

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. Академик РАН Ю. С. Попков^{1,2,*}

Получено 05.06.2024 г.

После доработки 11.07.2024 г.

Принято к публикации 23.08.2024 г.

Предлагается аналитический приближенный метод вычисления многомерных интегралов от аналитических подынтегральных функций, использующий аппроксимацию последних степенным рядом. Применение данного подхода трансформирует исходную систему нелинейных уравнений с интегральными компонентами в систему уравнений с полиномиальной левой частью. Развивается аналитический метод решения данного класса нелинейных уравнений, использующий абстрактные степенные ряды. Разработана последовательная рекуррентная процедура для аналитического решения указанного класса нелинейных уравнений.

Ключевые слова: интегральные компоненты, аналитические функции, степенные ряды Тейлора—Маклорена, неявные функции, параметрические семейства нелинейных уравнений.

DOI: 10.31857/S2686954324050103, **EDN:** XDIARE

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах тестирования и генерирования данных с заданными свойствами [1, 2], машинного обучения [4, 5, 8], и прогнозирования [6, 7] возникают математические модели, сформулированные в терминах систем уравнений с интегральными компонентами от аналитических функций. Уравнения подобного класса являются основой некоторых задач математической статистики и оценивания [9], энтропийной эконометрики [10], прогнозирования ценообразования финансовых инструментов [11] и др.

Вычисление многомерных интегралов и последующее решение уравнений с неизвестными свойствами представляет собой серьезную проблему, как алгоритмическую, так и ресурсную [12–15].

В данной работе развивается аналитический метод приближенного решения нелинейных уравнений с интегральными компонентами, основанный на использовании степенных рядов. Разработаны правила вычисления многомерных интегралов от аналитических функций и рекуррентная процедура решения систем нелинейных с полиномиальной левой частью.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим класс нелинейных уравнений относительно вектора $\mathbf{x}$, содержащих интегральные компоненты по параметрам $\mathbf{a}$ следующего вида:

$$\int_{\mathcal{A}} \psi(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})) d\mathbf{a} = 0, \quad j = \overline{1, J}. \quad (1)$$

В этих уравнениях:

- $\psi(f_j)$ — аналитическая функция от переменных f_j , принимающих значения в R^1 , и $\psi(0) = \psi_0$;
- $f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ — полиномы по двум группам переменных: $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \subset R^r$, степени $q(j)$, и $f_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ для всех $j = \overline{1, J}$;

- множество $\mathcal{A}$ — r -мерный параллелепипед в R^r со сторонами $(b - a)$, и объемом $v = (b - a)^r$.

Особенность рассматриваемого класса нелинейных уравнений состоит в том, в них входят, так называемые, интегральные компоненты — определенные многомерные интегралы r -го порядка по множеству $\mathcal{A}$. Используя специфику многомерного интегрирования, а именно, простую конфигурацию множеств определения интегралов, свойство аналитичности подынтегральных функций и полиномиальную структуру функций f_j разработан метод аналитического вычисления многомерных интегралов и последующего аналитического решения системы уравнений с полиномиальными нелинейностями. Развиваемый метод основан на степенном представлении аналитических функций и использовании абстрактных степенных рядов [16, 17].

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

²Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

*E-mail: popkov@isa.ru

3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Поскольку функция $\psi(f_j)$ — аналитическая от скалярной переменной f_j , то ее можно представить сходящимся на бесконечной числовой оси степенным рядом Тейлора-Маклорена:

$$\psi(f_j) = \psi_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^s \psi}{d f_j^s} \Big|_0 f_j^s. \quad (2)$$

В частности, если $\psi(f_j) = \exp(f_j)$, то

$$\psi(f_j) = \exp(f_j) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} f_j^s. \quad (3)$$

Если используется конечное число членов ряда, равное $S(i)$, то ошибка аппроксимации $\delta_S = |\exp(f_j) - \sum_{s=1}^{S(i)} \frac{(-1)^s}{s!} f_j^s|$ оценивается следующим неравенством [18]:

$$\delta_S = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \nu = \frac{M}{S(j) + 1} < 1, \quad -M \leq f_j \leq M. \quad (4)$$

