неравенство

$$\|D^\alpha f_n\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq B_n(\alpha)_p \|f_n\|_{L_p(\mathbb{T})}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad \alpha \geq 0,$$

в пространствах L_p , $0 \leq p \leq \infty$, на периоде. Было доказано, что $B_n(\alpha)_p = n^\alpha$ при всех $0 \leq p \leq \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \{2, 4, 6, \dots\} \cup [2n - 2, \infty)$.

2. НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СЛУЧАЯ $0 < \alpha < 1$

Для формулировки результата нам понадобятся некоторые свойства нормированных функций Бесселя $j_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(z)/z^\nu$. Это четные целые функции экспоненциального типа 1. Подробную информацию о них можно найти в книгах [16] и [17, гл. 5, § 23]. Важно, что при $\nu > -1$ функция j_ν имеет счетное множество нулей, все нули вещественные, простые и множество нулей не имеет конечных предельных точек. Обозначим через $\{\lambda_k(\nu)\}_{k=1}^\infty$ положительные нули функции j_ν , занумерованные в порядке возрастания. В случае $\nu = -\alpha/2$ для нулей функции $j_{-\alpha/2}$ ниже используется обозначение $\lambda_k = \lambda_k(-\alpha/2)$. Наконец, обозначим $x_k = 2\lambda_k$ — положительные нули функции $j_{-\alpha/2}(x/2)$.

Теорема 1. При $\sigma > 0$ для производной Рисса порядка α , $0 < \alpha < 1$, на множестве функций $f \in \mathbf{B}_\sigma$ верна интерполяционная формула

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)(x) &= \sigma^\alpha \kappa(\alpha) \times \\ &\times \sum_{k=1}^\infty j_{\alpha/2}^2(\lambda_k) \left[f\left(x + \frac{x_k}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{x_k}{\sigma}\right) \right], \\ \kappa(\alpha) &= -\frac{\pi \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2\alpha+1} \sin \frac{\pi \alpha}{2} \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}; \\ x_k &= 2\lambda_k = 2\lambda_k\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

При помощи теоремы 1 доказывается основной результат данной статьи.

Теорема 2. При $\sigma > 0$, $0 < \alpha < 1$ справедливы следующие утверждения.

1. Экстремальной в неравенстве (3) является функция $f_\alpha^*(\sigma x)$, где

$$f_\alpha^*(x) = 1 - 2j_{-\alpha/2}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. Точная константа $\mathcal{B}_\sigma(\alpha)$ в неравенстве (3) равна

$$\mathcal{B}_\sigma(\alpha) = \sigma^\alpha \mathcal{B}(\alpha) = \sigma^\alpha \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}}.$$

3. Для величины $\mathcal{B}(\alpha)$ справедливо строгое неравенство

$$\mathcal{B}(\alpha) < \frac{2}{\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

кроме того, она монотонно убывает от 2 до 1, когда α возрастает от 0 до 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Для обоснования теоремы 1 использовалась

Теорема D (К. Фраппе, П. Оливье Olivier-1993, Г.Р. Грозев, К.И. Рахман Rahman-1995). Пусть $\nu > -1$, $\{\lambda_k(\nu)\}_{k=1}^\infty$ — положительные нули функции j_ν , расположенные в порядке возрастания. Тогда для любой четной целой функции типа не выше 2τ , удовлетворяющей условию $x^{2\nu+1}f(x) \in L(0, \infty)$, справедлива квадратурная формула

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2\nu+1} f(x) dx &= \frac{2}{\tau^{2\nu+2}} \sum_{k=1}^\infty A_k(\nu) f\left(\frac{\lambda_k(\nu)}{\tau}\right); \\ A_k(\nu) &= \frac{(\lambda_k(\nu))^{2\nu}}{(J'_\nu(\lambda_k(\nu)))^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом ряд в правой части (8) сходится абсолютно.

Представим производную Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ в точке $x \in \mathbb{R}$ при помощи интегральной формулы (2) и применим квадратурную формулу (8) к четной целой функции

$$g(y) = \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^2}$$

при $2\nu + 1 = 1 - \alpha$, или $\nu = -\alpha/2$. Свойство $g(y)y^{2\nu+1} = g(y)y^{1-\alpha} \in L(0, \infty)$ при $0 < \alpha < 1$, очевидно, выполняется. Экспоненциальный тип функ-

ции g не выше $2\tau = \sigma$. Наконец, с помощью соответствующих свойств функций Бесселя осуществляется преобразование коэффициентов полученной формулы.

Замечание. Квадратурные формулы по нулям функций Бесселя успешно использовал Д.В. Горбачев [20, 21] для решения многомерных экстремальных задач для целых функций экспоненциального сферического типа, а также экстремальных задач для целых функций на полуоси со степенным весом.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.В. Арестову за постоянное внимание к работе автора и полезное обсуждение данной тематики.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00526, <https://rscf.ru/project/22-21-00526/>) в Уральском федеральном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев Д.В. Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 5. С. 58—110. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110>
2. Арестов В.В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 3—22.
3. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Неравенство Бернштейна — Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 17—31.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.
5. Civin P. Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. V. 8. № 4. P. 656—665. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00855-4>
6. Лизоркин П.И. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 4. № 3. С. 109—126.
7. Stein E.M. A characterization of functions arising as potentials. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. № 1. P. 102—104.
8. Лизоркин П.И. Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Матем. сб. 1970. Т. 81(123). № 1. С. 79—91.
9. Самко С.Г. О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 5. С. 1143—1172.
10. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Физматлит, 1965.
11. Соколов Г.Т. О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. Т. 6—7. С. 857—884.
12. Szegő G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. V. 5. № 4. P. 59—70.
13. Kozko A.I. The exact constants in the Bernstein—Zygmund—Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson—Nikol'skii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. V. 4. № 3. P. 391—416.
14. Arstov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. V. 164. № 11. P. 1501—1512. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.08.004>
15. Леонтьева А.О. Неравенство Бернштейна—Сеге для производной Рисса тригонометрических полиномов в пространствах L_p , $0 \leq p \leq \infty$, с классическим значением точной константы // Матем. сборник. 2023. Т. 214. № 3. С. 135—152. <https://doi.org/10.4213/sm9822>
16. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ. 1949.
17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
18. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. of Computation. 1993. V. 60. № 201. P. 303—316. <https://doi.org/10.2307/2153168>
19. Grozev G.R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. of Computation. 1995. V. 64. № 210. P. 715—725. <https://doi.org/10.2307/2153447>
20. Горбачев Д.В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 179—187. <https://doi.org/10.4213/mzm936>
21. Горбачев Д.В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 346—352. <https://doi.org/10.4213/mzm508>

BERNSTEIN INEQUALITY FOR RIESZ DERIVATIVE OF FRACTIONAL ORDER LESS THAN 1 OF ENTIRE FUNCTION OF EXPONENTIAL TYPE

A. O. Leont'eva^a

^a*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdyshev

We consider Bernstein inequality for the Riesz derivative of order $0 < \alpha < 1$ of entire functions of exponential type in the uniform norm on the real line. The interpolation formula for this operator is obtained; this formula has non-equidistant nodes. By means of this formula, the sharp Bernstein inequality is obtained for all $0 < \alpha < 1$, more precisely, the extremal entire function and the exact constant are written out.

Keywords: entire functions of exponential type, Riesz derivative, Bernstein inequality, uniform norm, Bessel functions

УДК 510.64

ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ЭРБРАНА И ХАРРОПА ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ ЛОГИКИ ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ QHC

© 2023 г. А. А. Оноприенко^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 27.11.2023 г.

