МАТЕМАТИКА

УДК 517.938.5

ПОСТРОЕНИЕ ГЛАДКИХ ДУГ “ИСТОЧНИК-СТОК” В ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЫ

© 2024 г. **Е. В. Ноздринова[1],*, О. В. Починка[1],**, Е. В. Цаплина[1],*****

Представлено академиком РАН Д. В. Трещевым

Получено 05.03.2024 г.
После доработки 05.08.2024 г.
Принято к публикации 12.09.2024 г.

Хорошо известно, что группа классов отображений двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. При этом, класс $+1$ (-1) содержит все сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы и любые два диффеоморфизма одного класса диффеотопны, то есть соединяются гладкой дугой из диффеоморфизмов. С другой стороны, каждый класс отображений содержит структурно устойчивые диффеоморфизмы. Очевидно, что в общем случае дуга, соединяющая два диффеотопных структурно устойчивых диффеоморфизма, претерпевает бифуркации, разрушающие структурную устойчивость. В этом направлении особый интерес представляет вопрос о существовании соединяющей их устойчивой дуги — дуги, поточечно сопряженной дугам в некоторой своей окрестности. В общем случае, диффеотопные структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы не соединяются устойчивой дугой. В настоящей работе рассмотрены простейшие структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы — диффеоморфизмы “источник-сток”. Неблуждающее множество таких диффеоморфизмов состоит из двух гиперболических точек: источника и стока. В настоящей работе конструктивно доказано существование дуги, соединяющей два таких сохраняющих (меняющих) ориентацию диффеоморфизма, и целиком состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.

Ключевые слова: диффеоморфизм “источник-сток”, гладкая дуга, устойчивая дуга.

DOI: 10.31857/S2686954324050081, **EDN:** XDNVBT

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим двумерную сферу

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

и обозначим через $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ пространство всех диффеоморфизмов 2-сферы с C^1-топологией.

Гладкой дугой в пространстве $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ называют семейство $\{\phi_t\}$ диффеоморфизмов 2-сферы $\mathbb{S}^2$, составляющих диффеотопию $\Phi : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{S}^2$, то есть

$$\Phi(x, t) = \phi_t(x),\ x \in \mathbb{S}^2,\ t \in [0, 1],$$

при этом говорят, что дуга $\{\phi_t\}$ *соединяет диффеоморфизмы* ϕ_0 и ϕ_1.

Диффеоморфизмы $f, g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ называются *топологически сопряженными*, если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, что $hf = gh$.

Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ называется *структурно устойчивым*, если он обладает такой окрестностью $U \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$, что любой диффеоморфизм $g \in U$ топологически сопряжен с f.

Отношение связанности гладкой дугой определяет отношение эквивалентности на множестве $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ и разбивает его на два класса эквивалентности, состоящие из сохраняющих, меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно [1]. Каждый класс отображений содержит структурно устойчивые диффеоморфизмы (например, сдвиги на единицу времени градиентных потоков типичной функции Морса). Очевидно, что в общем случае дуга, соединяющая два диффеотопных структурно устойчивых диффеоморфизма, претерпевает бифуркации, разрушающие структурную устойчивость. В этом направлении особый интерес представляет собой вопрос о существовании дуги, не меняющей своих качественных

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”; Международная лаборатория динамических систем и приложений, Нижний Новгород, Россия*

* *E-mail: maati@mail.ru*

** *E-mail: olga-pochinka@yandex.ru*

*** *E-mail: ktsaplina11@mail.ru*

свойств при малых шевелениях (устойчивой дуги), вошедший в список 50 важнейших проблем динамических систем Дж. Палиса и Ч. Пью [2] под номером 33.

Согласно [3], гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги $\{\varphi_t\}$, $\{\varphi'_t\}$ называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы h: $[0,1] \to [0,1]$, H_t: $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ такие, что $H_t\varphi_t = \varphi'_{h(t)}H_t, t \in [0,1]$, и H_t непрерывно зависит от t.

Вообще говоря, диффеотопные структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы не соединяются устойчивой дугой [4]. В настоящей работе рассмотрены простейшие структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы — диффеоморфизмы “источник-сток”. Такие диффеоморфизмы имеют в точности две неподвижные точки: сток и источник, орбиты остальных точек асимптотически стремятся к стоку в прямом и к источнику в обратном времени. Сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы “источник-сток” попарно топологически, но не гладко, сопряжены (см., например, [5]).

