

УДК 510.643

ПОЧТИ ДОСТОВЕРНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ И ЗАКОНЫ НУЛЯ И ЕДИНИЦЫ В ХОРНОВЫХ КЛАССАХ

© 2024 г. В. В. Слюсарев^{1,*}

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Получено 30.06.2024 г.

После доработки 24.08.2024 г.

Принято к публикации 19.09.2024 г.

Мы рассматриваем равномерное распределение на всех шкалах Крипке на n точках. Формула асимптотически почти достоверна в хорновом классе $\mathcal{F}$, если вероятность ее общезначимости в $\mathcal{F}$ -замыкании случайной шкалы на n точках стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Асимптотически почти достоверные формулы образуют нормальную модальную логику. Мы доказываем, что для псевдотранзитивных и псевдоевклидовых замыканий эта логика равна **S5** и выполняется закон нуля и единицы.

Ключевые слова: модальная логика, асимптотические вероятности, закон нуля и единицы, хорновы предложения, псевдотранзитивные отношения.

DOI: 10.31857/S2686954324050115, EDN: XDHERO

1. ВВЕДЕНИЕ

В математике известны многие результаты, связывающие логику и вероятности. Большинство таких результатов относится к реляционному языку первого порядка. Вероятно, наиболее известным из них является закон нуля и единицы для логики первого порядка. Он утверждает, что любое свойство случайных n -арных отношений имеет асимптотическую вероятность, равную нулю или единице, если оно определимо в языке первого порядка. Примером являются свойства случайных графов. Закон нуля и единицы доказан независимо в работах [1] и [2].

Закон нуля и единицы выполняется и для ряда неклассических логик, таких как модальные логики. Халперн и Капрон [3] доказали закон нуля и единицы для модальных логик в нескольких классах моделей Крипке. В их статье [3] также утверждалось выполнение закона нуля и единицы для общезначимости в классе всех конечных шкал Крипке, а также в конечных шкалах логик **T**, **S4**, **S5**. Часть этих результатов впоследствии была опровергнута: Ле Барс [7] опубликовал пример формулы, не имеющей асимптотической вероятности в классе всех конечных шкал; Вербрюгге [5] представила формулу, которая общезначима в почти всех **S4**-шкалах, но не выводится из аксиомати-

ки, данной в статье [3]. Исправления были опубликованы в [6]. Также Ле Барс [4] опроверг закон нуля и единицы для выполнимости модальных формул в конечных шкалах Крипке. Выполнимость модальных формул является частным случаем предложений экзистенциального монадического языка второго порядка, для которого известен ряд других отрицательных результатов [8, 9].

Известны примеры классов конечных шкал Крипке, в которых закон нуля и единицы для общезначимости модальных формул выполнен. Вербрюгге [5] показала, что для логики **GL** закон нуля и единицы выполняется как для шкал, так и для моделей, и представила аксиоматические системы для формул, истинных асимптотически почти на верное.

Изучение множества предложений, которые верны в данной случайной структуре с вероятностью, стремящейся к единице, или *почти достоверной логики*, представляет не меньший интерес. Гайфман [10] получил аксиоматизацию почти достоверной логики первого порядка в графе Радо — модели счетного случайного графа. Также известен ряд подобных результатов в модальной логике. Халперн и Капрон [3] доказали, что почти достоверная логика в классе моделей Крипке совпадает с логикой Карнапа **K^C**. Горанко и Капрон [11] доказали нормальность и представили полную аксиоматику для почти достоверной логики случайной счетной шкалы Крипке. Затем Горанко [12] использо-

¹Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: vnvdyv@gmail.com

вал этот результат для изучения почти достоверной логики в классе всех конечных шкал Крипке. Полная аксиоматизация этой логики остается открытой проблемой.

В заключении статьи [12], Горанко поднимает вопрос о характеристизации почти достоверных логик различных подклассов класса всех конечных шкал Крипке. В этой статье мы исследуем хорновы классы шкал Крипке. Класс шкал называется *хорновым*, если он определяется множеством предложений первого порядка вида

$$\forall x_1, \dots, x_n (x_{i_1} R x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} R x_{j_k} \rightarrow x_m R x_l).$$

Мы рассматриваем хорновы классы, которые также являются модально определимыми. Этим свойством обладают классы многих известных модальных логик, например **T**, **K4**, **S4**, **K5**, **S5**.

Если $\mathcal{F}$ — хорнов класс, то для любой шкалы Крипке F существует шкала из класса $\mathcal{F}$, отношение которой содержит отношение F . Шкала с минимальным по включению отношением, удовлетворяющая этим условиям, называется $\mathcal{F}$ -замыканием шкалы F . Мы используем $\mathcal{F}$ -замыкание случайной шкалы Крипке, чтобы определить почти достоверную логику хорнова класса $\mathcal{F}$.

Задача данной работы — исследовать общие свойства почти достоверных логик хорновых классов, а также законы нуля и единицы и почти достоверные логики для классов псевдотранзитивных и псевдоевклидовых шкал.