После доработки 07.12.2023 г.

Принято к публикации 07.12.2023 г.

В данной заметке доказаны аналоги теорем Эрбрана и Харропа для логики QHC.

Ключевые слова: неклассические логики, логика задач и высказываний, дизъюнктивное свойство, экзистенциальное свойство, теорема Эрбрана, теорема Харропа

DOI: 10.31857/S2686954323602324, **EDN:** WMAEPN

1. ВВЕДЕНИЕ

Совместная логика задач и высказываний QHC, рассматриваемая в настоящей работе, введена С.А. Мелиховым [1, 2]. В этой логике каждая переменная и каждая формула имеет один из двух сортов: либо высказывание, либо задача. Формулы сорта высказывание и сорта задача связаны между собой двумя модальностями ? и !. Применяя ! к высказыванию p , мы получим задачу $!p$, которую можно неформально понимать как “доказать высказывание p ”. Применяя ? к задаче α , мы получим высказывание $?\alpha$, которое можно неформально понимать как “задача α имеет решение”. Создание и изучение системы QHC мотивированы неформальным исчислением задач А.Н. Колмогорова и лежат в русле исследований конструктивной семантики Брауэра–Гейтинга–Колмогорова, см., например, [3–6].

Ранее мы установили, что для интуиционистского фрагмента совместной логики задач и высказываний QHC выполнены дизъюнктивное и экзистенциальное свойства [7]. В данной заметке доказаны аналоги теорем Эрбрана и Харропа для логики QHC.

Приведем определение логики QHC, подробно изложенное в [1] и [7]. Язык Ω логики QHC состоит из множества индивидуальных переменных $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, множества константных символов $\{c_i | i \in \mathbb{C}\}$ и двух множеств предикатных символов: сорта высказывание $\{P_i | i \in \mathcal{P}\}$ и сорта задача

$\{\Phi_i | i \in \mathcal{T}\}$ ($\mathbb{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ – некоторые индексные множества). Множество термов логики QHC состоит из переменных $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ и констант $\{c_i | i \in \mathbb{C}\}$. Каждому предикатному символу приписано натуральное число, обозначающее его валентность. Формулы логики QHC сорта высказывание (задача) будем обозначать строчными латинскими (греческими) буквами.

Формула логики QHC определяется следующим образом.

1. Если P (Φ) – предикатный символ сорта высказывание (задача) валентности n , $t_1, \dots, t_n$ – термы, то $P(t_1, \dots, t_n)$ ($\Phi(t_1, \dots, t_n)$) – формула сорта высказывание (задача). Такие формулы называются атомарными.

2. 0 – формула сорта высказывание, $\perp$ – формула сорта задача. (0 и $\perp$ соответствуют классической и интуиционистской лжи.)

3. Если p, q – формулы сорта высказывание, то $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $\exists x p$, $\forall x p$ – формулы сорта высказывание.

4. Если α, β – формулы сорта задача, то $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\exists x \alpha$, $\forall x \alpha$ – формулы сорта задача.

5. Если p – формула сорта высказывание, то $!p$ – формула сорта задача.

6. Если α – формула сорта задача, то $?\alpha$ – формула сорта высказывание.

Схемы аксиом и правила вывода логики QHC следующие. В схемы аксиом вместо переменных по формулам можно подставлять любые формулы соответствующего сорта.

I. Все схемы аксиом и правила вывода классической логики предикатов (в схемах аксиом

¹Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: ansidiana@yandex.ru

участвуют переменные по формулам сорта высказывание).

II. Все схемы аксиом и правила вывода интуиционистской логики предикатов (в схемах аксиом участвуют переменные по формулам сорта задача).

III. Дополнительные схемы аксиом и правила вывода, перечисленные ниже.

1. $!(p \rightarrow q) \rightarrow (!p \rightarrow !q)$;
2. $?(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (? \alpha \rightarrow ? \beta)$;
3. $\frac{p}{!p}$;
4. $\frac{\alpha}{? \alpha}$;
5. $? !p \rightarrow p$;
6. $\alpha \rightarrow ! ? \alpha$;
7. $\neg ! 0$.

Как доказано в [7], логика QHC полна относительно семантики типа Крипке с отмеченными мирами. Приведем определение шкалы и модели Крипке логики QHC.

Определение. Пусть Ω — язык логики QHC. Шкала Крипке этого языка — это набор $(W, \preceq, \text{Aud})$, где $(W, \preceq)$ — непустое частично упорядоченное множество возможных миров, $\text{Aud} \subseteq W$ — множество отмеченных миров, и выполнено условие $\forall a \in W \exists b \in W (a \preceq b \wedge b \in \text{Aud})$. Моделью Крипке логики QHC называется пятерка $\mathcal{H} = (W, \preceq, \text{Aud}, D, \models)$, где $(W, \preceq, \text{Aud})$ — шкала Крипке, D — функция, которая каждому $a \in W$ сопоставляет непустое множество D_a . Расширим язык Ω множеством константных символов для обозначения всех элементов $\bigcup_{a \in W} D_a$ (будем отождествлять эти константные символы и элементы $\bigcup_{a \in W} D_a$). Обозначим этот расширенный язык через $\Omega(D)$. $\models$ — соответствие между мирами (отмеченными мирами) $a \in W$ и замкнутыми атомарными формулами сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(D)$. При этом выполнены следующие условия:

1. если $a \preceq b$, то $D_a \subseteq D_b$;
2. если язык Ω содержит константу c , то она принадлежит любому D_a для $a \in W$;
3. если $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ — атомарная формула сорта задача, $z_1, \dots, z_n \in D_a$, $a \models \Phi(z_1, \dots, z_n)$ и $a \preceq b$, то $b \models \Phi(z_1, \dots, z_n)$ (монотонность);
4. если $a \models A(z_1, \dots, z_n)$, то $\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq D_a$ (здесь A — некоторый предикатный символ валентности n сорта высказывание или сорта задача языка Ω).

Соответствие $\models$ между мирами множества W и замкнутыми атомарными формулами в соответствующем языке продолжается индукцией по построению формулы до соответствия между мирами и всеми замкнутыми формулами в этом языке. Для любого мира $a \in W$ ($a \in \text{Aud}$) полагаем $a \not\models \perp$ ($a \not\models 0$). Индуктивный переход для классических связок и кванторов определяется поточечно в мирах множества Aud . Индуктивный переход для интуиционистских связок и кванторов определяется в мирах множества W как в шкалах Крипке интуиционистской логики (см., например, [8]). Индуктивный переход для модальностей определяется следующим образом:

$$a \models ? \alpha \Leftrightarrow a \models \alpha \quad (\text{для } a \in \text{Aud})$$

$$a \models ! p \Leftrightarrow \forall b \in \text{Aud} (a \preceq b \Rightarrow b \models p) \quad (\text{для } a \in W).$$

Если $w \models A$, то будем говорить, что формула A истинна в мире w . Будем говорить, что формула сорта задача (высказывание) истинна в модели Крипке языка Ω , если она истинна в любом мире (отмеченном мире) этой модели Крипке.

Определение 2. Теорией в логике QHC называется множество Γ замкнутых формул, содержащее все теоремы логики QHC и замкнутое относительно всех правил вывода логики QHC, кроме, возможно, правила усиления $\frac{p}{!p}$. Теория *непротиворечива*, если она не содержит константы 0.

Замыканием $[\Gamma]$ множества замкнутых формул Γ называется наименьшая по включению теория, содержащая множество Γ . Множество Γ *непротиворечиво*, если теория $[\Gamma]$ непротиворечива.

В [7] была доказана следующая теорема о полноте.

