

УДК 517.977.8

# ОБ ОДНОМ ДОПОЛНЕНИИ К МЕТОДУ УНИФИКАЦИИ Н. Н. КРАСОВСКОГО В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

© 2024 г. Член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков<sup>1,\*</sup>, А. М. Тарасьев<sup>1,\*\*</sup>, А. А. Ершов<sup>1,\*\*\*</sup>

Получено 14.07.2024 г.

После доработки 05.08.2024 г.

Принято к публикации 12.08.2024 г.

Изучается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы в конечномерном евклидовом пространстве в фиксированный момент времени. Исследуется проблема приближенного вычисления множеств разрешимости задачи о сближении. Обсуждается подход к приближенному вычислению множеств разрешимости, основу которого составляет унификационная модель, являющаяся дополнением к методу унификации Н. Н. Красовского в теории дифференциальных игр.

**Ключевые слова:** управление, конфликтно управляемая система, игровая задача о сближении, множество разрешимости, минимаксный  $u$ -стабильный мост, минимаксный  $u$ -стабильный тракт, целевое множество, дифференциальное включение.

DOI: 10.31857/S2686954324050124, EDN: XDGJQF

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы в конечномерном евклидовом пространстве в фиксированный момент времени [1, 2]. Формулировка задачи и методы ее решения рассматриваются в рамках теории позиционных дифференциальных игр, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [1, 2]. Условия, наложенные на систему, не предполагают, вообще говоря, выполнение ситуации существования седловой точки в так называемой маленькой игре [2, стр. 56], и задача изучается в постановке, допускающей дискриминацию одного игрока другим: предполагается, что второй игрок информационно дискриминирует первого игрока, решающего задачу.

Ключевым компонентом разрешающей конструкции задачи о сближении является множество разрешимости  $W^0$  задачи и основное внимание в работе уделено проблеме выделения  $W^0$  в пространстве позиций конфликтно управляемой системы. Выяснение возможности выделения  $W^0$  в игровых задачах о сближении — актуальная про-

блема теории позиционных дифференциальных игр [2–5].

Множество  $W^0$  наделено важным характеристическим свойством — свойством минимаксной  $u$ -стабильности (см. [2–6]). Эффективное описание этого свойства значительно облегчает выделение (или приближенное вычисление)  $W^0$  в ряде конкретных задач о сближении. В связи с этим в работе особое внимание уделено описанию и анализу унификационных конструкций минимаксной  $u$ -стабильности [7, 8], дополняющих исследования Н. Н. Красовского [9, 10] по унификации дифференциальных игр. Применение этих конструкций в ряде конкретных задач весьма эффективно при выделении множеств  $W^0$  и в некоторых задачах дает возможность выделить  $W^0$  точно.

Работа посвящена в основном вопросам приближенного вычисления множеств  $W^0$ . В связи с этим вводится дуальная система к исходной конфликтно управляемой системе, отвечающая обратному времени. Определяется максимальный минимаксный  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$ , соответствующий дуальной системе, и представляющий собой понятие, двойственное к мосту  $W^0$ . С привлечением унификационной схемы, основанной на аксиомах А.1–А.3, вводятся А-системы — конечные наборы множеств в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ , отвечающие конечным разбиениям  $\Gamma$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ , на котором рассматривается задача о сближении. Обосновывается сходимость А-систем к  $Z^0$  при измельчении разбиения  $\Gamma$ , что является основанием для

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

\* E-mail: ushak@imm.uran.ru

\*\* E-mail: tam@imm.uran.ru

\*\*\* E-mail: ale10919@yandex.ru

привлечения А-систем к приближенному решению задач о сближении.

Разрешающие конструкции, представленные в работе, являются дополнением к унификационным моделям Н. Н. Красовского [9, 10] в теории дифференциальных игр; они представляют собой некоторое развитие упомянутых моделей, полезное при решении конкретных игровых задач. Они также близки к некоторым конструкциям, примененным А. И. Субботиным в созданной им теории минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби [12]. Постановка задачи о сближении и проблематика ее исследования имеют одними из источников работы В. Флеминга [13], Л. С. Понтрягина [14, 15], а также примыкают к работам сотрудников и коллег Л. С. Понтрягина [16–19]. По своей тематике работа близка к [20–25].