1.1. Определения

1.1.1. Модальная логика.

Определение 1. Пусть PV — счетное множество пропозициональных переменных. Определим модальный язык $\mathcal{ML}$ как множество всех формул, удовлетворяющих БНФ-выражению

$$\varphi ::= \perp \mid p \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \mid \Box \varphi,$$

где $p \in PV$; $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{ML}$.

Символы булевых операций $\vee, \wedge$ и $\neg$ определяются стандартным образом как сокращения; обозначение $\Diamond \varphi$ является сокращением формулы $\neg \Box \neg \varphi$.

Определение 2. Шкалой Крипке называется пара $F = (W, R)$, где W — непустое множество, $R \subseteq W \times W$. Модель Крипке $M = (F, V)$ состоит из шкалы Крипке F и оценки $V: PV \rightarrow 2^W$, где 2^W — множество всех подмножеств W .

Определение 3. Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке. Отношение $M, w \models \varphi$, где $w \in W$ и $\varphi \in \mathcal{ML}$, определяется индуктивно:

1. $M, w \not\models \perp$;
2. $M, w \models p \iff w \in V(p)$;
3. $M, w \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \iff M, w \not\models \varphi_1$ или $M, w \models \varphi_2$;

4. $M, w \models \Box \varphi \iff \forall w' \in W (w R w' \implies M, w' \models \varphi)$.

Определение 4. Формула $\varphi \in \mathcal{ML}$ *общезначима* в шкале Крипке $F = (W, R)$, если она выполнена для каждого элемента W при любой оценке V :

$$F \models \varphi \iff \forall V: PV \rightarrow 2^W \forall w \in W ((F, V), w \models \varphi).$$

Определение 5. Пусть $\mathcal{F}$ — класс шкал Крипке. Модальной логикой класса $\mathcal{F}$ называется множество формул

$$\text{Log}(\mathcal{F}) = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \forall F \in \mathcal{F} (F \models \varphi)\}.$$

Определение 6. Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$ — множество модальных формул. Класс шкал $\text{Fr}(\Gamma)$, определяемый множеством формул $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$ — это класс всех шкал, в которых общезначимы все формулы множества Γ .

Определение 7. Множество $L \subseteq \mathcal{ML}$ называется *нормальной модальной логикой*, если:

1. L содержит все классические тавтологии;
2. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \in L$;
3. L замкнуто относительно правил вывода:

(MP) Если $\varphi \in L$ и $\varphi \rightarrow \psi \in L$, то $\psi \in L$;

(Gen) Если $\varphi \in L$, то $\Box \varphi \in L$.

(Sub) Если $\varphi \in L, p \in PV, \psi \in \mathcal{ML}$, то $\varphi[\psi/p] \in L$, где $\varphi[\psi/p]$ определяется как формула, полученная заменой всех вхождений переменной p в формуле φ на формулу ψ .

Минимальная нормальная модальная логика обозначается **K**. Известно, что **K** является логикой класса всех шкал Крипке. Следующее предложение прямо следует из определения **K**.

Предложение 8. Множество формул L является нормальной модальной логикой тогда и только тогда, когда **K** $\subseteq L$ и L замкнуто относительно правил вывода **MP** и **Gen**.

1.1.2. Случайные шкалы.

Определение 9. Пусть $W_n = \{1, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ класс всех шкал Крипке на множестве W_n :

$$\mathcal{F}_n = \{(W_n, R) : R \subseteq W_n \times W_n\}.$$

Определение 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Случайная шкала F_n^r — это случайный элемент множества $\mathcal{F}_n$ с равномерным распределением.

Для любой фиксированной шкалы $F = (W_n, R)$,

$$P\{F_n^r = F\} = 2^{-n^2}.$$

Случайное событие происходит *почти наверное*, если его вероятность равна 1. Последовательность случайных событий A_n происходит *асимптотически почти наверное*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1$.

Определение 11. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Шкала Крипке $F = (W, R)$ обладает свойством Ext_m , если для любых различных $x_1, \dots, x_m \in W$ и любых $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$ существуют $y_0, y_1 \in W$, такие что $y_0 R x_{j_0}, y_1 R x_{j_1}$, и для $i = 0, 1$ верно:

1. $x_j R y_i$ тогда и только тогда, когда $j \in I$;
2. $y_i R x_j$ тогда и только тогда, когда $j \in J$.

Предложение 12. [12] Для любого $m \in \mathbb{N}$ случайная шкала F_n^r обладает свойством Ext_m асимптотически почти наверное.

1.1.3. Хорновы замыкания.

Определение 13. [13] Универсальным хорновым предложением называется предложение на языке первого порядка с одним двуместным предикатным символом R вида

$$\forall x_1, \dots, x_n (x_{i_1} R x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} R x_{j_k} \rightarrow x_m R x_l), \quad (1)$$

где $n > 0$, $0 \leq k < \infty$ и $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, m, l \in \{1, \dots, n\}$.