Теорема 1. 1) Если замкнутая формула языка Ω выводима в логике QHC, то она истинна в любой модели Крипке для языка Ω .

2) Для любого непротиворечивого множества замкнутых формул Γ логики QHC существуют модель Крипке $\mathcal{H}$ и ее отмеченный мир такие, что в этом мире модели $\mathcal{H}$ истинны все формулы из Γ .

Как показано в [7], логика QHC является консервативным расширением интуиционистской логики предикатов, и для ее интуиционистской части выполнены следующие дизъюнктивное и экзистенциальное свойства.

Теорема 2. 1) Пусть $\text{QHC} \vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $\text{QHC} \vdash \alpha$ или $\text{QHC} \vdash \beta$.

2) Пусть язык Ω содержит хотя бы одну константу и $\text{QHC} \vdash \exists x \alpha$. Тогда для некоторой константы c выполнено $\text{QHC} \vdash \alpha[c/x]$.

Эти свойства, рассматриваемые для интуиционистской логики предикатов, могут быть уточнены. Для классической логики предикатов име-

ет место теорема Эрбрана, которая в некотором смысле является уточнением экзистенциального свойства (см., например, [9]). Кроме того, можно рассматривать вывод из гипотез в интуиционистской логике. Если ввести некоторые ограничения на множество гипотез (они должны быть так называемыми харроповыми формулами), то возможно доказать усиления дизъюнктивного и экзистенциального свойств в интуиционистской логике — теорему Харропа (см., например, [10]). Поскольку логика QHC является расширением как классической, так и интуиционистской логики предикатов, в ней оказывается возможным установить аналогии этих результатов. Соответствующие результаты мы подробно излагаем далее.

2. АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ЭРБРАНА ДЛЯ ЛОГИКИ QHC

Для удобства читателя приведем формулировку теоремы Эрбрана для классической логики предикатов в языке без функциональных символов.

Теорема 3. Пусть формула $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$ выводима в классической логике предикатов, где φ — бескванторная формула. Тогда существует конечное множество констант $c_{1,1}, \dots, c_{n,m}$, что в классической логике предикатов выводима формула $\varphi[c_{1,1}/x_1, \dots, c_{n,1}/x_n] \vee \dots \vee \varphi[c_{1,m}/x_1, \dots, c_{n,m}/x_n]$.

Логика QHC является консервативным расширением классической логики предикатов, поэтому для нее автоматически выполнена теорема 3, где φ — бескванторная формула сорта высказывание без модальностей. Мы докажем аналогии теоремы 3 для логики QHC, в которых будет рассматриваться более широкий класс формул. Неформально, сначала в формуле идут кванторы существования и модальности, а после них — бескванторная часть. Формальное определение дано ниже.

Определение 3. Определим класс формул Ex_{Prop} — экзистенциальные формулы, основанные на формуле сорта высказывание, как минимальный класс, удовлетворяющий следующим условиям:

- бескванторные формулы сорта высказывание лежат в Ex_{Prop} ;
- если $p \in Ex_{Prop}$, то $\exists x p \in Ex_{Prop}$;
- если $\alpha \in Ex_{Prop}$, то $? \alpha \in Ex_{Prop}$ и $\exists x \alpha \in Ex_{Prop}$;
- если $\exists x p \in Ex_{Prop}$, то $! \exists x p \in Ex_{Prop}$.

Иными словами, экзистенциальные формулы, основанные на формуле сорта высказывание p , определены так: сначала идет приставка из кванторов существования и модальностей, а после последнего квантора существования — бесквантор-

ная формула сорта высказывание p (т.е. p — ее бескванторная часть).

Аналогично определяются экзистенциальные формулы, основанные на формуле сорта задача α (α — бескванторная часть). Обозначение: Ex_{Prob} .

Нам понадобится следующая лемма. Будем считать, что язык Ω содержит хотя бы одну константу.

Лемма 1. 1) $QHC \vdash p \Leftrightarrow QHC \vdash !p$.

2) $QHC \vdash \alpha \Leftrightarrow QHC \vdash ?\alpha$.

Доказательство. 1) Очевидно в силу допустимости правил вывода $\frac{p}{!p}$ и $\frac{!p}{p}$ (см. [1]).

2) Слева направо выполнено в силу допустимости правила вывода $\frac{\alpha}{?\alpha}$. Теперь пусть

$QHC \not\vdash \alpha$. Тогда найдется модель Крипке $\mathcal{K}$ и ее мир w такие, что $\mathcal{K}, w \not\models \alpha$. Определим модель $\tilde{\mathcal{K}}$ следующим образом: добавим мир u , который будет отмеченным миром, меньшим мира w ; D_u состоит из констант. Тогда $\tilde{\mathcal{K}}, u \not\models \alpha$, следовательно, $\tilde{\mathcal{K}}, u \not\models ?\alpha$, откуда следует $QHC \not\vdash ?\alpha$.

Теорема 4. Пусть имеется экзистенциальная формула, основанная на формуле сорта задача α , выводимая в логике QHC. Тогда существуют константы $c_1, \dots, c_n$ такие, что в логике QHC выводима формула $\alpha[c_1/x_1, \dots, c_n/x_n]$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции по длине приставки с кванторами и модальностями. Рассмотрим, с чего начинается экзистенциальная формула, выводимая в логике QHC.

Случай 1: она начинается с модальности $?$ или $!$. По лемме 1 можно убрать модальность — получится также выводимая экзистенциальная формула.

Случай 2: она начинается с интуиционистского квантора существования $\exists x \varphi$. Тогда по второму пункту теоремы 2 найдется константа c такая, что $QHC \vdash \varphi[c/x]$.

Случай 3: она начинается с классического квантора существования. Так как формула построена на основе формулы сорта задача, то после блока из нескольких кванторов существования обязательно встретится модальность $?$. То есть формула имеет вид $\exists x_1 \dots \exists x_n ? \dots \alpha$. Поскольку $QHC \vdash \exists x ? \beta \Leftrightarrow ? \exists x \beta$ (см. [1]), перекинем модальность вперед и получим такую формулу, также выводимую в логике QHC: $? \exists x_1 \dots \exists x_n \dots \alpha$. Сведем к первому случаю.

Теперь докажем аналог теоремы Эрбрана для экзистенциальных формул, построенных на основе формулы сорта высказывание. Начнем со следующей леммы.

Лемма 2. Пусть имеется формула следующего вида, выводимая в логике QHC: $QHC \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n p$. Тогда существуют константы $c_{1,1}, \dots, c_{n,m}$ такие, что $QHC \vdash p[c_{1,1}/x_1, \dots, c_{n,m}/x_n] \vee \dots \vee p[c_{1,m}/x_1, \dots, c_{n,m}/x_n]$.

Доказательство. Доказательство аналогично тому, которое работает в классической логике предикатов. Рассмотрим (возможно, бесконечное) множество формул вида $\neg p[c_1/x_1, \dots, c_n/x_n]$ со всеми возможными подстановками констант. Если это множество противоречиво, то противоречие выводится из его конечного подмножества — и тогда выводима дизъюнкция формул с соответствующими подстановками. Если же оно непротиворечиво, то рассмотрим модель Крипке $\mathcal{K}$ и ее отмеченный мир w , в котором все эти формулы истинны. Поменяем множество D_w так, чтобы в нем остались только значения констант. Поскольку формулы бескванторные, то их значения не изменятся. Но при этом $\mathcal{K}, w \not\models \exists x_1 \dots \exists x_n p$, что противоречит условию.

Теперь докажем теорему, верную для любых экзистенциальных формул, основанных на формулах сорта высказывание.