## 2. ИГРОВАЯ ЗАДАЧА О СБЛИЖЕНИИ

На промежутке времени  $[t_0, \vartheta]$ ,  $t_0 < \vartheta < \infty$  задана конфликтно управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q; \quad (1)$$

здесь  $x$  — фазовый вектор системы из  $\mathbb{R}^m$ ,  $u$  и  $v$  — управления первого и второго игроков соответственно,  $P$  и  $Q$  — компакты в евклидовых пространствах  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$ .

Система (1) стеснена условиями

А. Вектор-функция  $f(t, x, u, v)$  определена, непрерывна на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ , и для любой ограниченной замкнутой области  $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  найдется такая постоянная  $L = L(D) \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}, u, v) \in D \times P \times Q, \quad i = 1, 2;$$

В. Найдется такая постоянная  $\gamma \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \\ (t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q;$$

здесь  $\|f\|$  — норма вектора  $f$  в евклидовом пространстве.

Условия А, В охватывают, в частности, широкий класс управляемых систем (1), для которых условие седловой точки в маленькой игре не выполняется.

Учитывая это, сформулируем задачу о сближении для первого игрока в минимаксной постановке [2–6], согласно которой преимущество в информационном плане предоставляется второму игроку: первый игрок, пытаясь предусмотреть неприятный для него выбор управлений вторым игроком и нивелировать их, как бы сознательно ущемляет себя.

Сформулируем задачу о сближении системы (1), стоящую перед первым игроком, распоряжающимся выбором  $u \in P$ .

Пусть  $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ ,  $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ , где  $\text{comp}(\mathbb{R}^m)$  — пространство компактов в  $\mathbb{R}^m$  с хаусдорфовой метрикой.

**Задача 1** (см. [2, 3, 6]). Первому игроку требуется определить позиционную стратегию  $u^*(t, x)$ ,  $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , гарантирующую ему приведение конечной точки  $x[\vartheta]$  движения  $x[t]$ ,  $x[t_*] = x_*$  системы (1) на  $M$  какова бы ни была контрстратегия  $v(t, x, u)$ ,  $(t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$  второго игрока.

Движение  $x[t]$ ,  $x[t_*] = x_*$  понимается здесь в рамках минимаксной постановки (см. [2, 3]). Строгая формулировка задачи 1 и относящихся к ней понятий приводится в [2, 3]. В настоящей работе основное внимание фокусируется на изучении свойства минимаксной  $u$ -стабильности — ключевого в вопросах описания и конструирования множеств разрешимости  $W^0$  в задачах 1.

## 3. МИНИМАКСНАЯ $u$ -СТАБИЛЬНОСТЬ В ЗАДАЧЕ 1 (УНИФИКАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ)

В этом параграфе представим унификационную модель минимаксной  $u$ -стабильности [7–11], дополняющую унификационную модель Н. Н. Красовского [9, 10]: в рамках этой модели опишем минимаксные  $u$ -стабильные тракты и мосты в задаче 1.

Учитывая условия задачи 1, заключаем, что множество  $W^0$  и все компоненты разрешающей конструкции можно поместить в некоторую замкнутую цилиндрическую область  $D = [t_0, \vartheta] \times B(0; R)$ , где  $B(0, R) = \{b \in \mathbb{R}^m : \|b\| \leq R\}$ ,  $R \in (0, \infty)$ . Именно эта область  $D$  упоминается в тексте.

Приведем описание минимаксных  $u$ -стабильных мостов и трактов в задаче 1.

Минимаксная  $u$ -стабильность непустого замкнутого множества  $W \subset D$  означает его слабую инвариантность относительно некоторого набора дифференциальных включений (д.в.), естественным образом связанных с системой (1) при помощи некоторого  $\mathcal{L}$ -набора многозначных отображений.

$\mathcal{L}$ -набор определим в достаточно общей аксиоматической форме условий А.1–А.3.