Определение 14. Класс шкал Крипке $\mathcal{F}$ называется хорновым классом, если существует множество хорновых предложений $\mathcal{H}$, такое что $\mathcal{F}$ является классом всех шкал, удовлетворяющих H для любого $H \in \mathcal{H}$.

Определение 15. Модальная логика L является хорновой, если $\text{Fr}(L)$ — хорнов класс.

Многие известные модальные логики являются хорновыми, например минимальная модальная логика $\mathbf{K}$, логика всех рефлексивных шкал $\mathbf{T}$, логика всех транзитивных шкал $\mathbf{K4}$.

Определение 16. Пусть $\mathcal{F}$ — хорнов класс шкал Крипке, $F = (W, R)$ — шкала. Определим $\mathcal{F}$ -замыкание шкалы F как шкалу $\mathcal{F}' = (W, R')$, где $R' \subseteq W \times W$ — минимальное по включению отношение, удовлетворяющее условиям:

1. $R \subseteq R'$;
2. $(W, R') \in \mathcal{F}$.

Определение 17. Если L — хорнова модальная логика, то $\text{Fr}(L)$ -замыкание шкалы Крипке называется ее L -замыканием.

Определение 18. Для любого хорнова класса $\mathcal{F}$ и любой шкалы F , $\mathcal{F}$ -замыкание шкалы F существует.

Доказательство. Пусть $F = (W, R)$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех отношений $R' \subseteq W \times W$, таких что $R \subseteq R'$ и $(W, R') \in \mathcal{F}$.

Заметим, что для любого хорнова предложения H максимальное отношение $W \times W$ удовлетворяет H , так как оно удовлетворяет правой части любой импликации вида (1). Тогда $W \times W \in \mathcal{R}$, так что $\mathcal{R} \neq \emptyset$.

Пусть $R^* = \bigcap \mathcal{R}$. Тогда $R \subseteq R^*$. Покажем, что $(W, R^*) \in \mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{H}$ — множество универсальных хорновых предложений, определяющее $\mathcal{F}$. Рассмотрим любое предложение $H \in \mathcal{H}$. Пусть

$x, y \in W$ удовлетворяет левой части импликации в H . Тогда $(x, y) \in R'$ для любого $R' \in \mathcal{R}$, поскольку (W, R') удовлетворяет H . Таким образом, $(x, y) \in \bigcap_{R' \in \mathcal{R}} R' = R^*$, что и требовалось.

По построению $R^*, R^* \subseteq R'$ для любого $R' \in \mathcal{R}$. Следовательно, (W, R^*) является $\mathcal{F}$ -замыканием F . $\square$

Обозначим $\mathcal{F}$ -замыкание шкалы F символом $\overline{F}^{\mathcal{F}}$; если $\mathcal{F} = \text{Fr}(\Gamma)$ для некоторой логики $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$, то мы также будем обозначать его $\overline{F}^{\Gamma}$.

1.1.4. Почти достоверные логики.

Определение 19. Пусть $\mathcal{F}$ — хорнов класс шкал Крипке.

1. Формула $\varphi \in \mathcal{ML}$ называется асимптотически почти достоверной в классе $\mathcal{F}$, если $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \varphi$ асимптотически почти наверное. Обозначение: $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \varphi$.

2. Почти достоверной логикой класса $\mathcal{F}$ называется множество формул

$$\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F}) = \{\varphi \in \mathcal{ML} : \overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \varphi\}.$$

3. Если L — хорнова нормальная логика, то почти достоверная логика $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ обозначается $\overline{L}^{\text{as}}$.

Пример 20. Класс $\mathcal{KF}$ всех шкал Крипке является хорновым классом, $\mathcal{KF} = \text{Fr}(\mathbf{K})$, и для любой шкалы Крипке F верно $\overline{F}^{\mathbf{K}} = F$. Тогда по определению

$$\mathbf{K}^{\text{as}} = \{\varphi \in \mathcal{ML} : F_n^r \models^{\text{as}} \varphi\}.$$

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ ДОСТОВЕРНЫХ ЛОГИК

В этом разделе мы докажем несколько общих свойств логики $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ для произвольного хорнова класса $\mathcal{F}$.

Предложение 21. Для любого хорнова класса $\mathcal{F}$, $\text{Log}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$.

Доказательство. По определению хорнова замыкания, каждое наблюдаемое значение случайной шкалы $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ является шкалой, принадлежащей $\mathcal{F}$. Пусть $\varphi \in \text{Log}(\mathcal{F})$, тогда φ общезначима в любой шкале $\mathcal{F}$. Так как $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ почти наверное, то также $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \varphi$ почти наверное. Тогда по определению $\varphi \in \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$. $\square$

Предложение 22. $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ — нормальная модальная логика.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{K}$. Тогда φ общезначима в любой шкале Крипке. В частности, φ общезначима в любом наблюдаемом значении $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \varphi$. В силу произвольности $\varphi \in \mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$.

Покажем, что $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правил вывода. Доказательство аналогично для обоих правил вывода, так что мы приведем его только для *Modus ponens*.