Основным результатом настоящей работы является конструктивное доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Любые два сохраняющих (меняющих) ориентацию диффеоморфизма “источник-сток” соединяются гладкой дугой, состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.*

Аналогичный результат для сохраняющих ориентацию 3-диффеоморфизмов “источник-сток” получен Хр. Бонатти, В. Гринесом, В. Медведевым и О. Починкой [6]. Заметим, что полученный результат не допускает непосредственного обобщения на сферы размерности большей трех, ввиду возможного существования на таких сферах нескольких гладких структур. Так, в работе [6] показано, что при $n = 6$ существуют диффеоморфизмы рассматриваемого класса, которые не могут быть соединены устойчивой дугой.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Для любого подмножества X топологического пространства Y будем обозначать через $i_X : X \to Y$ *отображение включения*.

Для любого непрерывного отображения $\phi : X \to Y$ линейно связных топологических пространств X, Y будем обозначать через ϕ_*: $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ — *индуцированный отображением* ϕ *гомоморфизм*.

C^r-вложением ($r \geqslant 0$) многообразия X в многообразие Y называется отображение $\lambda : X \to Y$ такое, что $\lambda : X \to \lambda(X)$ — C^r-диффеоморфизм. При этом C^0-вложение называют *топологическим вложением*, а C^r-вложение ($r > 0$) — *гладким вложением*.

Два непрерывных отображения $\phi_0 : X \to Y$ и $\phi_1 : X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $\Phi : X \times [0,1] \to Y$ такое, что $\Phi(x,0) = \phi_0(x)$, $\Phi(x,1) = \phi_1(x)$. Отображение Φ называется *гомотопией* отображений ϕ_0 и ϕ_1. Если для каждого $t \in [0,1]$ отображение $\phi_t(x) = \Phi(x,t)$ является вложением топологического пространства X в топологическое пространство Y, то вложения ϕ_0 и ϕ_1 называются *изотопными*, отображение Φ — *изотопией*, а однопараметрическое семейство вложений $\{\phi_t\}$ — *дугой*, соединяющей вложение ϕ_0 с вложением ϕ_1. Если X и Y — гладкие многообразия, и изотопия Φ является гладким отображением, то Φ называют *диффеотопией*, а дугу $\{\varphi_t\}$ называют *гладкой*.

Носителем изотопии Φ (дуги $\{\phi_t\}$) называется множество

$$supp\,\{\phi_t\} = cl\{x \in X : \phi_t(x) \neq \phi_0(x) \text{ для некоторого } t \in (0,1]\}.$$

Гладкая дуга $\{\varphi_t\}$ называется *гладким произведением* гладких дуг $\{\phi_t\}$ и $\{\psi_t\}$ таких, что $\phi_1 = \psi_0$, если $\varphi_t = \begin{cases} \phi_{\tau(2t)}, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi_{\tau(2t-1)}, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $\tau : [0,1] \to [0,1]$ — гладкое монотонное отображение такое, что $\tau(s) = 0$ для $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{3}$ и $\tau(s) = 1$ для $\frac{2}{3} \leqslant s \leqslant 1$. Будем писать

$$\varphi_t = \phi_t * \psi_t.$$

Обозначим через $\mathrm{Diff}(X)$ пространство всех диффеоморфизмов гладкого многообразия X с C^1-топологией. Если X — ориентируемое многообразие, то обозначим через $\mathrm{Diff}_+(X), \mathrm{Diff}_-(X)$ множество всех сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно, и для любого подмножества $A(X) \subset \mathrm{Diff}(X)$ положим $A_\pm(X) = A(X) \cap \mathrm{Diff}_\pm(X)$.

Предложение 1 (Теорема Тома о продолжении изотопии, [7], Theorem 5.8). *Пусть Y — гладкое многообразие без края, X — гладкое компактное подмногообразие многообразия Y и $\{\phi_t : X \to Y, t \in [0,1]\}$ — гладкая дуга такая, что ϕ_0 — отображение включения X в Y. Тогда для любого компактного множества $Z \subset Y$, содержащего множество $\bigcup\limits_{t\in[0,1]} \varphi_t(X)$, существует гладкая дуга $\{\varphi_t\} \subset \mathrm{Diff}(Y)$ такая, что $\varphi_0 = id$, $\varphi_t|_X = \phi_t|_X$ для каждого $t \in [0,1]$ и $\varphi_t|_{Y\setminus Z} = id$.*