Теорема 5. Пусть имеется экзистенциальная формула, основанная на (бескванторной) формуле сорта высказывание p , выводимая в логике QHC. Обозначим через $y_1, \dots, y_n$ переменные, которые стоят в последнем блоке классических кванторов существования (ближайшем к p), а через $x_1, \dots, x_k$ — остальные переменные. Тогда существуют константы $c_1, \dots, c_k, d_{1,1}, \dots, d_{n,m}$ такие, что в логике QHC выводима формула $\vdash p[c_1/x_1, \dots, c_k/x_k, d_{1,1}/y_1, \dots, d_{n,1}/y_n] \vee \dots \vee p[c_1/x_1, \dots, c_k/x_k, d_{1,m}/y_1, \dots, d_{n,m}/y_n]$.

Доказательство. Устраняем по очереди кванторы, начиная с внешнего. Пока мы не добрались до последних классических кванторов, применяем теорему 4. Когда же мы до них доберемся, используем лемму 2.

3. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХАРРОПА ДЛЯ ЛОГИКИ QHC

Для удобства читателя приведем формулировку теоремы Харропа для интуиционистской логики предикатов.

Определение 4. Определим класс харроповых формул интуиционистской логики предикатов как наименьший класс, удовлетворяющий следующим условиям:

- атомарные формулы и $\perp$ харроповы;
- если α и β харроповы, то $\alpha \wedge \beta$ харропова;
- если α харропова, то $\forall x \alpha$ харропова;
- если α харропова, ξ произвольная, то $\xi \rightarrow \alpha$ харропова.

Теорема 6. Пусть T состоит из замкнутых харроповых формул.

- 1) Если $T \vdash \alpha \vee \beta$, то $T \vdash \alpha$ или $T \vdash \beta$.
- 2) Если $T \vdash \exists x \alpha$, то для некоторой константы c выполнено $T \vdash \alpha[c/x]$.

Логика QHC является консервативным расширением интуиционистской логики предикатов и вместе с тем имеет более богатый язык. Поэтому доказательство аналога теоремы Харропа для логики QHC будет иметь свои особенности. В частности, изменится определение харроповой формулы — сначала необходимо определить строго харроповы формулы.

Определение 5. Определим класс строго харроповых формул логики QHC как наименьший класс, удовлетворяющий следующим условиям:

- атомарные формулы, 0 , $\perp$ строго харроповы;
- если α и β строго харроповы, то $\alpha \wedge \beta$ строго харропова;
- если α строго харропова, то $\forall x \alpha$ строго харропова;
- если α строго харропова, ξ произвольная, то $\xi \rightarrow \alpha$ строго харропова;
- если p и q строго харроповы, то $p \wedge q$ строго харропова;
- если p строго харропова, то $!p$ строго харропова;
- если α строго харропова, то $?\alpha$ строго харропова.

Определим прямую сумму моделей Крипке следующим образом. Будем считать, что множество константных символов языка Ω непусто.

Определение 6. Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ — 2 модели Крипке, $u \in \mathcal{K}_1, v \in \mathcal{K}_2$ — отмеченные миры. Их прямой суммой $\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ назовем модель $\mathcal{K}$, состоящую из объединения моделей $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, к которым добавили отмеченный мир w , меньший миров u и v . Определим D_w — множество константных символов языка Ω ; $w \models A(\bar{c}) \Leftrightarrow (u \models A(\bar{c}) \text{ и } v \models A(\bar{c}))$, где $A(\bar{c})$ — всевозможные атомарные замкнутые формулы.

В дальнейших леммах рассматривается прямая сумма двух моделей Крипке $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$, $u \in \mathcal{K}_1, v \in \mathcal{K}_2$ — их отмеченные миры, w — добавленный отмеченный мир.

Лемма 3. Пусть A — замкнутая строго харропова формула. Тогда $u \models A$ и $v \models A \Leftrightarrow w \models A$.

Доказательство. Доказываем индукцией по построению формулы.

Для атомарных формул утверждение леммы выполнено по определению прямой суммы моделей Крипке; для констант 0 и $\perp$ утверждение леммы так же выполнено, поскольку 0 и $\perp$ ложны в каждом мире.

Пусть $A = \alpha \wedge \beta$ (аналогично разбирается случай $A = p \wedge q$). Тогда $(u \models \alpha \wedge \beta, v \models \alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (u \models \alpha, u \models \beta, v \models \alpha, v \models \beta) \Leftrightarrow (w \models \alpha, w \models \beta) \Leftrightarrow w \models \alpha \wedge \beta$.

Пусть $A = \forall x\alpha$. Предположим, что $u \models \forall x\alpha$, $v \models \forall x\alpha$. Тогда $\forall t \succ w \forall d \in D_t, t \models \alpha[d/x]$. Пусть $c \in D_w$ — константный символ языка Ω . Имеем $u \models \alpha[c/x]$, $v \models \alpha[c/x]$. В силу того, что $\alpha[c/x]$ — замкнутая строго харропова формула, получаем $w \models \alpha[c/x]$. Отсюда $w \models \forall x\alpha$. Обратно, если $w \models \forall x\alpha$, то $u \models \forall x\alpha$ и $v \models \forall x\alpha$ по монотонности (см. [7] — для формул сорта задача логики QНС выполнена монотонность отношения истинности).

Пусть $A = \xi \rightarrow \alpha$. Предположим, что $u \models \xi \rightarrow \alpha$ и $v \models \xi \rightarrow \alpha$. Тогда $\forall t \succ w (t \models \xi \Rightarrow t \models \alpha)$. Предположим, что $w \models \xi$. Тогда $v \models \xi$ и $u \models \xi$ по монотонности. Так как $u \models \xi \rightarrow \alpha$ и $v \models \xi \rightarrow \alpha$, имеем $u \models \alpha$ и $v \models \alpha$. Отсюда $w \models \alpha$, так как α — строго харропова формула. Получаем $w \models \xi \rightarrow \alpha$. Обратно, если $w \models \xi \rightarrow \alpha$, то $u \models \xi \rightarrow \alpha$ и $v \models \xi \rightarrow \alpha$ по монотонности.

Пусть $A = !p$. Предположим, что $u \models !p$ и $v \models !p$. Тогда $\forall t \succ w (t \in \text{Aud} \Rightarrow t \models p)$ (мы обозначили через Aud множество отмеченных миров в полученной модели $\mathcal{H}$). В частности, $u \models p$ и $v \models p$, поскольку $u, v \in \text{Aud}$. Так как p — строго харропова формула, имеем $w \models p$. Отсюда $\forall t \succ w (t \in \text{Aud} \Rightarrow t \models p)$, то есть $w \models !p$. Обратно, если $w \models !p$, то $u \models !p$ и $v \models !p$ по монотонности ($!p$ — формула сорта задача).

Пусть $A = ?\alpha$. Тогда $(u \models ?\alpha, v \models ?\alpha) \Leftrightarrow (u \models \alpha, v \models \alpha) \Leftrightarrow w \models \alpha \Leftrightarrow w \models ?\alpha$.

Определение 7. Определим класс харроповых формул логики QНС как наименьший класс, удовлетворяющий следующим условиям:

- атомарные формулы, $0, \perp$ харроповы;
- если α и β харроповы, то $\alpha \wedge \beta$ харропова;
- если α харропова, то $\forall x\alpha$ харропова;
- если α харропова, ξ произвольная, то $\xi \rightarrow \alpha$ харропова;
- если p и q харроповы, то $p \wedge q$ харропова;
- если p харропова, то $!p$ харропова;
- если α харропова, то $?\alpha$ харропова;
- если p строго харропова, q харропова, то $p \rightarrow q$ харропова;
- если p харропова, то $\forall xp$ харропова.