Пусть $\varphi \in \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ и $\varphi \rightarrow \psi \in \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим A_n и B_n множества наблюдаемых значений $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$, в которых общезначимы формулы φ и $\varphi \rightarrow \psi$, соответственно. Тогда $P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in A_n) \rightarrow 1$ и $P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in B_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in A_n \cap B_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in A_n^c \cup B_n^c)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin A_n) + \\ &\quad + P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin B_n))) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin A_n) - \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin B_n) \\ &= 1 - 0 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Пусть $F \in A_n \cap B_n$. Тогда $F \models \varphi$ и $F \models \varphi \rightarrow \psi$. По правилу вывода **MP**, $F \models \psi$. Тогда ψ общезначима в $A_n \cap B_n$. Так как $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ почти наверное, $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \psi$, что и требовалось доказать. $\square$

Горанко установил связь между почти достоверной логикой $\mathbf{K}^{\text{as}}$ класса всех конечных шкал Крипке и почти достоверной логикой $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$ случайной счетной шкалы Крипке [12]. Мы покажем, что такая же связь имеет место для произвольной хорновой логики.

Определение 23. 1. Определим модальные формулы

- (a) $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_2 := \Box^2 p \rightarrow p$;
- (b) $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_3 := \Box^2 p \rightarrow \Box^3 p$;
- (c) $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_4 := p \rightarrow \Box^2 \Diamond^2 p$.

2. Определим семейство модальных формул

$$\text{MODEXT}_n := \bigwedge_{i=1}^n \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i) \rightarrow \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^n (\Diamond p_i \wedge q_i),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

3. Определим модальную логику

$$\mathbf{ML}^{\mathcal{F}} = \mathbf{K} + \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_2 + \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_3 + \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_4 + \{\text{MODEXT}_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Логика $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$ вводится в статье [11] как почти достоверная логика случайной счетной шкалы Крипке.

Следующее предложение дает семантические условия общезначимости логики $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$. С помощью этих условий мы покажем, что $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$ не конечно аксиоматизируема.

Обозначение. $\nabla_W = W \times W$; $\nabla_n = \nabla_{W_n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 24. [12] Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Если $R^2 = \nabla_W$, то $F \models \{\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_2, \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_3, \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_4\}$.

Лемма 25. Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, такая что $R^2 = W \times W$, и пусть $m \in \mathbb{N}$. Семейство формул MODEXT_m общезначимо в F тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \dots, x_m \in W$ выполнено

$$\bigcap_{j=1}^m (R(x_j) \cap R^{-1}(x_j)) \neq \emptyset. \quad (2)$$

Это условие означает, что для любых $x_1, \dots, x_m$ существует точка y , которая R -достижима из всех точек $x_1, \dots, x_m$, и все эти точки R -достижимы из y . Это частный случай свойства Ext_m .

Доказательство. Пусть $R^2 = \nabla_W$. Предположим, что условие (2) выполнено в F . Пусть V — оценка на шкале F , $x \in F$, и

$$F, V, x \models \bigwedge_{i=1}^m \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i).$$

Тогда существуют $x_1, \dots, x_m \in W$, такие что $x_i \in V(p_i)$ и $R(x_i) \subseteq V(q_i)$ для любого $i = 1, \dots, m$. По условию (2) существует $y \in \bigcap_{i=1}^m (R(x_i) \cap R^{-1}(x_i))$. Так как $y \in R(x_i)$, имеем $y \in V(q_i)$, а из $y \in R^{-1}(x_i)$ следует $F, V, y \models \Diamond p_i$ для любого i . Тогда $F, V, y \models \Diamond p_i \wedge q_i$ для всех i . Наконец, поскольку $R^2 = \nabla_W$, имеем $y \in R^2(x)$, следовательно

$$F, V, x \models \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^m (\Diamond p_i \wedge q_i).$$

Так как V и x выбраны произвольно, MODEXT_m общезначимы в F .

Обратно, предположим, что условие (2) не выполнено в F , тогда существуют $x_1, \dots, x_m \in W$, такие что

$$\bigcap_{i=1}^m (R(x_i) \cap R^{-1}(x_i)) = \emptyset. \quad (3)$$

Так как $R^2 = \nabla_W$, существует $x \in W$, такой что $x_1, \dots, x_m \in R^2(x)$. Определим оценку V : положим $V(p_i) = \{x_i\}$ и $V(q_i) = R(x_i)$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$F, V, x \models \bigwedge_{i=1}^m \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i).$$

Пусть $F, V, y \models q_i$ для любого $i = 1, \dots, m$. Тогда $y \in \bigcap_{i=1}^m R(x_i)$ по построению оценки V . Согласно (3), $y \notin R^{-1}(x_j)$ для некоторого j . Тогда $F, V, y \not\models \Diamond p_j$. Следовательно, формула $\bigwedge_{i=1}^m (\Diamond p_i \wedge q_i)$ не верна в y . Отсюда следует, что

$$F, V, x \not\models \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^m (\Diamond p_i \wedge q_i).$$

Тогда $F, V, x \notin \text{MODEXT}_m$, так что MODEXT_m не общезначима в F . $\square$

Предложение 26. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует шкала Крипке F_n , в которой общезначимы $\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4$ и MODEXT_j для всех $j < n$, но $F_n \notin \text{MODEXT}_n$.