Предложение 2 ([8], Lemma de fragmentation). *Пусть $U = \{U_j\}$ — открытое покрытие замкнутого многообразия X и $\varphi : X \to X$ — диффеотопный тождественному отображению диффеоморфизм. Тогда существует разложение диффеоморфизма φ в композицию конечного числа диффеотопных тождественному отображению диффеоморфизмов*

$$\varphi = \phi_q \ldots \phi_2\phi_1$$

таких, что $supp\{\phi_{i,t}\} \subset U_{j(i)}$, $i \in \{1, \dots, q\}$, *где* $U_{j(i)} \in U$ *и* $\{\phi_{i,t}\}$ *— гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение с диффеоморфизмом* ϕ_i.

3. ГРУППЫ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

Группой классов отображений (mapping class group) топологического пространства X называется группа классов эквивалентности гомеоморфизмов X с точностью до изотопии. Если X — гладкое многообразие, то — группу классов эквивалентности диффеоморфизмов X с точностью до диффеотопии обозначим через $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$.

Предложение 3 ([1]). *Группа классов отображений сферы* $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)) \cong \mathbb{Z}_2$. *При этом, классы совпадают с множествами* $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ *и* $\mathrm{Diff}_-(\mathbb{S}^2)$*, соответственно.*

Для доказательства основного результата нам также понадобятся группы классов отображений двумерного тора $\mathbb{T}^2$ и бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$.

Предложение 4 ([9]). *Группа классов отображений двумерного тора* $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^2)) \cong GL(2,\mathbb{Z})$. *При этом классы совпадают с множествами* $\{h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^2) : h_* = A \in GL(2,\mathbb{Z})\}$.

Для описания представителя в каждом классе $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbb{K}^2))$ представим $\mathbb{K}^2$, как фактор-пространство $C/_\sim$, где $C = \{(e^{i2\pi\theta}, t)\colon\ \theta \in [0,1],\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ и $\sim$ — минимальное отношение эквивалентности, удовлетворяющее условию:

$$(e^{i2\pi\theta}, 0) \sim (e^{i2\pi(1-\theta)}, 1).$$

Пусть $p : C \to \mathbb{K}^2$ — естественная проекция. Определим диффеоморфизмы $\bar\alpha, \bar\beta : C \to C$ формулами

$$\bar\alpha(e^{i2\pi\theta}, t) = (e^{i2\pi\theta}, 1-t),$$

$$\bar\beta(e^{i2\pi\theta}, t) = \begin{cases} (e^{i2\pi\theta}, t),\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(e^{i(2\pi\theta+4\pi t)}), t\right),\ \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Положим $\alpha = p\bar\alpha p^{-1}, \beta = p\bar\beta p^{-1} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.

Предложение 5 ([10]). *Группа классов отображений бутылки Клейна* $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbb{K}^2)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. *При этом, представителями в каждом из четырех классов являются диффеоморфизмы* $id, \alpha, \beta, \alpha\beta$*, соответственно.*

4. ЛОКАЛЬНО МОДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ

Напомним, что через $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ мы обозначили множество всех диффеоморфизмов двумерной сферы

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

В силу предложения 3 группа $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2))$ состоит из двух классов эквивалентности $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ и $\mathrm{Diff}_-(\mathbb{S}^2)$ — сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов 2-сферы, соответственно.

Обозначим через $J(\mathbb{S}^2) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)$ множество всех диффеоморфизмов “источник-сток” и через $NS(\mathbb{S}^2) \subset J(\mathbb{S}^2)$ — те из них, которые имеют источник и сток, соответственно в северном $N(0,0,1)$ и южном $S(0,0,-1)$ полюсах.

Определим *модельный* диффеоморфизм $g_\pm \in NS_\pm(\mathbb{S}^2)$ формулой:

$$g_\pm(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4x_1}{5-3x_3}, \frac{4x_2}{\pm(5-3x_3)}, \frac{5x_3-3}{5-3x_3}\right).$$

Заметим, что на $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ диффеоморфизм $g_\pm$ гладко сопряжен линейному диффеоморфизму плоскости $\bar g_\pm \in \mathrm{Diff}_\pm(\mathbb{R}^2)$, заданному формулой:

$$\bar g_\pm(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2}, \pm\frac{x_2}{2}\right).$$

Именно, $\bar g_\pm = \vartheta_N g_\pm \vartheta_N^{-1}$, где $\vartheta_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ — стереографическая проекция, определенная формулой

$$\vartheta_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right). \tag{2}$$

Назовем диффеоморфизм $h \in NS(\mathbb{S}^2)$ *локально модельным* диффеоморфизмом сферы $\mathbb{S}^2$, если существуют окрестности U_h^N, U_h^S точек N, S, для которых $h|_{U_h^N \cup U_h^S} = g|_{U_h^N \cup U_h^S}$, где $g \in \{g_+, g_-\}$. Обозначим через $E_g \subset NS(\mathbb{S}^2)$ множество локально модельных диффеоморфизмов 2-сферы.