Для этого введем гамильтониан системы (1) — функцию

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \quad (t, x) \in D, \quad l \in \mathbb{R}^m;$$

здесь  $\langle l, f \rangle$  — скалярное произведение векторов  $l$  и  $f$  из  $\mathbb{R}^m$ .

Введенный гамильтониан  $H(t, x, l)$  адекватен минимаксной постановке задачи 1.

Пусть  $(t, x) \mapsto G(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $(t, x) \in D$  — непрерывное в хаусдорфовой метрике многозначное отображение; здесь  $G(t, x)$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^m$ , удовлетворяющий  $F(t, x) = \text{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\} \subset G(t, x)$ , где  $\text{co}\{f\}$  — выпуклая оболочка множества  $\{f\}$ .

Пусть также заданы множество  $\Psi$  элементов  $\psi$  и набор  $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$  многозначных отображений  $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $(t, x) \in D$ , удовлетворяющий условиям

**А.1.** Множество  $F_\psi(t, x)$  выпукло, замкнуто в  $\mathbb{R}^m$  при любых  $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$  и  $F_\psi(t, x) \subset G(t, x)$ ;

**А.2.** Найдется функция  $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ ,  $\delta \downarrow 0$ , удовлетворяющая

$$d(F_\psi(t_*, x_*), F_\psi(t^*, x^*)) \leq \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \\ \psi \in \Psi, (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in D;$$

**А.3.** Справедливо равенство

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) = H(t, x, l), \quad (t, x, l) \in D \times S;$$

здесь  $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}$ ;  $h_F(l) = \max_{f \in F} \langle l, f \rangle$ ,  $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ ;  $\text{comp}(\mathbb{R}^m)$  — пространство компактов в  $\mathbb{R}^m$  с хаусдорфовой метрикой  $d(F_*, F^*) = \max(h(F_*, F^*), h(F^*, F_*))$ ,  $h(F_*, F^*) = \max_{f_* \in F_*} \rho(f_*, F^*)$ ,  $\rho(f_*, F^*) = \min_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$ .

Приведем примеры  $\mathcal{L}$ -наборов.

**Пример 1** (см. [2, 3]). Набор  $\{F_{v(\cdot)} : v(\cdot) \in V\}$ , где  $F_{v(\cdot)}(t, x) = \text{cl co}\{f(t, x, u, v(u)) : u \in P\}$ ,  $(t, x) \in D$ ,  $V$  — совокупность всех измеримых по Борелю функций  $v(u) \in Q$ ,  $u \in P$ ,  $\text{cl co}\{f\}$  — замыкание множества  $\text{co}\{f\}$ .

**Пример 2** (см. [9, 10]). Набор  $\{G_l : l \in S\}$ , где  $G_l(t, x) = \{f \in G(t, x) : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\}$ ,  $(t, x) \in D$ ,  $F(t, x) \subset G(t, x) = B(0, K)$ ,  $(t, x) \in D$ ,  $K \in (0, \infty)$ .

Векторы  $l \in S$  из примера 2 трактуем как своеобразные управления второго игрока, подменяющие в задаче 1 контруправление  $v(u) \in Q$ ,  $u \in P$  второго игрока.

Опишем свойство минимаксной  $u$ -стабильности на языке  $\mathcal{L}$ -набора  $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ .

Пусть  $x_* \in \mathbb{R}^m$ ,  $X_*$  и  $X^*$  — множества в  $\mathbb{R}^m$ ,  $(t_*, t^*) \in \Delta = \{(\eta_*, \eta^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : \eta_* \leq \eta^*\}$ ,  $\psi \in \Psi$ .

Введем д.в. на  $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F_\psi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \psi \in \Psi. \quad (2)$$

Полагаем  $X_\psi(t^*, t_*, x_*)$  — множество достижимости (м.д.) в момент  $t^*$  д.в. (2) с начальной точкой  $x_*$ , отвечающей моменту  $t_*$ ;  $X_\psi(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_\psi(t^*, t_*, x_*)$ ;  $X_\psi^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t^*, t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}$ .

Пусть  $W$  — непустое множество в  $D$ ,  $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$  и  $T = \{t \in [t_0, \vartheta] : W(t) \neq \emptyset\}$ .