Доказательство. Пусть $F_n = (W_n, R)$, где $R = \nabla_n \setminus Id_{W_n}$.

Для любого $i = 1, \dots, n$, $R^2(w_i) = R(W_n \setminus \{w_i\}) = W_n$, так что $R^2 = \nabla_n$. Следовательно, $F_n \models \{\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4\}$.

Пусть $U \subseteq W_n, |U| < n$. Тогда для любого $u \in U$, $R(u) = (R^{-1}(u)) = W_n \setminus \{u\}$, так что

$$\bigcap_{u \in U} R(u) \cap R^{-1}(u) = \bigcap_{u \in U} W_n \setminus \{u\} = W_n \setminus U \neq \emptyset.$$

Следовательно, F_n удовлетворяет условию (2) при $m < n$, так что MODEXT_m общезначима в F_n для любого $m < n$.

Заметим, что

$$\bigcap_{i=1}^n R(w_i) \cap R^{-1}(w_i) = \bigcap_{i=1}^n W_n \setminus \{w_i\} = W_n \setminus W_n = \emptyset,$$

так что F_n не удовлетворяет (2) при $m = n$, откуда следует $F_n \notin \text{MODEXT}_n$. $\square$

Следствие 27. ML^r не конечно аксиоматизируема.

Докажем, что $\text{ML}^r \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ для любого хорнового класса $\mathcal{F}$. Горанко доказал это для класса всех конечных шкал Крипке.

Лемма 28. [12] Случайная шкала $F_n^r = (W_n, R)$ удовлетворяет условию $R^2 = \nabla_n$ асимптотически почти наверное.

Лемма 29. Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Если $R^2 = \nabla_W$ и $R' \subseteq \nabla_W$ — любое отношение на W , такое что $R \subseteq R'$, то $F' = (W, R') \models \text{ML}^r$.

Доказательство. Достаточно показать, что формулы $\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4$ и $\{\text{MODEXT}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ общезначимы в F' . Поскольку $R'^2 \supseteq R^2 = \nabla_W$, модальность $\Box^2$ эквивалентна универсальной модальности в F' . Следовательно, формулы $\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4$ общезначимы в F' .

Так как $R'^2 = \nabla_W$, для любого $n \in \mathbb{N}$ формула MODEXT_n общезначима в F' тогда и только тогда, когда F' удовлетворяет (2). Это условие сохраняется при расширении отношения R :

$$\begin{aligned} R' \supseteq R &\implies \bigcap_{j=1}^n R'(x_j) \cap R'^{-1}(x_j) \supseteq \\ &\supseteq \bigcap_{j=1}^n R(x_j) \cap R^{-1}(x_j) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Так как $F \models \{\text{MODEXT}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, F удовлетворяет условию (2) для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда F' также удовлетворяет (2), следовательно $F' \models \text{MODEXT}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Предложение 30. Для любого хорнового класса $\mathcal{F}$, $\text{ML}^r \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — хорнов класс. Так как отношение шкалы $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ является надмножеством отношения в F_n^r , логика ML^r общезначима в $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ тогда, когда она общезначима в F_n^r . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$P\{\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \text{ML}^r\} \geq P\{F_n^r \models \text{ML}^r\},$$

и поскольку $F_n^r \models^{\text{as}} \text{ML}^r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \text{ML}^r\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{F_n^r \models \text{ML}^r\} = 1,$$

так что $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \text{ML}^r$. $\square$

Общие результаты, полученные в этом разделе, позволяют получить частичные аксиоматизации для логик почти достоверных формул в хорновых классах. Примером могут служить хорновые классы рефлексивных, симметричных и рефлексивно-симметричных шкал.

3. ПСЕВДОТРАНЗИТИВНЫЕ ЛОГИКИ

В этом разделе мы покажем, что для любого хорнового класса, логика которого псевдотранзитивна, выполнен закон нуля и единицы. Логика почти достоверных формул в таких классах совпадает с **S5**.

Обозначение. Определим сокращения модальных формул:

$$\Diamond^0 \varphi = \varphi, \quad \Diamond^{i+1} \varphi = \Diamond \Diamond^i \varphi, \quad i > 1.$$

Определение 31. Логика L называется m -псевдотранзитивной, если она содержит формулу $\Diamond^m p \rightarrow \Diamond p$, где $m \geq 2$, и псевдотранзитивной, если она m -псевдотранзитивна для какого-либо $m \geq 2$.

Пример 32. Логика всех транзитивных шкал **K4** = **K** + $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ является минимальной 2-псевдотранзитивной логикой.