Лемма 1. *Для любого диффеоморфизма* $h \in E_g$ *существует единственный гомеоморфизм* $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ *со следующими свойствами:*

- $\gamma_h h = g\gamma_h$;
- $\gamma_h|_{U_h^N} = id$;
- $\gamma_h|_{\mathbb{S}^2 \setminus S}$ *— диффеоморфизм.*

Доказательство. Поскольку любой диффеоморфизм $h \in E_g$ совпадает с диффеоморфизмом g в окрестности U_h^N точки N, то положим $\gamma_h|_{U_h^N} = id$. Так как γ_h должен сопрягать диффеоморфизм h с диффеоморфизмом g на всей сфере $\mathbb{S}^2$, то

$$\gamma_h h^k(x) = g^k \gamma_h(x),\ x \in \mathbb{S}^2,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Поскольку для любой точки $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $h^{-k}(x) \in U_h^N$, то

$$\gamma_h(x) = g^k h^{-k}(x),\ x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}. \tag{4}$$

По непрерывности построенный диффеоморфизм продолжается на точку S условием $\gamma_h(S) = S$. □

Положим $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$. Обозначим через $\hat V_g$ пространство орбит действия диффеоморфизма g на V и через $p_g : V \to \hat V_g$ естественную проекцию. По построению поверхность $\hat{V}_g$ гомеоморфна бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$, если $g = g_-$ и гомеоморфна тору $\mathbb{T}^2$, если $g = g_+$. Пусть $a = \vartheta_N^{-1}(Ox_1)$ и $b = \vartheta_N^{-1}(\mathbb{S}^1)$ кривые на V. По построению замкнутая кривая b является образующей фундаментальной группы $\pi_1(V)$. Определим образующие фундаментальной группы $\pi_1(\hat{V}_g)$ формулами

$$\hat{a}_g = p_g(a), \hat{b}_g = p_g(b). \tag{5}$$

Естественная проекция $p_g : V \to \hat{V}_g$ индуцирует эпиморфизм $\eta_g : \pi_1(\hat{V}_g) \to \mathbb{Z}$ следующим образом. Пусть $\hat{c}$ — некоторая петля в $\hat{V}_g$ такая, что $\hat{c}(0) = \hat{c}(1) = \hat{x}_0$. Согласно теореме о монодромии (см., например, [11]), существует единственный путь c в V с началом в точке $x_0 = c(0) \in p_g^{-1}(\hat{x}_0)$, являющийся поднятием пути $\hat{c}$. Поэтому существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $x_1 = c(1) = g^k(x_0)$ и корректно определено (то есть не зависит от выбора петли в классе $[\hat{c}]$) отображение η_g, заданное формулой $\eta_g([\hat{c}]) = k$. По построению

$$\eta_g([\hat{a}_g]) = 1, \ \eta_g([\hat{b}_g]) = 0. \tag{6}$$

Для любого $r \in \mathbb{R}$ положим $\bar{B}_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \le r^2\}$, $\bar{K}_r = cl(\bar{B}_r \backslash \bar{B}_{\frac{r}{2}})$, $B_r = \vartheta_N^{-1}(\bar{B}_r)$, $K_r = \vartheta_N^{-1}(\bar{K}_r)$. Тогда для любого диффеоморфизма $h \in E_g$ существует действительное число $r_h > 0$, такое что $h|_{B_{r_h}} = g|_{B_{r_h}}$. Откуда следует, что

$$\gamma_h g|_{B_{r_h}} = g\gamma_h|_{B_{r_h}}. \tag{7}$$

Из соотношения (7) единственным образом определяется диффеоморфизм $\nu_h : V \to V$, коммутирующий с диффеоморфизмом g

$$\nu_h g = g \nu_h \tag{8}$$

и совпадающий с γ_h на B_{r_h}, то есть

$$\nu_h|_{B_{r_h}} = \gamma_h|_{B_{r_h}}. \tag{9}$$

Тогда (см., например, [11, Теорема 5.5]), существует единственный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\hat{\nu}_h : \hat{V}_g \to \hat{V}_g$, для которого диффеоморфизм ν_h является накрывающим, то есть

$$\hat{\nu}_h p_g = p_g \nu_h. \tag{10}$$

В следующей лемме описывается действие полученного диффеоморфизма на образующих.