**Определение 1** (см. [7, 8, 11]). Замкнутое множество  $W \subset D$  назовем минимаксным  $u$ -стабильным мостом в задаче 1, если  $W(\vartheta) \subset M$  и  $W(t_*) \subset \pi(t_*, t^*, W(t^*)) \doteq \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*, t^*, W(t^*))$ ,  $(t_*, t^*) \in \Delta$ ,  $t_* \in T$ .

Наряду с определением 1 приведем первоначальное определение минимаксной  $u$ -стабильности (см. [2, 3]), выраженное в терминах  $\mathcal{L}$ -набора из примера 1.

**Определение 2** (см. [2, 3]). Замкнутое множество  $W \subset D$  назовем минимаксным  $u^*$ -стабильным мостом в задаче 1, если  $W(\vartheta) \subset M$  и  $W(t_*) \subset \pi^*(t_*, t^*, W(t^*)) \doteq \bigcap_{v(\cdot) \in V} X_{v(\cdot)}^{-1}(t_*, t^*, W(t^*))$ ,  $(t_*, t^*) \in \Delta$ ,  $t_* \in T$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1** (см. [8]). Определения 1 и 2 эквивалентны в том смысле, что непустое замкнутое множество  $W \subset D$  есть минимаксный  $u$ -стабильный мост в задаче 1 тогда и только тогда, когда  $W$  — минимаксный  $u^*$ -стабильный мост в задаче 1.

Множество разрешимости  $W^0$  в задаче 1 есть максимальный минимаксный  $u^*$ -стабильный мост в задаче 1 (см. [2, 3]). Из теоремы 1 следует, что  $W^0$  — максимальный минимаксный  $u$ -стабильный мост в задаче 1. Таким образом, минимаксная  $u$ -стабильность есть фактически (с учетом равенства  $W^0(\vartheta) = M$ ) характеристическое свойство множеств разрешимости  $W^0$  в задачах 1, являющееся поэтому ключевым при их выделении. При выделении множества  $W^0$  в конкретных задачах 1 возникают трудности, обусловленные, в частности, тем, что процедура выделения множества  $W^0$  осуществляется в направлении убывающего времени  $t$  от целевого множества  $M = W^0(\vartheta)$  с использованием свойства минимаксной  $u$ -стабильности, выраженного в терминах множеств достижимости  $X_\psi(t^*, t_*, x_*)$ ,  $\psi \in \Psi$ ,  $(t_*, t^*) \in \Delta$ , соответствующих возрастающему времени  $t$ . Такое несоответствие (во времени) приводит к необходимости обращения времени  $t$  и записи свойства минимаксной  $u$ -стабильности в понятиях, отвечающих обратному времени.

Введем обратное время  $\tau = t_0 + \vartheta - t$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$  и представим систему (1) в обратном времени  $\tau \in [t_0, \vartheta]$

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, u, v), \quad (3) \\ (\tau, z) \in D, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Систему (3) называем дуальной к системе (1). Сопоставим системе (3) на промежутке  $[t_0, \vartheta]$  д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\Psi(\tau, z) = -F_\Psi(t_0 + \vartheta - \tau, z), \quad (4)$$

$$(\tau, z) \in D, \quad \Psi \in \Psi.$$

Введем обозначения, относящиеся к системе (3) и д.в. (4).

Пусть  $z_* \in \mathbb{R}^m$ ,  $Z_* \subset \mathbb{R}^m$ ;  $\Delta^* = \{\zeta_*, \zeta^*\} \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_0 \leq \zeta_* \leq \zeta^* \leq \vartheta$ ,  $\Psi \in \Psi$ .

Полагаем

$Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, z_*)$  — м.д. в момент  $\tau^*$  д.в. (4) с начальной точкой  $z_*$ ;

$Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, z_*)$  — м.д. в момент  $\tau^*$  д.в. (4) с начальным множеством  $Z_*$ ;

$Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcap_{\Psi \in \Psi} Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, Z_*)$  — множество сов-

местной (по всем  $\Psi \in \Psi$ ) достижимости в момент  $\tau^*$  д.в. (4) с начальным множеством  $Z_*$ .