По определению функции $f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ заданы полиномами степени $q(j)$. Последние построены из векторов, компоненты которых состоят из лексикографически упорядоченных произведений компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = & \sum_{k=1}^{q(j)} \sum_{(h_1+h_2+\dots+h_r)=k} a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r} B_{h_1, \dots, h_r}^{(i)} + \\ & + \sum_{(t_1+t_2+\dots+t_n)=k} x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} C_{t_1, \dots, t_n}^{(i)} + \\ & + \sum_{(h_1+h_2+\dots+h_r)+(t_1+\dots+t_n)=k} (a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r}) \times \\ & \times (x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}) D_{h_1, \dots, h_r; t_1, \dots, t_n}^{(i)}. \end{aligned} \quad (5)$$

В этом равенстве $B_{h_1, \dots, h_r}^{(j)}$, $C_{t_1, \dots, t_n}^{(j)}$, $D_{h_1, \dots, h_r; t_1, \dots, t_n}^{(j)}$ — заданные коэффициенты.

Совмещая равенства (2), (6), получим полином, который имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \psi(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = & \psi_0 - \sum_{m=1}^r a_m \tilde{A}_m^{(j)} + \sum_{l=1}^n x_l \tilde{B}_l^{(j)} + \\ & + \sum_{(m_1, m_2)=1}^r a_{m_1} a_{m_2} \tilde{A}_{m_1, m_2}^{(j)} + \sum_{(l_1, l_2)=1}^n x_{l_1} x_{l_2} \tilde{B}_{l_1, l_2}^{(j)} + \\ & + \sum_{m_1=1, l_1=1}^{r, n} a_{m_1} x_{l_1} \tilde{C}_{m_1, l_1}^{(j)} + \dots + \\ & + (\sum_{m=1}^r a_m \tilde{A}_m^{(j)} + \sum_{l=1}^n x_l \tilde{B}_l^{(j)} + \\ & + \sum_{(m_1, m_2)=1}^r a_{m_1} a_{m_2} \tilde{A}_{m_1, m_2}^{(j)} + \sum_{(l_1, l_2)=1}^n x_{l_1} x_{l_2} \tilde{B}_{l_1, l_2}^{(j)} + \\ & + \sum_{m_1=1, l_1=1}^{r, n} a_{m_1} x_{l_1} \tilde{C}_{m_1, l_1}^{(j)} + \dots)^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

В этом выражении коэффициенты $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, ... формируются из коэффициентов $B_{h_1, \dots, h_r}^{(j)}$, $C_{t_1, \dots, t_n}^{(j)}$, $D_{h_1, \dots, h_r; t_1, \dots, t_n}^{(j)}$ и коэффициентов ряда (3).

Из выражения (6) следует, что многомерный интеграл в (1) трансформируется в произведение одномерных интегралов от простых (степенных) функций следующего вида:

$$\begin{aligned} I_k(h_1, \dots, h_r) = & \int_A a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r} da_1 \dots da_r = \\ = & \int_a^b \dots \int_a^b a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r} da_1 \dots da_r, \quad \sum_{j=1}^r h_j = k. \end{aligned} \quad (7)$$

Если все показатели $(h_1, \dots, h_r) \geq 1$, то

$$I_k(h_1, \dots, h_r) = \prod_{j=1}^r \frac{b^{h_j+1} - a^{h_j+1}}{h_j + 1}. \quad (8)$$

Если среди показателей h_j , p показателей $(h_{t_1}, \dots, h_{t_p}) = 0$, то

$$I_k(h_1, \dots, h_r) = \prod_{j=1}^{r-p} \frac{b^{h_j+1} - a^{h_j+1}}{h_j + 1} \times (b - a)^p. \quad (9)$$

4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЛЕВОЙ ЧАСТЬЮ

В результате решения проблемы многомерного интегрирования левая часть системы уравнений (1) приобретает полиномиальную форму степени q :

$$\sum_{k=1}^q B^{[k]} \mathbf{x}^{[k]} = \Psi_0, \quad (10)$$

где:

- компоненты векторов $\mathbf{x}^{[k]}$ представляют собой лексикографически упорядоченные произведения $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$, где $h_1 + \dots + h_n = k$; размерность векторов $\mathbf{x}^{[k]}$ равна $w(k)$;
- матрица $B^{[k]}$, размером $(J \times w(k))$;
- вектор Ψ_0 имеет размерность, равную J — количеству уравнений в системе (1); его компоненты не зависят от переменной $\mathbf{x}$.