Лемма 2. *Диффеоморфизм $\hat{\nu}_h$ индуцирует изоморфизм $\hat{\nu}_{h*} : \pi_1(\hat{V}_g) \to \pi_1(\hat{V}_g)$ со следующими свойствами:*

1. $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = 1$;

2. $\hat{\nu}_{h*}([\hat{b}_g]) = [\hat{b}_g]$.

Доказательство. Непосредственно из определения эпиморфизма η_g и формулы (10) получаем, что

$$\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{c}]) = \eta_g([\hat{c}]). \tag{11}$$

Тогда $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = \eta_g([\hat{a}_g])$ и, следовательно, в силу (6), $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = 1$. Поскольку $\pi_1(V) = \langle b \rangle = \{b^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, то $\nu_{h*}([b]) = [b]$. Откуда, в силу (5) и (11), $\hat{\nu}_{h*}[\hat{b}_g] = [\hat{b}_g]$. □

Пусть $h \in E_g$ и $w : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ — диффеоморфизм сферы, тождественный вне некоторого кольца K_r, $r < \frac{r_h}{2}$. Положим

$$\hat{w} = p_g w (p_g|_{K_r \backslash \partial B_r})^{-1}(\hat{x}). \tag{12}$$

По построению $wh \in E_g$ и следующая лемма выражает связь между диффеоморфизмами $\hat{\nu}_{wh}$ и $\hat{\nu}_h$.

Лемма 3. $\hat{\nu}_{wh} = \hat{\nu}_h \hat{w}^{-1}$.

Доказательство. Из формулы (10) следует, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \nu_{wh} (p_g|_{K_r \backslash \partial B_r})^{-1}(\hat{x}), \ \hat{x} \in \hat{V}_g. \tag{13}$$

Тогда $x = (p_g|_{K_r \backslash \partial B_r})^{-1}(\hat{x}) \in K_r$. Непосредственно проверяется, что диффеоморфизмы wh и h совпадают на всей сфере $\mathbb{S}^2$, за исключением внутренности кольца K_{2r} и, следовательно, $r_{wh} = r_h$, $U_{wh}^N = U_h^N$. Тогда из формул (9) и (13) следует, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \gamma_{wh}(x). \tag{14}$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}$ такое число, что $(wh)^{-k}(x) \in U_h^N$. Тогда из формулы (4) следует, что

$$\gamma_{wh}(x) = g^k (wh)^{-k}(x). \tag{15}$$

Поскольку диффеоморфизмы $(wh)^{-1}$ и h^{-1} совпадают на всей сфере $\mathbb{S}^2$, за исключением внутренности кольца K_r, то

$$(wh)^{-k} = h^{-k} w^{-1} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), учитывая формулу (9), получим, что

$$\gamma_{wh}(x) = g^k h^{-k} w^{-1}(x) = \gamma_h w^{-1}(x) = \nu_h w^{-1}(x). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (14), учитывая формулы (10) и (12), получаем, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \nu_h w^{-1}(x) = p_g \nu_h (p_g|_{K_r \backslash \partial B_r})^{-1} \times \\ \times p_g w^{-1} (p_g|_{K_r \backslash \partial B_r})^{-1}(\hat{x}) = \hat{\nu}_h \hat{w}^{-1}(\hat{x}).$$

□

Лемма 4. *Любой диффеоморфизм $h \in E_g$ соединяется гладкой дугой $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$ с диффеоморфизмом g.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что гомеоморфизм γ_h, совпадающий на B_{r_h} с диффеоморфизмом $\nu_h : V \to V$, является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, точки S. Тогда, если ν_h гладко продолжается на точку S так, что $\nu_h(S) = S$, то, в силу предложения 3, существует гладкая дуга $\{\rho_t\} \subset \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ такая, что $\rho_0 = \nu_h, \rho_1 = id$. Тогда искомая дуга ϕ_t определяется формулой

$$\phi_t = \rho_t^{-1} g \rho_t.$$

Случай, когда отображение ν_h не является гладким в точке S разобьем на два подслучая, в зависимости от класса диффеотопии отображения $\hat{\nu}_h : \hat{V}_g \to \hat{V}_g$: I) $\hat{\nu}_h$ диффеотопен тождественному отображению, II) $\hat{\nu}_h$ не диффеотопен тождественному отображению.