Легко видеть, что формула $\Diamond^m p \rightarrow \Diamond p$ общезначима в шкале $F = (W, R)$ тогда и только тогда, когда $R^m \subseteq R$. Это условие является хорновым, так как задается формулой:

$$\forall x_0, \dots, x_m (x_0 R x_1, \dots, x_{m-1} R x_m \rightarrow x_0 R x_m).$$

Предложение 33. Для любой псевдотранзитивной хорновой логики L асимптотически почти наверное выполнено $\overline{F}_n^L = (W_n, \nabla_n)$.

Доказательство. По предложению 12, шкала $F_n^r = (W_n, R)$ асимптотически почти наверное удовлетворяет условию Ext_2 , из которого следует, что для любой пары различных точек $x, y \in W_n$ существует рефлексивная точка $z \in W_n$, которая соединяет их в F_n^r : xRz и zRy . Так как z рефлексивна, $zR^k z$ для любого $k \geq 0$, так что $xR^{k+2}y$ для любого k . Аналогично, из свойства Ext_1 вытекает, $xR^{k+2}y$ выполнено при $x = y$ для любого $k \geq 0$. Следовательно, $\nabla_n \subseteq R^m$ для любого $m \geq 2$ асимптотически почти наверное.

Пусть логика L m -псевдотранзитивна. Обозначим через $\bar{R}$ отношение шкалы $\bar{F}_n^{rL}$. Тогда $R \subseteq \bar{R}$ и $\bar{R}^m \subseteq \bar{R}$. Асимптотически почти наверное имеем

$$\nabla_n \subseteq R^m \subseteq \bar{R}^m \subseteq \bar{R},$$

так что $\bar{F}_n^{rL} = (W_n, \nabla_n) = (W_n, \nabla_n)$ асимптотически почти наверное. $\square$

Докажем, что $L^{as} = S5$ для любой псевдотранзитивной хорновой логики, с помощью леммы о р-морфизме.

Определение 34. Пусть $F = (W, R)$ и $G = (W', R')$ — шкалы Крипке. Сюръекция $f: W \rightarrow W'$ называется r -морфизмом из F в G , если для любого $x \in W$ верно $f(R(x)) = R'(f(x))$.

Лемма 35. [14] Пусть F и G — шкалы Крипке. Если существует r -морфизм из F в G , то $\text{Log}(F) \subseteq \text{Log}(G)$.

Лемма 36. $\text{Log}(W_n, \nabla_n) \subseteq \text{Log}(W_m, \nabla_m)$ для любых $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$.

Доказательство. Если $n \geq m$, то существует сюръекция $f: W_n \rightarrow W_m$. Тогда для любого $x \in W_n$,

$$f(\nabla_n(x)) = f(W_n) = W_m = \nabla_m(f(x)),$$

так что f является r -морфизмом. Тогда утверждение верно по лемме 35. $\square$

Теорема 37. Для любой псевдотранзитивной хорновой логики L ,

$$\bar{L}^{as} = S5.$$

Доказательство. Заметим, что из предложения 33 следует $\bar{F}_n^{rL} \models^{as} S5$, так как ∇_n — отношение эквивалентности. Таким образом, $S5 \subseteq \bar{L}^{as}$.

Покажем, что $\bar{L}^{as} \subseteq S5$. Известно, что $S5 = \text{Log}\{(W_n, \nabla_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Если $\varphi \notin S5$, то $(W_m, \nabla_m) \not\models \varphi$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда по предложению 33 и лемме 36, $\bar{F}_n^{rL} \not\models \varphi$ асимптотически почти наверное. Тогда $\varphi \notin \bar{L}^{as}$. $\square$

Теорема 38. Пусть L — псевдотранзитивная хорнова логика. Тогда для $\bar{F}_n^{rL}$ выполнен закон нуля и единицы:

$$\forall \varphi \in \mathcal{ML} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{F}_n^{rL} \models \varphi) \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. По теореме 37, для любая формула $\varphi \in S5$ общезначима в $\bar{F}_n^{rL}$ асимптотически почти наверное.

Предположим, $\varphi \notin S5$. Так как $S5 = \text{Log}\{(W_n, \nabla_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выполнено $(W_m, \nabla_m) \not\models \varphi$. По лемме 36, $(W_n, \nabla_n) \not\models \varphi$ для любого $n \geq m$. Тогда при $n \geq m$,

$$P(\bar{F}_n^{rL} \not\models \varphi) \geq P(\bar{F}_n^{rL} = (W_n, \nabla_n)) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

по предложению 33, так что $P(\bar{F}_n^{rL} \models \varphi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

4. ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫ ЛОГИКИ

В этом разделе мы установим аналогичные результаты для псевдоевклидовых логик.

Определение 39. Логика L называется m -псевдоевклидовой, если она содержит формулу

$$\Diamond^m \Box p \rightarrow \Box^m p,$$

где $m \geq 1$, и псевдоевклидовой, если она является m -псевдоевклидовой для какого-либо $m \geq 1$.

Пример 40. Логика $K5 = K + \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$ является минимальной 1-псевдоевклидовой логикой.