Ясно, что любая строго харропова формула является харроповой. Обратное неверно.

Лемма 4. Пусть A — замкнутая строго харропова формула. Тогда $u \models A$ и $v \models A \Rightarrow w \models A$.

Доказательство. Доказываем индукцией по построению формулы. Проверим только последние два случая индуктивного перехода (все про-

чие проверяются аналогично тому, как это было сделано в лемме 3).

Пусть $A = p \rightarrow q$. Предположим, что $w \models p$. Так как p — строго харропова формула, то $u \models p$, $v \models p$. Так как $u \models p \rightarrow q$, $v \models p \rightarrow q$, имеем $u \models q$, $v \models q$. Так как q — харропова формула, имеем $w \models q$. Отсюда $w \models p \rightarrow q$.

Пусть $A = \forall xp$. Пусть $c \in D_w$ — константный символ языка Ω . Имеем $u \models p[c/x]$, $v \models p[c/x]$. В силу того, что $p[c/x]$ — замкнутая харропова формула, получаем $w \models p[c/x]$. Отсюда $w \models \forall xp$.

Наконец, докажем аналоги теоремы Харропа для логики QНС. Определение слабого вывода из гипотез в логике QНС см. в [7].

Теорема 7. Пусть T — множество замкнутых харроповых формул логики QНС. Тогда, если $T \vdash \alpha \vee \beta$, то $T \vdash \alpha$ или $T \vdash \beta$.

Доказательство. Предположим, что $T \not\vdash \alpha$ и $T \not\vdash \beta$. Тогда в силу теоремы 1 о полноте существуют модели $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ и их отмеченные миры $u \in \mathcal{H}_1, v \in \mathcal{H}_2$, что в этих мирах истинны все формулы из T , но при этом $u \not\models \alpha$, $v \not\models \beta$. Рассмотрим их прямую сумму $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Тогда в силу леммы 4 в нижнем мире w будут истинны все формулы из T , но $w \not\models \alpha \vee \beta$.

Теорема 8. Пусть T — множество замкнутых харроповых формул логики QНС. Тогда, если $T \vdash \exists x\alpha$, то существует такая константа c , что $T \vdash \alpha[c/x]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7. В леммах 3 и 4 надо рассматривать контрмодели для всех формул вида $\alpha[c/x]$ и прямую сумму всех этих моделей.

Замечание 1. Между отношениями слабой выводимости $\vdash$ и выводимости $\vdash^*$ в логике QНС имеется взаимосвязь. Обозначим через T^C (T^H) множество формул сорта высказывание (задача) из множества формул T . Тогда $T \vdash^* \alpha \Leftrightarrow T^H, !T^C \vdash \alpha$ (см. [7]). Поэтому теоремы 7 и 8 также выполнены, если заменить в их формулировках слабую выводимость $\vdash$ на выводимость $\vdash^*$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит академика А.Л. Семенова за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Melikhov S.A. "A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax", 2013/22 arXiv:1312.2575.

2. *Melikhov S.A.* “A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics”, 2015/22 arXiv:1504.03379.
3. *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur // Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 646–667.
4. *Heyting A.* Intuitionism: An Introduction. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956.
5. *Медведев Ю.Т.* Фinitные задачи // Доклады Академии наук. Российская академия наук, 1962. Т. 142. № 5. С. 1015–1018.
6. *Артёмов С.Н.* Подход Колмогорова и Гёделя к интуиционистской логике и работы последнего десятилетия в этом направлении // Успехи математических наук. 2004. Т. 59. № 2 (356). С. 9–36.
7. *Онопrienко А.А.* Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний // Математический сборник. 2022. Т. 213. № 7. С. 97–120.
8. *Плиско В.Е., Хаханян В.Х.* Интуиционистская логика // М.: Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ. 2009. Т. 159. С. 357–371.
9. *Клини С.К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.
10. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979.

ON ANALOGUES OF HERBRAND’S AND HARROP’S THEOREMS FOR THE JOINT LOGIC OF PROBLEMS AND PROPOSITIONS QHC

A. A. Onoprienko^a

^a*HSE University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In this paper analogues of Herbrand’s and Harrop’s theorems for the logic QHC are proved.

Keywords: non-classical logics, logic of problems and propositions, disjunctive property, existential property, Herbrand’s theorem, Harrop’s theorem

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПЛАЗМЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН Г. Г. Лазарева^{1,*}, И. П. Оксогоева^{1,**}, А. В. Судников^{2,***}

Поступило 03.08.2023 г.

После доработки 01.09.2023 г.

Принято к публикации 03.11.2023 г.

В работе представлена новая математическая модель переноса плазмы в спиральном магнитном поле. Удержание плазмы в установке осуществляется за счет передачи импульса от магнитного поля с винтовой симметрией вращающейся плазме. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы в аксиально-симметричной постановке. Модель использует экспериментальные данные, полученные на установке СМОЛА, созданной в ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН. Полученное с помощью численного моделирования распределение концентрации вещества подтвердило эффект удержания, полученный в эксперименте. Получены зависимости интегральных характеристик вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Математическая модель разработана для предсказания параметров удержания плазмы в проектируемых установках со спиральным магнитным полем.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение переноса, винтовое магнитное поле

DOI: 10.31857/S2686954323600945, **EDN:** ZDEUXI

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование течения плазмы в магнитном поле на основе сложных математических моделей, включающих в себя описание многих тонких эффектов, имеет большую историю [1–6] и значительные достижения. Эти исследования представляют существенный интерес для управляемого термоядерного синтеза, изучения стойкости материалов под воздействием мощных тепловых нагрузок, лабораторного моделирования астрофизических процессов и ряда других фундаментальных и прикладных научных задач.

Основным методом термоизоляции плазмы является ее удержание в магнитном поле с различными конфигурациями. Наибольший прогресс достигнут в натурных и вычислительных экспериментах [7–9] для систем с тороидальной топологией магнитного поля. Современные успехи математики в этой области вышли на очень

высокий уровень, созданы общедоступные пакеты для математического моделирования работы таких систем.

Альтернативным подходом является удержание плазмы в открытых магнитных системах, где поле близко к осесимметричному, а его силовые линии пересекают границу области удержания в двух точках [10]. Плюсами данного подхода являются более эффективное использование энергии магнитного поля, масштабируемость и инженерная простота системы. Основной научной задачей физики открытых ловушек является снижение потерь частиц и энергии вдоль силовых линий магнитного поля в областях, где они покидают область удержания. Достигнут большой прогресс в понимании физики открытых магнитных конфигураций и достигнутых параметров плазмы [11]. Свой вклад внесло математическое моделирование установок, основанных на принципе многопробочного удержания [12–14].

Разнообразие и сложность параметров течения плазмы определяют необходимость создания специализированных моделей различных процессов. Универсальной модели нет. Математические модели физики плазмы характеризуются различными пространственно-временными масштабами и особенностями протекания процессов. Обычно такие модели объединяют уравнения механики сплошной среды с учетом действия электромагнитных сил и уравнения Максвелла.