В случае I), используя рассуждения выше достаточно построить дугу h_t, соединяющую диффеоморфизм h с диффеоморфизмом h_1 таким, что ν_{h_1} — диффеоморфизм.

Выберем открытое покрытие $U = \{U_1, \cdots, U_q\}$ пространства орбит $\hat{V}_g$ такое, что $p_g^{-1}(U_i) \subset K_{r_i}$ для некоторого $r_i \in \mathbb{R}$. По лемме о фрагментации (предложение 2), существует разложение диффеоморфизма $\hat{\nu}_h$ в композицию конечного числа диффеотопных тождественному отображению диффеоморфизмов

$$\hat{\nu}_h = \hat{w}_q \ldots \hat{w}_2 \hat{w}_1$$

таких, что $supp\{\hat{w}_{i,t}\} \subset U_{j(i)}$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, где $U_{j(i)} \in U$ и $\{\hat{w}_{i,t}\}$ — гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение с диффеоморфизмом $\hat{w}_i$.

Пусть $w_{i,t}$: $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ — диффеоморфизм сферы, тождественный вне кольца $K_{r_{j(i)}}$ и определенный на кольце $K_{r_{j(i)}}$ формулой $w_{i,t}(x) = (p_g|_{K_{r_{j(i)}} \setminus \partial B_{r_{j(i)}}})^{-1} \hat{w}_{i,t} p_g(x)$. При этом, не уменьшая общности, будем считать, что значения $r_{j(i)}$ выбраны так, что $r_{j(i+1)} < \frac{r_{j(i)}}{2}$, $i = 1, \ldots, q$ и $r_{j(1)} < \frac{r_h}{2}$. Покажем, что $h_t = w_{q,t} \ldots w_{1,t} h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ — искомая дуга.

Действительно, по построению $h_t \in E_g$ для любого $t \in [0, 1]$. В силу леммы 3, $\hat{\nu}_{h_1} = \hat{\nu}_h \hat{w}_1^{-1} \times \times \hat{w}_2^{-1} \ldots \hat{w}_q^{-1} = id$. Из чего вытекает, что $\nu_{h_1} = g^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, ν_{h_1} — диффеоморфизм.

В случае II), используя рассуждения выше достаточно построить дугу h_t, соединяющую диффеоморфизм h с диффеоморфизмом h_1 таким, что $\hat{\nu}_{h_1}$ диффеотопен тождественному отображению. Рассмотрим два возможных случая: 1) $g = g_+$, 2) $g = g_-$.

В случае 1) $\hat{V}_g \cong \mathbb{T}^2$. Из предложения 4 и леммы 2 вытекает, что изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом $\hat{\nu}_h$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, где $n_0 \neq 0$. Зафиксируем $r < \frac{r_h}{2} \in \mathbb{R}$ и зададим диффеоморфизм $\mu : \mathbb{R} \to [0, 1]$ формулой

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \geqslant r, \\ 1 - \left(1 + e^{\frac{r^3\left(\frac{3r}{4} - x\right)}{8\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 (x-r)^2}}\right)^{-1}, \frac{r}{2} < x < r, \\ 1, x \leqslant \frac{r}{2} \end{cases}.$$

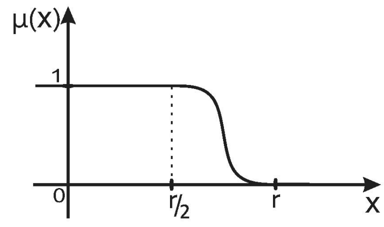

Рис 1. График функции $\mu(x)$

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ полярные координаты (ρ, φ) и зададим диффеоморфизм $\bar{\theta}_{n_0,t}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$\bar{\theta}_{n_0,t}(\rho e^{i\varphi}) = \rho e^{i(\varphi + 2n_0\pi t \mu(\rho))}.$$

Пусть $\theta_{n_0,t} = \vartheta_N^{-1} \bar{\theta}_{n_0,t} \vartheta_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$. Тогда $\theta_{n_0,t}$ гладко продолжается на $\mathbb{S}^2$ условием $\theta_{n_0,t}(S) = S$ и $h_t = \theta_{n_0,t} h$ — искомая дуга.