Аналитическое решение этого уравнения будем искать, формируя метод, адаптирующий и развивающий подход, основанный на свойствах абстрактных степенных рядов и неявных функций [16, 19, 17].

Определим семейство систем уравнений следующего вида:

$$\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon) = B^{[1]} \mathbf{x}^{[1]} + \varepsilon \sum_{k=2}^q B^{[k]} \mathbf{x}^{[k]} = \Psi_0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (11)$$

Пусть неявная функция $\mathbf{x}(\varepsilon)$, определяемая уравнением (11) для $\varepsilon \in [0, 1]$, единственна и аналитическая [16].

При $\varepsilon = 0$ имеем, так называемую, порождающую систему:

$$B^{[1]} \mathbf{x}^{[1]} = \Psi_0. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x} \in R^n$, и матрица $B^{[1]}$ имеет размер $(J \times n)$. Решение порождающей системы будем называть базовым решением

$$\mathbf{x}_{(\bullet)} = (B^{(1)})^{-1} \Psi_0. \quad (13)$$

При $\varepsilon = 1$ имеем исходную систему (10). Если $0 \leq \varepsilon \leq 1$, то решения систем этого семейства зависят от параметра ε , т.е. решения $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\varepsilon)$. Поскольку левая часть в уравнении (10) полиномиальная функция степени q , то она имеет q производных, т.е. является аналитической функцией.

В силу свойств неявной функции $\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon)$, обозначенных выше, будем искать решение этой системы уравнений в виде абстрактного степенного ряда по параметру ε , т.е.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{(\bullet)} + \varepsilon \mathbf{x}_{(I)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_{(II)} + \dots = \mathbf{x}_{(\bullet)} + \sum_{i=I, II, \dots} \varepsilon^i \mathbf{x}_{(i)}, \quad (14)$$

где $\mathbf{x}_{(\bullet)}$ – базовое решение, $\mathbf{x}_{(i)}$ – i -ая коррекция к базовому решению.

Для получения соответствующих коррекций к базовому решению подставим ряд (14) в уравнение (10) и рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & B^{[1]} \left(\mathbf{x}_{(\bullet)} + \sum_i \varepsilon^i \mathbf{x}_{(i)} \right) + \\ & + \varepsilon \sum_{k=2}^q B^{[k]} \left(\mathbf{x}_{(\bullet)} + \sum_i \varepsilon^i \mathbf{x}_{(i)} \right)^{[k]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Переформируем ее, учитывая определение базового решения $\mathbf{x}_{(\bullet)}$ и расположив члены в левой части по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \varepsilon \left(B^{[1]} \mathbf{x}_{(I)} + B^{[2]} \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(B^{(1)} \mathbf{x}_{(II)} + B^{[2]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} + 2 \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)}) \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(B^{[1]} \mathbf{x}_{(III)} + 2 B^{(2)} (\mathbf{x}_I \otimes \mathbf{x}_{(I)} + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(II)}) + \right. \\ & \left. + 3 B^{[3]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_I \otimes \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_I) \right) + \\ & + \dots + . \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь символ $\otimes$ означает кронекерово произведение векторов (матриц). Для того чтобы ряд в (16) обращался в ноль при любых значениях $\varepsilon \in [0, 1]$ необходимо обращение в ноль его коэффициентов. Отсюда получаем систему рекуррентных уравнений, определяющих соответствующие коррекции базисного решения.