Пусть  $Z$  — непустое множество в  $D$ ,  $Z(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau, z) \in Z\}$ ,  $\tau \in [t_0, \vartheta]$  и  $T^* = \{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z(\tau) \neq \emptyset\}$ .

**Определение 3.** Замкнутое множество  $Z \subset D$  назовем минимаксным  $u$ -стабильным трактом системы (3), если

$$Z(\tau_0) = Z(t_0) \subset M \text{ и } Z(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*)),$$

$$(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*, \quad \tau^* \in T^*.$$

(5)

Пусть  $W$  — минимаксный  $u$ -стабильный мост в задаче 1. Тогда равенство  $Z(\tau) = W(t)$ ,  $t + \tau = t_0 + \vartheta$  определяет минимаксный  $u$ -стабильный тракт  $Z = \bigcup_{z \in T^*} (\tau, Z(\tau))$  системы (3). Обратно, если  $Z$  — минимаксный  $u$ -стабильный тракт системы (3), то равенство  $W(t) = Z(\tau)$ ,  $t + \tau = t_0 + \vartheta$  определяет минимаксный  $u$ -стабильный мост  $W = \bigcup_{t \in T} (t, W(t))$

в задаче 1.

Таким образом, установлено взаимнооднозначное соответствие между мостами  $W$  и трактами  $Z$ . Поскольку существует максимальный  $u$ -стабильный мост  $W^0$  — множество разрешимости задачи 1 (см. [2, 3]), то существует максимальный (по включению) минимаксный  $u$ -стабильный тракт  $Z^0$  системы (3), удовлетворяющий  $Z^0(\tau) = W^0(t)$ ,  $\tau + t = t_0 + \vartheta$ ,  $\tau \in [t_0, \vartheta]$ .

#### 4. А-СИСТЕМЫ $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$

И  $\{\tilde{W}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^m$

Теорема 1 представляет собой теоретическое обоснование возможности применения  $\mathcal{L}$ -наборов  $\{F_\Psi : \Psi \in \Psi\}$  для выделения (точного или приближенного) в  $D$  множеств разрешимости  $W^0$  в конкретных задачах 1. Множество  $Z^0$  более приемлемо (приспособлено) для выделения в  $D$ , чем  $W^0$ , так как его выделение (выделение сечений  $Z^0(\tau)$ ) совпадает с направлением эволюции множеств  $Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*))$ ,  $\tau \in [t_0, \vartheta]$ .

В этом параграфе обсудим проблему приближенных вычислений множества  $Z^0$  в рамках общей постановки задачи 1. Приближенное вычисление множеств  $Z^0$  предполагает дискретизацию (пуантилизацию) пространства  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  (множества  $D$ ) и входящих в задачу 1 ограничений  $P$  и  $Q$  на управления игроков. Дискретизация может быть воплощена в различных схемах. Здесь предпочтена схема раздельной дискретизации: сначала дискретизируется промежуток времени  $[t_0, \vartheta]$ , а затем фазовое пространство  $\mathbb{R}^m$  систем (1), (3) и ограничения  $P$  и  $Q$ .

Здесь описана схема, относящаяся к первому этапу дискретизации — дискретизации промежутка  $[t_0, \vartheta]$ .

Введем двоичное разбиение  $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = \vartheta\}$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ ,  $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ ,  $N = 2^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ .

Разбиению  $\Gamma$  сопоставим ниже А-систему  $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  множеств в  $\mathbb{R}^m$ , предназначенную для аппроксимации множества  $Z^0$ . А-система  $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  составляет теоретическую базу для формирования алгоритмов приближенного вычисления  $Z^0$  в задаче 1.

Определению А-системы  $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  предположим введение некоторых вспомогательных “промежуточных” систем множеств в  $\mathbb{R}^m$ , которые мы не предполагаем конструировать. Опишем эти системы, также отвечающие разбиению  $\Gamma$ .