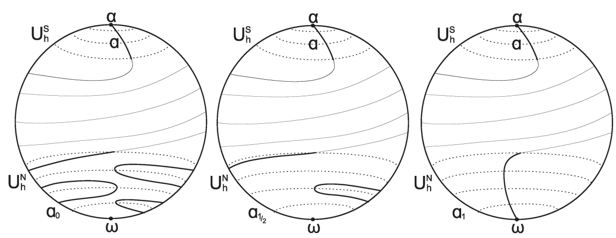

Рис 2. Кривые $a_t = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} h_t^n(a \cap U_h^N)$ для $t = 0, \frac{1}{2}, 1$.

В случае 2) $\hat{V}_g \cong \mathbb{K}^2$. Тогда из предложения 5 и леммы 2 следует, что изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом $\hat{\nu}_h$ принадлежит классу отображения β. Тогда $h_t = \theta_{1,t} h$ — искомая дуга (на рисунке изображены кривые $a_t = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} h_t^n(a \cap U_h^N)$ для $t = 0, \frac{1}{2}, 1$). □

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы “источник-сток”, $f, f' \in J(\mathbb{S}^2)$. Покажем, что существует дуга, которая целиком состоит из диффеоморфизмов класса $J(\mathbb{S}^2)$, их соединяющая. Для этого в лемме ниже мы построим дуги, соединяющие диффеоморфизмы f, f' с локально модельными диффеоморфизмами $h_f, h_{f'} \in E_{g_+}$ ($h_f, h_{f'} \in E_{g_-}$). Тогда искомая дуга будет являться произведением построенных гладких дуг с дугами, соединяющими диффеоморфизмы $h_f, h_{f'}$ с модельным диффеоморфизмом g_+ (g_-), существование последних следует из леммы 1.

Лемма 5. *Любой диффеоморфизм* $f \in J(\mathbb{S}^2)$ *соединяется гладкой дугой* $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$ *с диффеоморфизмом* $h \in E_g$.

Доказательство. Пусть $f \in J(\mathbb{S}^2)$ и неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из источника α и стока ω. Согласно [12] существует гладкая дуга $\{H_t \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^2)\}$ со следующими свойствами: $H_0 = id, H_1(N) = \alpha$ и $H_1(S) = \omega$. Тогда $H_t^{-1} f H_t$ — гладкая дуга, соединяющая диффеоморфизм f с диффеоморфизмом $H_1^{-1} f H_1 \in NS(\mathbb{S}^2)$.

В силу вышесказанного, не уменьшая общности будем считать, что $f \in NS(\mathbb{S}^2)$. Тогда, для доказательства леммы, достаточно построить дугу $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$, соединяющую диффеоморфизм $f \in NS(\mathbb{S}^2)$ с диффеоморфизмом $h \in E_g$. Мы покажем, как построить дугу $\{\phi_t^S\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$, соединяющую диффеоморфизм $f \in NS(\mathbb{S}^2)$ с диффеоморфизмом $h_S \in NS(\mathbb{S}^2)$, совпадающим с f в окрестности полюса N и с g — в окрестности полюса S. Аналогично строится дуга $\{\phi_t^N\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$, соединяющая диффеоморфизм h_S с диффеоморфизмом $h \in E_g$. Тогда искомая дуга — $\{\phi_t = \phi_t^S * \phi_t^N\}$.

Для построения дуги $\{\phi_t^S\}$ положим $\bar{f} = \vartheta_N \times \times f \vartheta_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Тогда диффеоморфизм $\bar{f}$ является сжатием к гиперболической точке O. В силу леммы Фрэнкса [13], [14] можно считать, что диффеоморфизм $\bar{f}$ в некоторой окрестности точки O совпадает с линейным отображением $\bar{Q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданным матрицей Q, которая либо является диагональной, либо имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1$. Если $\bar{Q} = \bar{g}$, то лемма доказана. В противном случае, в силу [15, Предложение 5.4] существует дуга $\bar{Q}_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ из линейных сжатий к гиперболической точке O, заданных матрицами Q_t такая, что $\bar{Q}_t(\bar{B}_r) \subset int\,\bar{B}_r$ для любого $r > 0$ и $\bar{Q}_0 = \bar{Q}$, $\bar{Q}_1 = \bar{g}$. Рассмотрим дугу $\{\xi_t = \bar{Q}_t \bar{Q}^{-1}\} \subset \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}^2)$, которая соединяет тождественное отображение $\xi_0 = id$ с диффеоморфизмом $\xi_1 = \bar{g}\bar{Q}^{-1}$, соответственно. Выберем положительные числа $r_1 > r_2$ так, что

$$\bar{f}|_{\bar{B}_{r_1}} = \bar{Q}|_{\bar{B}_{r_1}},\ \bar{Q}(\bar{B}_{r_1}) \subset \bar{B}_{r_2}.$$