Таким образом, доказана, с учетом теоремы 20.1 и 20.2 [16], следующая

Теорема 1. Пусть в уравнении (11) якобиан функции $\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ по переменной $\mathbf{x}$ не вырожден, т.е.

$$\det M(\mathbf{x}, \varepsilon) \neq 0, \text{ для всех } \mathbf{x} \in R^n, \varepsilon \in [0, 1], \quad (17)$$

где

$$M(\mathbf{x}, \varepsilon) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]. \quad (18)$$

Тогда решение уравнения (11) определяется рядом (14) при $\varepsilon = 1$ и коррекции базового решения в (14) определяются следующей последовательностью рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(I)} = & (B^{[1]})^{-1} B^{[2]} \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)}, \\ \mathbf{x}_{(II)} = & (B^{[1]})^{-1} B^{[2]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} + 2 \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)}), \\ \mathbf{x}_{(III)} = & (B^{[1]})^{-1} \left[2 B^{(2)} (\mathbf{x}_{(I)} \otimes \mathbf{x}_{(I)} + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(II)}) + \right. \\ & \left. + 3 B^{[3]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)} \otimes \mathbf{x}_{(I)} + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)}) \right], \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (19)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит аналитический метод вычисления многомерных интегралов и разработана рекуррентная процедура решения систем нелинейных уравнений с полиномиальной левой частью.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-15-2024-544).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mayers G. J. The Art of Software Testing. Joun Wiley & Sons, 1979.
2. Мицель А. А., Погуда А. А. Нейросетевой подход к задаче тестирования. Прикладная информатика, 2011. № 5(35).
3. Vapnik V. N. Statistical Learning Theory. Wiley, 1998.
4. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
5. Hastie T., Tibshirant R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning. Springer, 2009.
6. Vovk V., Shafer G. Good Randomized sequential probability forecasting is always possible. Journal of Royal Statistical Society B. 2005. V. 65. Part 5.
7. Hong T., Prinson P., Fan S., Zareijpour H., Tricoli A., Hyndman R. J. Probabilistic energy forecasting: Global Energy Forecasting Competition 2014 and beyond. Inter. Journal of Forecasting. 2016. V. 101(1).
8. Popkov Y. S., Popkov A. Y., Dubnov Y. A. Entropy Randomization in Machine Learning. CRC Press. 2023. P. 389.

9. Попков Ю. С., Попков А. Ю., Лысак Ю. Н. Оценивание характеристик рандомизированных статистических моделей данных (энтропийно-робастный подход). Автоматика и Телемеханика. 2013. № 11. С. 114–131.
10. Golan A., Judge G., Miller D. Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data. John Wiley & Sons. NY, 1996.
11. Avellaneda M. Minimum-relative-entropy calibration of asset-pricing models. International Journal of theoretical and applied finance. 1998. V. 1(04). P. 447–472.
12. Фролов А. С., Ченцов Н. Н. О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 4.
13. Соболев И. М. Численные методы Монте Карло. М.: Наука, 1973.
14. Рахматуллин Д. Я. Вычисление интегралов по многомерным областям на многопроцессорных вычислительных системах. Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 3. С. 117–124.
15. Дарховский Б. С., Попков А. Ю., Попков Ю. С. Метод пакетных итераций Монте Карло для решения систем нелинейных уравнений и неравенств. Автоматика и Телемеханика. 2015. № 5. С. 87–98.
16. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
17. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: УРСС, 2004.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962.
19. Люстерник Л. Ф., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

ANALYTIC METHOD FOR SOLVING ONE CLASS OF NONLINEAR EQUATIONS

Academician of the RAS Yu. S. Popkov^{a,b}

^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, Moscow, Russia

^b Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

The paper proposes an analytical approximate method for calculating multidimensional integrals of analytic integrand functions, using the approximation of the latter by a power series. This approach lets transforming the original system of nonlinear equations with integral components into a system of equations with a polynomial left-hand side. To solve equations of this class we developed an analytical method. A sequential recurrent procedure has been developed for the analytical solution of this class of nonlinear equations.

Keywords: integral components, analytic functions, Taylor–Macloren power series, implicit functions, parametric families of nonlinear equations.