Сопоставим разбиению  $\Gamma$  систему  $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  временных сечений множества  $Z^0$ , а также систему  $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ , где  $Z^\Gamma(\tau_0) = M$ ,  $Z^\Gamma(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$ ,  $\tau_i \in \Gamma$ .

Справедливы включения  $Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i)$ ,  $\tau_i \in \Gamma$ .

Обратимся к двоичным разбиениям  $\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_i^{(n)}, \dots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$ ,  $N(n) = 2^{N-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Каждому  $\Gamma^{(n)}$ , по аналогии с  $\Gamma$ , сопоставим систему  $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$  множеств  $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$  в  $\mathbb{R}^m$ , где  $Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = M$ ,  $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$ ,  $i = \overline{1, N(n)}$ .

Для любого  $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  справедливы

$$Z^0(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad Z^{(k)}(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad (6)$$

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad n < k.$$

Из определения  $Z^0$  следует, что максимальное по включению множество  $\{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z^0(\tau) \neq \emptyset\}$  есть некоторый отрезок  $T^* = [t_0, \hat{t}]$  в  $[t_0, \vartheta]$ .

Пусть  $\tau_* \in T^*$  — двоичный момент в  $[t_0, \vartheta]$ . Из (6) следует сходимость последовательности  $\{Z^{(n)}(\tau_*)\}$  к компакту  $Z^\square(\tau_*) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z^{(n)}(\tau_*)$  в хаусдорфовой метрике.

Определение множества  $Z^\square(\tau_*)$  распространяем на другие моменты  $\tau_* \in T^*$ . Пусть  $\tau_* \in T^*$  —

недвоичный момент в  $[t_0, \vartheta]$ . Полагаем  $t_n(\tau_*) = \max\{\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)} : \tau_i^{(n)} < \tau_*\}$  и  $Z^\square(\tau_*) = \{z_* \in \mathbb{R}^m : (\tau_*, z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(\tau_*), z_*^{(n)}), (t_n(\tau_*), z_*^{(n)}) \in \Gamma^{(n)} \times Z^{(n)}(t_n(\tau_*)), n \in \mathbb{N}\}$ .

Вместе с тем определено множество  $Z^\square = \bigcup_{\tau_* \in T^*} (\tau_*, Z^\square(\tau_*)) \subset D$ .

Компакт  $Z^\square$  представим в виде  $Z^\square = \lim_{n \rightarrow \infty} Z^{\square(n)}$ ,  $Z^{\square(n)} = \bigcup_{\tau_i^{(n)} \in T^*} (\tau_i^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где сходимость понимается в хаусдорфовой метрике.

**Лемма 1.** Множества  $Z^0$  и  $Z^\square$  совпадают.

Учитывая лемму 1, к проблеме выделения тракта  $Z^0$  в  $D$  можем подойти, вычисляя его приближенно как “промежуточные” системы  $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$  согласно рекуррентным соотношениям  $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$ . Однако даже в относительно простых конкретных задачах 1 множества  $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$ ,  $i \in \overline{1, N(n)}$  невозможно вычислить (точно), т.е. описать аналитически. Это вызывает осознание необходимости трансформации множеств вида  $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$  в множества, более приемлемые для вычислений и при этом достаточно близкие к  $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ .

В связи с этим осуществим первый этап дискретизации, направленной на приближенное вычисление множеств  $Z^0$  в задаче 1, — введем А-систему  $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ .

Пусть  $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = \vartheta\}$  — двоичное разбиение промежутка  $[t_0, \vartheta]$ ,  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  — промежуток разбиения  $\Gamma$ ,  $(\tau_i, z^{(i)})$  и  $(\tau_i, Z^{(i)})$  — точка и множество в  $D$ ,  $\psi \in \Psi$ .

Введем на  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\Psi(\tau_i, z^{(i)}) + \varphi^*(\Delta)B^1, \quad (7)$$

$$z(\tau_i) = z^{(i)}, \quad \psi \in \Psi;$$

здесь  $\Delta = \Delta(\Gamma)$ ;  $\varphi^*(\delta) = \omega^*((1+K)\delta)$ ,  $\delta > 0$ ,  $K = \max\{\|f\| : f \in G(t, x), (t, x) \in D\}$ ;  $B^1 = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^m$ .