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

**E-mail: oksogi@mail.ru

***E-mail: a.v.sudnikov@inp.nsk.su

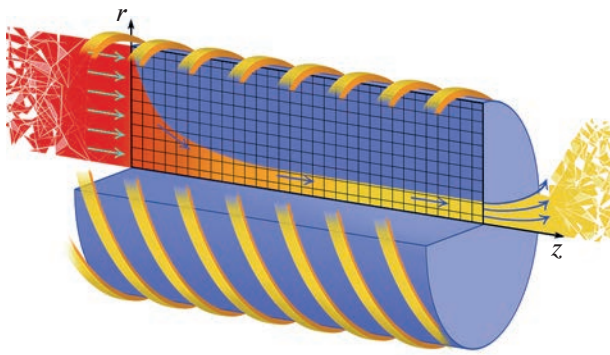


Рис. 1. Схема центральной части ловушки. Расчетная область в поперечном сечении образца, спиральные магниты (желтый) и течение плазмы (красно-желтый).

В зависимости от выбора приближения различают кинетические, магнитогидродинамические и транспортные модели плазмы [15].

Удержание плазмы магнитным полем с винтовой симметрией было предложено в качестве развития метода многопробочного удержания [16]. В системе отсчета вращающейся плазмы движение магнитных возмущений имеет компоненту скорости, сонаправленную с магнитным полем, что позволяет передавать импульс запертым частицам. Столкновения между пролетными и запертыми частицами обеспечивают эффективную силу, действующую на плазму в целом и способствующую возврату ионов в область удержания.

Установка СМОЛА (Спиральная Магнитная Открытая Ловушка) разработана и построена в 2017 г. в Институте ядерной физики СО РАН им. Будкера для экспериментальной проверки этой идеи [17, 18]. Область, в которой удерживается плазма в установке СМОЛА, с одной стороны, ограничена классической пробкой, с другой — многопробочной секцией с винтовым магнитным полем. В эксперименте варьируются такие параметры, как продольное магнитное поле, соотношение продольного и винтового магнитных полей, плотность и скорость вращения плазмы. Установка СМОЛА предназначена для моделирования эффектов винтового удержания при низкой (а потому легко достижимой) температуре плазмы. Для масштабирования винтового удержания на системы термоядерного класса необходимы детальное сравнение экспериментально наблюдаемых потоков вещества с модельными и дальнейший расчет эффективности системы большего масштаба на основе математической модели. В настоящее время показано соответствие наблюдаемых результатов приближенным теоретическим оценкам. В то же время, точного аналитического решения для теории винтового удержания не построено, поэтому сравнение мо-

жет опираться на результаты численного решения уравнений движения плазмы.

Математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле построена на основе уравнений из работ [17–19] и параметров установки СМОЛА. Математическое моделирование процесса было проведено впервые в работе [20]. Развитием этого нового направления исследований является определение параметров процесса, которые невозможно измерить в эксперименте, включение в расчеты сложных конфигураций магнитного поля. Цель работы состоит в предсказании параметров удержания установок на стадии их проектирования.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В моделируемом эксперименте происходит установление параметров плазмы и электромагнитного поля в течение 40 мс и затем наступает фаза, когда процесс стационарен в течение 120 мс, после чего разряд отключается. Основная задача экспериментов и математического моделирования состоит в исследовании удержания плазмы, при которых все параметры постоянны. Рассмотрим движение плазмы в центральной части ловушки, имеющей форму цилиндра (см. рис. 1). Вещество входит в область удержания из источника плазмы через левый торец цилиндра и выходит в расширитель через правую границу. Течение плазмы осесимметрично, что позволяет ограничиться двумерной постановкой задачи [21]. Таким образом, удержание плазмы в спиральном магнитном поле должно описываться стационарными уравнениями в поперечном сечении центральной части установки в плоскости (r, z) .

В статье [19] получены выражения для компонентов радиального и продольного переноса частиц в винтовом магнитном поле. Система уравнений описывает динамику плазмы в МГД-приближении в аксиально-симметричной постановке. Различия в движении запертых и пролетных ионов учитываются в виде эффективной силы трения, зависящей от взаимной скорости компонент и доли запертых частиц. Продольная сила, действующая на плазму, возникает в результате взаимодействия радиального электрического тока захваченных ионов с азимутальной компонентой винтового магнитного поля. Учитывается диффузия плазмы поперек магнитного поля. Исключение зависимых переменных сводит систему уравнений к уравнению неразрывности потока.

Рассмотрим область $[0, r_{\max}] \times [0, z_{\max}]$ в поперечном сечении центральной части установки (рис. 1). В безразмерных величинах область является единичным квадратом. Считаем, что вещество не достигает стенок ловушки, на оси z ставим условие симметрии, на входе и выходе вещества

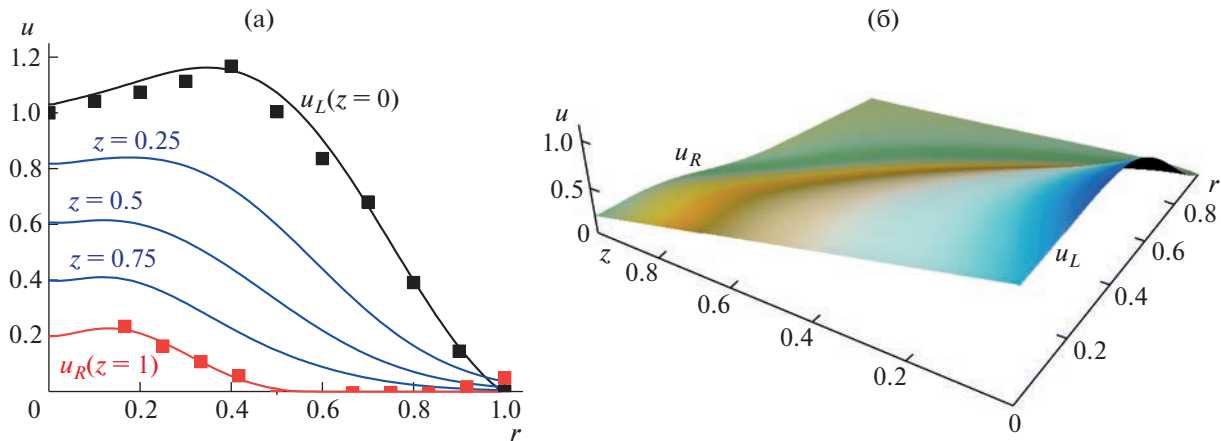


Рис. 2. Концентрация плазмы (а) по сечениям оси z . Расчетное (линия) и экспериментальное (квадратики) граничное распределение плазмы на входе (черный) и на выходе (красный). Расчетное распределение плазмы внутри области (синие линии). Распределение концентрации плазмы (б) в поперечном сечении установки.

задаем граничное распределение концентрации вещества $u(r, 0) = u^L(r)$ и $u(r, z_{\max}) = u^R(r)$. Для расчетов использованы экспериментальные данные [11] для распределения концентрации на границах (рис. 2 а). Таким образом, стационарная задача имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{l}{x(r)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial (T(r)u(r, z))}{\partial z} + \\ + l(1 + x(r)) \frac{\partial (\Phi(r, z)\zeta(r)u(r, z))}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} lZ^{-1}\zeta(r) \frac{\partial (T(r)u(r, z))}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} lD \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, z) = 0, \quad u(r, 0) = u_L(r), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, z) = 0, \quad u(r, 1) = u_R(r), \end{cases} \quad (1)$$

где u — концентрация вещества, $T = T_i + T_e$, $T_i = 4$ ЭВ и $T_e = 30(1 - (r/r_0)^2)$ — ионная и электронная температуры, Λ — отношение длины системы к длине свободного пробега Λ иона, $\kappa(r, R_m)$ — доля запертых частиц, $l = 216$ см — длина системы вдоль силовой линии, Z — среднее зарядовое число одного иона, D — коэффициент диффузии в поперечном поле. Доля запертых частиц $\kappa(r, R_m) = 1 - 1/R(r, R_m)$, $R(r, R_m) = 2(R_m - 1)(r/a)^2 + 1$, где $R_m = 1.52$ — глубина гофрировки. Параметр $\zeta = c/V_z$ является отношением скорости звука $c_s = (T_e/M)^{1/2}$ и продольной скорости V_z движения магнитных возмущений при вращении плазмы в собственном амбиполярном электрическом поле. В уравнении (1) физические величины обезразмерены на: $r_0 = a$, $z_0 = l$, $\phi_0 = T_e/e$, $u_0 = u_{\max}$,

$T_0 = T_e$, где $a = 8$ см — граница камеры, в которой может существовать плазма.