Тогда, в силу предложения (1), существует дуга $\{\Xi_t\} \subset \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}^2)$ такая, что $\Xi_0 = id, \Xi_t|_{\bar{Q}(\bar{B}_{r_1})} = \xi_t|_{\bar{Q}(\bar{B}_{r_1})}$ и $\Xi_t|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_{r_1}} = id|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_{r_1}}$. Тогда $\{\bar{\phi}_t^S = \Xi_t \bar{f}\}$ — искомая дуга. □

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность участникам семинара международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 23-71-30008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Munkres J.* Differentiable isotopies on the 2-sphere // Michigan Mathematical Journal. 1960. V. 7. № 3. P. 193–197.
2. *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Dynamical Systems—Warwick 1974: Proceedings of a Symposium Held at the University of Warwick 1973/74. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. P. 345–353.
3. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Stable arcs of diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82. № 3. P. 499–502.
4. *Medvedev T. V., Nozdrinova E., Pochinka O.* Components of Stable Isotopy Connectedness of Morse ”— Smale Diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. V. 27. № 1. P. 77–97.
5. *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Dynamical systems on 2-and 3-manifolds // Cham: Springer. 2016. V. 46.
6. *Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pochinka O. V.* Bifurcations of Morse-Smale diffeomorphisms with wildly embedded separatrices // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 256. P. 47–61.
7. *Милнор Дж.* Теорема об h-кобордизме. 1969.
8. *Banyaga A.* On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms // Topology. 1977. V. 16. № 3. P. 279–283.
9. *Rolfsen D.* Knots and links // American Mathematical Soc., 2003. P. 346.
10. *Lickorish W. B. R.* Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press, 1963. V. 59. № 2. P. 307–317.
11. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии // М.: Изд-во Мир. 1983. Т. 304.
12. *Hirsch M. W.* Differential topology // Springer Science Business Media, 2012. V. 33.
13. *Franks J.* Necessary conditions for stability of diffeomorphisms // Transactions of the American Mathematical Society. 1971. V. 158. № 2. P. 301–308.
14. *Gourmelon N.* A Franks’ lemma that preserves invariant manifolds // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2016. V. 36. № 4. P. 1167–1203
15. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. 1986.

CONSTRUCTION OF SMOOTH “SOURCE-SINK” ARCS IN THE SPACE OF DIFFEOMORPHISMS OF A TWO-DIMENSIONAL SPHERE

E. V. Nozdrinova[a], O. V. Pochinka[a], E. V. Tsaplina[a]

[a] *National Research University Higher School of Economics, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Nizhny Novgorod, Russia*

Presented by Academician of the RAS D. V. Treschev

It is well known that the mapping class group of the two-dimensional sphere $\mathbb{S}^2$ is isomorphic to the group $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. At the same time, the class $+1$ (-1) contains all orientation-preserving (orientation-reversing) diffeomorphisms and any two diffeomorphisms of the same class are diffeotopic, that is, they are connected by a smooth arc of diffeomorphisms. On the other hand, each class of maps contains structurally stable diffeomorphisms. It is obvious that in the general case, the arc connecting two diffeotopic structurally stable diffeomorphisms undergoes bifurcations that destroy structural stability. In this direction, it is particular interesting in the question of the existence of a connecting them stable arc ”— an arc pointwise conjugate to arcs in some of its neighborhood. In general, diffeotopic structurally stable diffeomorphisms of the 2-sphere are not connected by a stable arc. In this paper, the simplest structurally stable diffeomorphisms (“source-sink” diffeomorphisms) of the 2-sphere are considered. The non-wandering set of such diffeomorphisms consists of two hyperbolic points: the source and the sink. In this paper, the existence of an arc connecting two such orientation-preserving (orientation-reversing) diffeomorphisms and consisting entirely of “source-sink” diffeomorphisms is constructively proved.

Keywords: “source-sink” diffeomorphism, smooth arc, stable arc.