Полагаем  $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z^{(i)} + \Delta H_\Psi(\tau_i, z^{(i)}) + \omega(\Delta)B^1$  — м.д. в момент  $\tau_{i+1}$  д.в. (7) с начальной точкой  $z^{(i)}$ ;  $\tilde{Z}_\Psi^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcup_{z^{(i)} \in Z^{(i)}} \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$ ;  $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \tilde{Z}_\Psi^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$ ; здесь обозначено  $\omega(\delta) = \delta\varphi^*(\delta)$ ,  $\delta > 0$ .

**Определение 4.** А-системой  $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  в  $\mathbb{R}^m$ , отвечающей разбиению  $\Gamma$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ , назовем набор множеств

$$\tilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = M, \quad \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) = \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1})), \quad i \in \overline{1, N}.$$

Справедливы включения  $Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i) \subset \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ ,  $\tau_i \in \Gamma$ , из которых следует, что А-система

$\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  мажорирует систему  $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  — набор сечений тракта  $Z^0$ .

Вернемся к двоичным разбиениям  $\Gamma^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

А-систему, отвечающую разбиению  $\Gamma^{(n)}$ , запишем в виде  $\{\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ ,  $\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = \tilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Полагаем  $T^* = \{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z^0(\tau) \neq \emptyset\}$ .

**Определение 5.** Обозначим

$$\mathcal{Z}^0 = \{(\tau_*, z_*) \in D : (\tau_*, z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(\tau_*), z_n), (t_n(\tau_*), z_n) \in (t_n(\tau_*), \tilde{Z}^{(n)}(t_n(\tau_*))), n \in \mathbb{N}\}.$$

Справедливы соотношения  $\mathcal{Z}^0(\tau_0^{(n)}) = M$ ;  $Z^0(\tau_*) \subset \tilde{Z}^{(n)}(\tau_*)$  при  $\tau_* \in T^* \cap \Gamma^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , из которых при недвоичных  $\tau_* \in T^*$  следует  $Z^0(\tau_*) \subset \mathcal{Z}^0(\tau_*)$ . В итоге,  $Z^0 \subset \mathcal{Z}^0$ .

Кроме того,  $\mathcal{Z}^0(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \mathcal{Z}^0(\tau_*))$ ,  $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$ , откуда следует  $\mathcal{Z}^0 \subset Z^0$ .

Из включений  $Z^0 \subset \mathcal{Z}^0$ ,  $\mathcal{Z} \subset Z^0$  следует утверждение.

**Лемма 2.** Множества  $Z^0$  и  $\mathcal{Z}^0$  совпадают.

Объединяя леммы 1 и 2, получаем

**Теорема 2.** Множества  $Z^0$ ,  $Z^\square$  и  $\mathcal{Z}^0$  совпадают.

Заметим, что  $\mathcal{Z}^0$  представимо в виде  $\mathcal{Z}^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Z}^{0(n)}$ ,  $\mathcal{Z}^{0(n)} = \bigcup_{\tau_i^{(n)} \in T^*} (\tau_i^{(n)}, \tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

В теореме 2 обоснована возможность привлечения к решению конкретных задач 1 А-систем  $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  для приближенного вычисления трактов  $Z^0$ .

От разрешающих конструкций задачи 1, отвечающих обратному времени  $\tau$ , перейдем к разрешающим конструкциям, отвечающим прямому времени  $t$ .

Для этого введем разбиение  $\Gamma_*^{(n)} = \{t_0^{(n)} = t_0, t_1^{(n)}, \dots, t_j^{(n)}, \dots, t_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$ ,  $t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta - \tau_i^{(n)}$ ,  $j \in \overline{0, N(n)}$ .

**Определение 6.** А-системой  $\{\tilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) : t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}\}$  в  $\mathbb{R}^m$ , отвечающей разбиению  $\Gamma_*^{(n)}$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ , назовем набор множеств  $\tilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) = \tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ ,  $t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta - \tau_i^{(n)}$ ,  $j = N(n) - i$ ,  $i = N(n), N(n) - 1, \dots, 0$ .