Известно, что величина потенциала снижается с увеличением z за счет наличия поперечной проводимости плазмы. Его распределение в пространстве задается как убывающая вдоль оси производная абсолютной величины электрического поля (рис. 3 а):

$\Phi(r, z) = \left(1 - \frac{0.002z}{h}\right) \frac{\partial |\phi(r)|}{\partial r}$. Измеряемый с помощью зондов потенциал плазмы в экспериментах на установке СМОЛА зависит от параметров эксперимента. Максимум ϕ варьируется в пределах от $2T_e/e$ до $3T_e/e$. Максимальное значение безразмерного потенциала ϕ для установок следующего поколения, в которых возможно использование принципа винтового удержания, также лежит в этих же пределах [22, 23]. Экспериментально наблюдаемое распределение потенциала в центральной области плазмы (при значениях радиуса меньших 0.6 в безразмерных величинах) близко к квадратичному, далее в периферийной области плазмы производная потенциала по радиусу снижается. Погрешность измерения потенциала в эксперименте составляет около 5%. Степень и коэффициенты аппроксимирующего полинома подобраны таким образом, чтобы его отклонение от экспериментально измеренных в референсном эксперименте значений было сопоставимым с экспериментальной погрешностью.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача (1) была реализована методом установления [20] и более экономичным методом верхней релаксации [24] при параметре релаксации $\omega = 2 - O(h)$ и аппроксимации смешанной производной на шаблоне [25]. Можно заметить, что за-

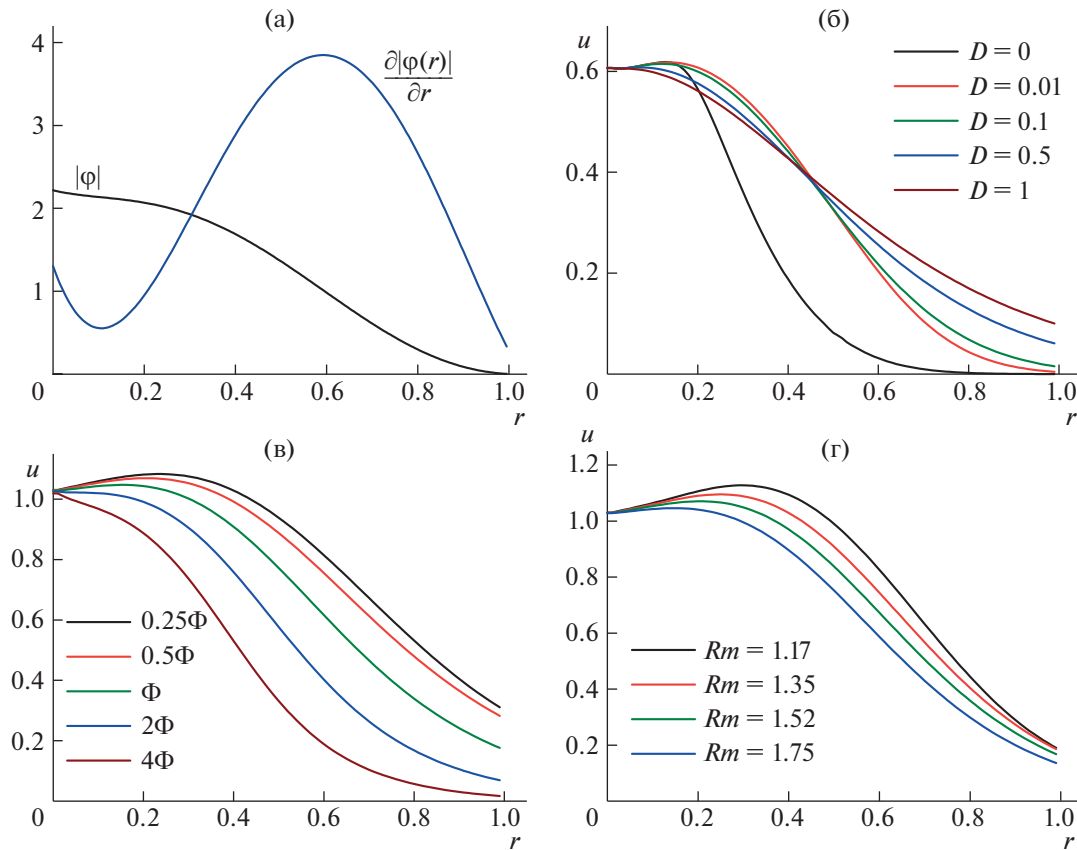


Рис. 3. Зависимости от радиуса установки (а) модуля потенциала электрического поля (черная линия) и его производной (синяя линия). Распределение концентрации плазмы по сечению оси $z = 0.4$ при различных значениях коэффициента диффузии (б), производной абсолютной величины электрического поля (в) и глубины гофрировки (г).

дача (1) содержит параметр $\zeta(r) = 1/Ar$, полученный аппроксимацией экспериментальных данных, здесь $A = 20$. На оси при $r = 0$ параметр ζ ограничен значением при $r = \rho_B$, где $\rho_B = V_{Ti}mc/eB$ — лармовский радиус. Для параметров установки СМОЛА $\rho_B \approx 0.3\text{--}0.4$ см. Это обусловлено тем, что ион движется по лармовской орбите (вращается в магнитном поле), поэтому его радиальная координата осциллирует. В рассматриваемой модели все воздействия усредняются, иону приписывается координата центра окружности, по которой он движется в магнитном поле. То есть координата равна нулю для ионов, которые облетают ось вокруг и находятся на расстоянии лармовского радиуса от нее. Поэтому для исключения особенностей решения при расчетах в окрестности оси симметрии безразмерный параметр ζ задается следующим образом:

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1/Ar, & r > \rho_B, \\ 1/A\rho_B, & \rho_B \geq r \geq 0. \end{cases}$$

Наряду с другими преимуществами, метод релаксации интересен удобством использования в

цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точки вида “крест” универсально и не зависит от выбора системы координат.

На рис. 2а приведены экспериментальные значения концентрации плазмы на входе (квадратики) и на выходе (кружочки) и их интерполяция вида:

$$u_L(r) = 1.03 + 0.46r - 1.52r^2 + 14.48r^3 - 44.17r^4 + 43.77r^5 - 14.05r^6,$$

$$u_R(r) = 0.2 - 0.12r + 9.11r^2 - 73.43r^3 + 210.13r^4 - 285.64r^5 + 188.54r^6 - 48.78r^7.$$

Потенциал электрического поля $\phi(r)$ введен в виде полинома (рис. 3а), интерполирующего экспериментальные данные:

$$\phi(r) = -2.21776 + 1.31r - 7.79r^2 + 31.18r^3 - 33.43r^4 + 10.94r^5.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В ходе моделирования переноса вещества в винтовом магнитном поле получены распределения концентрации при различных значениях глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Для дальнейшего анализа результатов расчетов и сравнения с данными экспериментов приводятся сечения вдоль оси z (рис. 2а). Распределение концентрации плазмы показано в расчетной области, имеющей в безразмерном виде форму единичного квадрата (рис. 2б). Расчеты показывают убывание плотности плазмы, что подтверждает эффект удержания, наблюдаемый в экспериментах.