Логика шкалы (W, R) m -псевдоевклидова тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y, z \in W (zR^m x, zR^m y \rightarrow xRy). \quad (4)$$

Заметим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ данное условие является хорновым.

Предложение 41. Для любого $m \in \mathbb{N}$ случайная шкала $F_n^r = (W_n, R)$ асимптотически почти наверное удовлетворяет условию:

$$\forall x, y \in W_n \exists z \in W_n (zR^m x \wedge zR^m y).$$

Доказательство. Данное условие выполнено, если для любых x и y существует рефлексивная точка z , такая что zRy и zRx . Тогда это условие следует из свойств Ext_1 и Ext_2 , которыми шкала F_n^r обладает асимптотически почти наверное по предложению 12. $\square$

Предложение 42. Для любой псевдоевклидовой хорновой логики L асимптотически почти наверное выполнено $\bar{F}_n^{rL} = (W_n, \nabla_n)$.

Доказательство. Пусть L — m -псевдоевклидова хорнова логика, $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через R и $\bar{R}$ отношения шкал F_n^r и $\bar{F}_n^{rL}$ соответственно. По предложению 41 асимптотически почти наверное для любых $x, y \in W_n$ существует $z \in W_n$, такая что $x, y \in R^m(z)$. По определению замыкания, $R \subseteq \bar{R}$, так что $R^m \subseteq \bar{R}^m$, следовательно $z\bar{R}^m x$ и $z\bar{R}^m y$. Так как шкала $\bar{F}_n^{rL}$ псевдоевклидова, отсюда следует $x\bar{R}y$. В силу произвольности $x, y \in W_n$, имеем $\bar{R} = \nabla_n$. $\square$

Теорема 43. Пусть L — псевдоевклидова хорнова логика. Тогда $\overline{L}^{\text{as}} = S5$.

Доказательство. Аналогично теореме 37, данная теорема следует из утверждения 41. $\square$

Теорема 44. Пусть L — псевдоевклидова хорнова логика. Тогда для $\overline{F}_n^L$ выполнен закон нуля и единицы:

$$\forall \varphi \in \mathcal{ML} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^L \models \varphi) \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. Аналогично теореме 38. $\square$

5. ЛОГИКИ T^{as} , KB^{as} , TB^{as}

В этом разделе мы рассмотрим примеры хорновых логик, для которых почти достоверная логика замыкания не равна $S5$.

Определение 45. Определим модальные логики

1. $T = K + \Diamond p \rightarrow p$;
2. $KB = K + \Diamond \Box p \rightarrow p$;
3. $TB = K + \Diamond p \rightarrow p + \Diamond \Box p \rightarrow p$.

Логика T , KB , TB хорновы: они определяют классы рефлексивных, симметричных и рефлексивно-симметричных шкал, соответственно. Для их замыканий справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \overline{(W, R)}^T &= (W, R \cup Id_W); \\ \overline{(W, R)}^{KB} &= (W, R \cup R^{-1}); \\ \overline{(W, R)}^{TB} &= (W, R \cup R^{-1} \cup Id_W), \end{aligned}$$

где (W, R) — любая шкала Крипке; $R^{-1} = \{(a, b) \in W \times W \mid bRa\}$.

Заметим, что логика $S5$ псевдотранзитивна и псевдоевклидова. Мы докажем, что T^{as} , KB^{as} и TB^{as} не обладают обоими свойствами.

Предложение 46. Логика T^{as} , KB^{as} , TB^{as} не псевдотранзитивны.

Доказательство. Пусть фиксированная шкала $F = (W_n, R)$ обладает свойством Ext_2 . Рассмотрим произвольную $x \in W_n$. По свойству Ext_2 существует точка $y \in W_m$, такая что xRy , yRy и yRx . Далее, по свойству Ext_2 найдется $z \in W_n$, такая что yRz , xRz , zRx , zRy . В частности, $z \neq x$ и $z \neq y$.

Пусть S — любое из отношений $R \cup Id_{W_n}$, $R \cup R^{-1}$, $R \cup R^{-1} \cup Id_W$. Тогда для любого $m \geq 2$ выполнено $xS^m z$ и $xS^m z$. Следовательно, $S^m \not\subseteq S$, так что логика шкалы (W_n, S) не m -псевдотранзитивна для любого $m \geq 2$.

По предложению 12, шкала F_n^r обладает свойством Ext_2 асимптотически почти наверное. Таким образом, асимптотически почти наверное формула $\Diamond^m p \rightarrow \Diamond p$ опровергается в $\overline{F}_n^L$ для любой $L \in \{T, KB, TB\}$, откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

Предложение 47. Логика T^{as} , KB^{as} , TB^{as} не псевдоевклидовы.

Доказательство. Пусть $F = (W_n, R)$ обладает свойством Ext_2 . Тогда найдутся $y, z \in W_n$, такие что yRz и zRy . По свойству Ext_2 существует точка $x \in W_n$, такая что xRx , xRy , xRz , yRx , zRx .