Справедливо предельное соотношение  $W^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{0(n)}$ ,  $W^{0(n)} = \bigcup_{t_j^{(n)} \in T} (t_j^{(n)}, \tilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}))$ ; здесь

$$T = \{t \in [t_0, \vartheta] : W^0(t) \neq \emptyset\}.$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена изучению задачи о сближении конфликтно управляемой системы в  $\mathbb{R}^m$  с компактом  $M$  в конечный момент времени  $\vartheta$  из  $[t_0, \vartheta]$  (задача 1). Для системы не предполагается, вообще говоря, выполнение условия седловой точки в маленькой игре. В связи с этим задача 1 сформули-

рована в работе как минимаксная игровая задача о сближении, стоящая перед первым игроком; в этой задаче он применяет позиционные стратегии, а второй игрок обладает информационным преимуществом — применяет контрстратегии. Минимаксная постановка игровых задач введена в теорию позиционных дифференциальных игр в первой половине 70-х годов XX в. в работах [2–4,6]. Концепция унификации дифференциальных игр, введенная Н. Н. Красовским в [9, 10] в середине 70-х годов XX в., находится в тесной связи с исследованием игровых задач в минимаксной постановке. Минимаксный подход в дифференциальных играх значительно расширил круг исследуемых задач. В этот круг вошли многие задачи, в которых конфликтно управляемые системы зависят нелинейно от управлений игроков.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа авторов А. М. Тарасьева и А. А. Ершова выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00217, <https://rscf.ru/project/24-11-00217/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. Осипов Ю. С. Минимаксное поглощение в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. № 1. С. 32–35.
5. Куржанский А. Б. Избранные труды. М.: изд-во Моск. ун-та, 2009. 756 с.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206. № 2. С. 277–280.
7. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Приклад. математика и механика. 1987. Т. 51. № 2. С. 216–222.
8. Тарасьев А. М. Конструкции и методы негладкого анализа в задачах оптимального гарантированного управления : автореферат дис. ...докт. физ.-матем. наук: 01.01.02 / Ин-т математики и механики. Екатеринбург, 1996. 32 с.
9. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.
10. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1977. № 24. С. 32–45.
11. Григорьева С. В., Пахотинских В. Ю., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 4. С. 51–78.
12. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
13. Fleming W. H. The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. and Appl. 1961. V. 3. P. 102–116.
14. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
15. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 1. С. 764–766.
16. Никольский М. С. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
17. Никольский М. С. О нижнем альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Мат. сб. 1985. Т. 128. № 1. С. 35–49.
18. Половинкин Е. С., Иванов Г. Е., Балашов М. В., Константинов Р. В., Хорев А. В. Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 95–122.
19. Азамов А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 265–268.
20. Пишечный Б. Н. Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.
21. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
22. Grinikh A. L., Petrosyan L. A. An effective punishment for an n-person prisoner's dilemma on a network // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 3. С. 256–262.
23. Пацко В. С. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка // Дифференциальные игры и задачи управления. Сб. статей / ред. А. Б. Куржанский. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 167–227.
24. Гомоюнов М. И., Лукоянов Н. Ю. К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 75–87.
25. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Pursuit differential games with state constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. V. 39. N 5. P. 1615–1632.

## CONCERNING ONE SUPPLEMENT TO UNIFICATION METHOD OF N. N. KRASOVSKII IN DIFFERENTIAL GAMES THEORY

**Corresponding Member of the RAS V. N. Ushakov<sup>a</sup>, A. M. Tarasyev<sup>a</sup>, A. A. Ershov<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia*

The paper deals with the game problem of approach for a conflict-controlled system in a finite-dimensional Euclidean space at a fixed moment of time. The problem of approximate calculation of the solvability sets is studied for the considered approach game. An approach is proposed for approximate calculation of solvability sets on the basis of a unification model, which supplements the unification method of N.N. Krasovskii in the theory of differential games.

*Keywords:* control, conflict-controlled system, game problem of approach, solvability set, minimax  $u$ -stable bridge, minimax  $u$ -stable path, target set, differential inclusion.