Так как в эксперименте датчик, измеряющий концентрацию плазмы, находится при $z = 0.4$, то на рис. 3 приведены результаты расчетов только в этом сечении. Проведены вычислительные эксперименты для различных допустимых значений коэффициента диффузии, производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки. Расчеты показали, что при уменьшении коэффициента диффузии в поперечном поле вещество начинает прижиматься к оси. Совпадение расчетных распределений с экспериментальными с учетом конечной точности экспериментальных изменений достигается при коэффициенте диффузии в диапазоне $D = 0.01–0.1$. Дальнейшие расчеты проводились при $D = 0.1$. С увеличением производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки наблюдается сжатие плазменного шнура к оси. Полученные результаты соответствуют экспериментальным данным. В дальнейшем описанный метод может быть использован для прогнозирования работы действующих и проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле. Одной из основных задач для подобного прогнозирования будет корректное определение граничных условий и численных коэффициентов в уравнении переноса без использования априорно известных экспериментальных распределений параметров плазмы. Для этого планируется проведение расчетов, с использованием известного точного граничного условия на бесконечности. В качестве распределения плотности плазмы на выходе из секции улучшенного удержания будет приниматься значение решения при $z = 1$.

5. ВЫВОДЫ

Представлена математическая модель переноса плазмы в спиральной открытой магнитной ловушке СМОЛА. Получены зависимости интегральной характеристики плотности вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Наблюдается каче-

ственное соответствие смоделированных зависимостей экспериментальным данным при значениях безразмерного коэффициента диффузии $D = 0.01–0.1$ и средней по сечению глубины гофрировки $R_m = 1.52$. В расчетах наблюдается эффект пинчевания (уменьшения среднего радиуса) плазменной струи, проявляющийся и в эксперименте. Дальнейшая работа будет направлена на расширение области параметров, при которых модель обладает достаточной предсказательной силой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Численные методы решения многомерных задач механики и физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1416–1464.
2. Брушлинский К.В., Савельев В.В. Магнитные ловушки для удержания плазмы // Матем. Моделирование. 1999. Т. 11. № 5. С. 3–36.
3. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы // Серия “Компьютеры в физике”. М.: Физматлит, 1993.
4. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. Сигов Ю.С. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избранные труды. М.: Физматлит, 2001.
6. Березин Ю.А., Дудникова Г.И. Численные модели плазмы и процессы пересоединения. М.: Наука, 1985.
7. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. 020. 20.
8. Cohen B., Barnes D., Dawson J., Hammett G., Lee W., Kerbel G., Leboeuf J., Liewer P., Tajima T., Waltz R. The numerical tokamak project: simulation of turbulent transport // Comput. Phys. Commun. 1995. V. 87. I. 1–2. P. 1–15.
9. Грубер Р., Дегтярев Л.М., Купер А., Мартынов А.А., Медведев С.Ю., Шафранов В.Д. Трехмерная модель равновесия плазмы с полоидальным представлением магнитного поля // Физика плазмы. 1996. Т. 22. № 3. С. 204.
10. Бурдаков А.В., Поступаев В.В. Многопробочная ловушка: путь от пробкотрона Будкера к линейному термоядерному реактору // У.Ф.Н. 2018. Т. 188. № 6. С. 651–671.
11. Bagryansky P.A., Beklemishev A.D., Postupaev V.V. Encouraging Results and New Ideas for Fusion in Linear Traps // J. Fusion Energy. 2019. V. 38. P. 162–181.
12. Berendeev E.A., Dimov G.I., Dudnikova G.I., Ivanov A.V., Lazareva G.G., Vshivkov V.A. Mathematical and experimental simulation of a cylindrical plasma target trap

- with inverse magnetic mirrors // *J. Plasma Phys.* 2015. V. 81. I. 5.
13. Перепёлкина А.Ю., Левченко В.Д., Горячев И.А. Трёхмерный кинетический код CFHall для моделирования замагниченной плазмы // *Матем. Моделирование*. 2013. Т. 25. № 11. С. 98–110.
 14. Астерлин В.Т., Бурдаков А.В., Поступаев В.В. Моделирование динамики плотного излучающего плазменного сгустка для установки ГОЛ-3-II // *Сиб. журн. индустр. матем.* 1998. Т. 1. № 2. С. 45–50.
 15. Калиткин Н.Н., Костомаров Д.П. Математические модели физики плазмы (обзор) // *Матем. моделирование*. 2006. Т. 18. № 11. С. 67–94.
 16. Beklemishev A.D. Helicoidal System for Axial Plasma Pumping in Linear Traps // *Fusion Sci. Technol.* 2013. V. 63. № 1. P. 355–357.
 17. Postupaev V.V., Sudnikov A.V., Beklemishev A.D., Ivanov I.A. Helical mirrors for active plasma flow suppression in linear magnetic traps // *Fusion Eng. Des.* 2016. V. 106. P. 29–31.
 18. Sudnikov A.V., Ivanov I.A., Inzhevatkina A.A., Larichkin M.V., Lomov K.A., Postupaev V.V., Tolkachev M.S., Ustyuzhanin V.O. Plasma flow suppression by the linear helical mirror system // *J. Plasma Phys.* 2022. V. 88. № 1.
 19. Beklemishev A.D. Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1771.
 20. Lazareva G.G., Oksogoeva I.P., Sudnikov A.V. Mathematical Modeling of Plasma Transport in a Helical Magnetic Field // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43. № 10. P. 2685–2691.
 21. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. Расчет осесимметричных МГД-течений в канале с внешним продольным магнитным полем // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 3. С. 550–559.
 22. Sudnikov A.V., Beklemishev A.D., Postupaev V.V., Burdakov A.V., Ivanov I.A., Vasilyeva N.G., Kuklin K.N., Sidorov E.N. SMOLA device for helical mirror concept exploration // *Fusion Eng. Des.* 2017. V. 122. P. 86–93.
 23. Сковородин Д.И., Черноштанов И.С., Амиров В.Х. и др. Газодинамическая многопробочная ловушка ГДМЛ. Н.: Препринт ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН, 2023.
 24. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
 25. Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П., Шишкин Г.И. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными // *Матем. Моделирование*. 2001. Т. 13. № 2. С. 17–26.

MATHEMATICAL MODEL OF PLASMA TRANSFER IN A HELICAL MAGNETIC FIELD

Corresponding member of the RAS G. G. Lazareva^a, I. P. Oksogoeva^a, and A. V. Sudnikov^b

^a Peoples Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

^b Budker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch Russian Academy of Sciences (BINP SB RAS),
Novosibirsk, Russian Federation

The paper presents the results of mathematical modeling of plasma transfer in a spiral magnetic field using new experimental data obtained at the SMOLA trap created at the Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS. Plasma confinement in the trap is carried out by transmitting a pulse from a magnetic field with helical symmetry to a rotating plasma. New mathematical model is based on a stationary plasma transfer equation in an axially symmetric formulation. The distribution of the concentration of the substance obtained by numerical simulation confirmed the confinement effect obtained in the experiment. The dependences of the integral characteristics of the substance on the depth of corrugation of the magnetic field, diffusion and plasma potential are obtained.

Keywords: mathematical modeling, transfer equation, helical magnetic field