Пусть $S \in \{R \cup Id_{W_n}, R \cup R^{-1}, R \cup R^{-1} \cup Id_W\}$, тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $xS^m y$, $xS^m z$, но $yS^m z$, так что логика шкалы (W_n, S) не псевдоевклидова.

Так как случайная шкала F_n^r обладает свойством Ext_2 асимптотически почти наверное по предложению 12, аналогично предыдущему предложению заключим, что T^{as} , KB^{as} , TB^{as} не псевдоевклидовы. $\square$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Мы показали, что $S5$ является почти достоверной логикой любого класса, определяемого псевдотранзитивной или псевдоевклидовой хорновой логикой, и для этих классов справедлив закон нуля и единицы. Примерами таких логик являются известные системы $K4$ и $K5$. Наш результат демонстрирует то, как сильные условия псевдоевклидовости и псевдотранзитивности существенно упрощают комбинаторное поведение шкал. В нашей модели почти все псевдотранзитивные или псевдоевклидовы шкалы имеют максимальное отношение ∇_n . Таким образом, псевдотранзитивные и псевдоевклидовы замыкания стирают различия между промежуточными логиками, такими как $S4$ и $K45$. Представляет интерес описание множества всех хорновых логик, для которых $S5$ является почти достоверной логикой.

Более слабые хорновы логики, такие как логика рефлексивных шкал T , симметричных шкал KB и рефлексивно-симметричных шкал TB , демонстрируют сложное поведение. Мы показали, что T^{as} , KB^{as} и TB^{as} не псевдотранзитивны и не псевдоевклидовы. Частичные аксиоматизации этих логик можно получить по утверждению 30, однако проблема их полной аксиоматизации остается открытой. В статье [12], посвященной почти достоверной логике всех конечных шкал, высказывается предположение, что эта логика не конечно аксиоматизируема и, возможно, даже не рекурсивно аксиоматизируема. Так как распределение T -, KB -, и TB -замыкания шкалы F_n^r тесно связано с распределением самой F_n^r , мы предполагаем, что те же проблемы имеют место и для почти достоверных логик соответствующих классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Легонький М. И., Таланов В. А. Область и степень реализуемости формул ограниченного исчисления предикатов. Кибернетика, 5:142–154, 1969.

2. *Fagin Ronald* Probabilities on finite models. Journal of Symbolic Logic, 41(1):50–58, 1976.
3. *Halpern Joseph Y., Kapron Bruce* Zero-one laws for modal logic. Annals of Pure and Applied Logic, 69(2):157–193, 1994.
4. *Le Bars Jean-Marie*. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. Proceedings — Symposium on Logic in Computer Science, pages 225–234, 02 2002.
5. *Verbrugge Rineke*. Zero-one laws for provability logic: Axiomatizing validity in almost all models and almost all frames. In 2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2021, Proceedings - Symposium on Logic in Computer Science. IEEE Xplore, June 2021.
6. *Halpern Joseph Y., Kapron Bruce*. Erratum to “zero-one laws for modal logic”. Annals of Pure and Applied Logic - APAL, 121:281–283, 06 2003.
7. *Le Bars Jean-Marie*. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. Proceedings - Symposium on Logic in Computer Science, pages 225 – 234, 02 2002.
8. *Le Bars Jean-Marie*. Counterexamples of the 0-1 law for fragments of existential second-order logic: An overview. Bulletin of Symbolic Logic, 6, 03 2000.
9. *Popova Svetlana, Zhukovskii Maksim*. Existential monadic second order logic of undirected graphs: a disproof of the Le Bars conjecture. Annals of Pure and Applied Logic, 170:505–514, 2019.
10. *Gaifman Haim*. Concerning measures in first order calculi. Israel Journal of Mathematics, 2:1–18, 1964.
11. *Goranko Valentin, Kapron Bruce*. The modal logic of the countable random frame. Archive for Mathematical Logic, 42, 10 2001.
12. *Goranko Valentin*. The modal logic of almost sure frame validities in the finite. In AiML, 2020.
13. *Ebbinghaus Heinz-Dieter, Flum Jörg*. Finite Model Theory. Perspectives in Mathematical Logic. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
14. *Blackburn Patrick, de Rijke Maarten, Venema Yde*. Modal logic. Studia Logica, 76(1):142–148, 2001.

MODAL LOGICS OF ALMOST SURE VALIDITIES AND ZERO-ONE LAWS IN HORN CLASSES

V.V. Sliusarev^a

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

Presendet by Academician of the RAS L. D. Beklemishev

In this paper we develop a method to study Horn classes of Kripke frames from a probabilistic perspective. We consider the uniform distribution on the set of all n -point Kripke frames. A formula is almost surely valid in a Horn class $\mathcal{F}$ if the probability that it is valid in the $\mathcal{F}$ -closure of a random n -point frame tends to 1 as $n \rightarrow \infty$. Such formulas constitute a normal modal logic. We show that for pseudotransitive and pseudoeuclidean closures this logic equals **S5**, and the zero-one law holds.

Keywords: modal logic, asymptotic probabilities, zero-one laws, Horn sentences, pseudotransitive relations.