

УДК 519.62, 532.5

СРАВНЕНИЕ ЗАТРАТ НА ГЕНЕРАЦИЮ ВОЛН ТОЛЛМИНА–ШЛИХТИНГА И ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ОПТИМАЛЬНОГО ВДУВА–ОТСОСА

© 2024 г. К. В. Демьянко^{1,2,*}, Ю. М. Нечепуренко^{1,2,**}, И. Г. Чечкин^{1,3,***}

Представлено академиком РАН Е. Е. Тыртышниковым

Получено 21.06.2024 г.

После доработки 09.08.2024 г.

Принято к публикации 13.08.2024 г.

Рассматривается задача генерации с заданной точностью волн Толлмина–Шлихтинга (ведущих собственных мод) и оптимальных возмущений с помощью оптимального вдува–отсоса на примере течения Пуазейля в канале квадратного сечения и гармонического по продольному направлению вдува–отсоса через стенки канала. Задача сводится к решению задач оптимального управления для линеаризованных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Впервые показано, что генерация оптимального возмущения при помощи вдува–отсоса значительно более затратна, чем генерация ведущей моды.

Ключевые слова: линейная система управления, течение в канале, вдув–отсос, ведущая мода, оптимальное возмущение, матричная экспонента, выпуклое программирование.

DOI: 10.31857/S2686954324050043, EDN: XEMGRW

1. В декартовых координатах (x, y, z) рассмотрим течение Пуазейля [1] в бесконечном вдоль x канале квадратного сечения $\Sigma = \{(y, z) : -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$. Нас будет интересовать генерация малых возмущений этого течения с помощью гармонического по x с заданным продольным волновым числом $\alpha \geq 0$ оптимального вдува–отсоса через стенки канала. Вектор сгенерированного возмущения скорости и отвечающее ему возмущение давления в рассматриваемом случае представимы в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \text{Real} \{ \mathbf{v}(y, z, t) e^{i\alpha x} \}, \\ p'(x, y, z, t) &= \text{Real} \{ p(y, z, t) e^{i\alpha x} \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ и p — комплекснозначные амплитуды, i — мнимая единица. Подставляя (1) в линеаризованные относительно основного течения уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, можно

получить следующие уравнения для амплитуд этих возмущений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla_0) \mathbf{V} - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

которые будем рассматривать в области Σ с граничными условиями:

$$\mathbf{v}(\pm 1, z, t) = (0, \eta_v^\pm(z, t), 0)^T, \quad \mathbf{v}(y, \pm 1, t) = (0, 0, \eta_w^\pm(y, t))^T.$$

Здесь η_v^+ , η_v^- , η_w^+ , η_w^- — моделирующие вдув–отсос достаточно гладкие функции, принимающие нулевые значения при значениях ± 1 первого аргумента, $\mathbf{V}$ — вектор скорости течения Пуазейля, Re — число Рейнольдса, определенное по максимальной скорости течения Пуазейля и полувысоте канала,

$$\nabla = \left(i\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \quad \nabla_0 = \left(0, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \quad \Delta = \nabla^T \nabla.$$

а T означает операцию транспонирования.

Для амплитуд вектора скорости и управления будем использовать следующие нормы:

$$\left(\int_{\Sigma} \mathbf{v}^* \mathbf{v} dy dz \right)^{1/2}, \quad (3)$$

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

³Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: kirill.demyanko@yandex.ru

**E-mail: yumnech@yandex.ru

***E-mail: ivan.chechkin@math.msu.ru

$$\left(\int_{-1}^1 (\eta_w^{+*} \eta_w^+ + \eta_w^{-*} \eta_w^-) dy + \int_{-1}^1 (\eta_v^{+*} \eta_v^+ + \eta_v^{-*} \eta_v^-) dz \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где * означает операцию транспонирования и комплексного сопряжения.

2. Аппроксимируем по пространству систему (2) методом коллокаций [2] на смещенных сетках (узлы Гаусса–Лобатто — для аппроксимации компонент скорости и узлы Гаусса — для давления), как это описано в работе [3]. Получим систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений следующего вида:

$$\frac{dv}{dt} = \left(J_1 + \frac{1}{\text{Re}} J_2 \right) v + Gp + C_v \eta, \quad Fv + C_p \eta = 0 \quad (5)$$

с матрицами $J_1, J_2 \in \mathbb{C}^{n_v \times n_v}$, $G \in \mathbb{C}^{n_v \times n_p}$, $F \in \mathbb{C}^{n_p \times n_v}$, $C_v \in \mathbb{C}^{n_v \times n_c}$, $C_p \in \mathbb{C}^{n_p \times n_c}$, где $n_v = 3n_y n_z$, $n_p = (n_y + 1) \times (n_z + 1)$, $n_c = 2(n_y + n_z)$, а n_y и n_z — числа внутренних узлов, используемых для аппроксимации компонент скорости по y и z соответственно. Здесь v и p — векторы значений во внутренних узлах амплитуд компонент скорости и давления, соответственно, η — дискретный аналог управления — вектор значений амплитуд нормальных к стенкам канала компонент скорости в граничных узлах, исключая узлы в углах сечения канала. Матрица G является дискретным аналогом градиента, матрицы J_1, J_2 и F — дискретными аналогами операторов переноса, Лапласа и дивергенции с нулевыми граничными условиями, соответственно, а матрицы C_v и C_p позволяют учесть ненулевые граничные условия для компонент скорости, нормальных к стенкам канала. Используя квадратурные формулы с весами Гаусса–Лобатто, дискретные аналоги норм (3) и (4) можно представить в виде $\|E v\|_2$ и $\|E_\eta \eta\|_2$ соответственно, где E и E_η — диагональные, положительно определенные матрицы. Эти нормы мы будем использовать для оценки отклонения решения от цели и затрат на генерацию заданного возмущения.

Систему дифференциальных и алгебраических уравнений (5) можно редуцировать [4] к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + C\xi, \quad (6)$$

При этом, $v = Xx + Y\xi$, $\eta = E_\eta^{-1}\xi$. Здесь A, C, X, Y — некоторые матрицы размеров $n \times n$, $n \times n_c$, $n_v \times n$ и $n_v \times n_c$, соответственно, $n = n_v - n_p + d$, а $d = 1$ при $\alpha > 0$ и 2 при $\alpha = 0$.

Отметим, что поскольку профиль скорости основного течения является четной функцией y и z , то решение задачи Коши для системы (2) можно свести к отдельному поиску решений, обладающих определенными симметриями относительно осей

сечения канала [3]. Для определенности, следуя работам [6, 7], будем рассматривать далее решения со следующими четностями компонент скорости и давления: $(-, +, +, -, -)$, где первый плюс (минус) означает четность (нечетность) соответствующей переменной по y , а второй — по z . Описанная аппроксимация системы (2) сохраняет симметрии решений. Поэтому, полученную после аппроксимации систему можно свести к системе вида (6) с векторами x и ξ , имеющими примерно четверо меньшее число компонент, чем без учета четности.

3. Решение задачи Коши для системы (6) с начальным значением $x(0) = 0$ существует, единственно и представимо в виде формулы Коши:

$$x(T) = \int_0^T W(t) \xi(t) dt,$$

где

$$W(t) = \exp\{(T-t)A\}C.$$

Грамиан управляемости $P(\infty)$, где

$$P(T) = \int_0^T W(t) W(t)^* dt, \quad (7)$$

в данном случае является очень плохо обусловленной матрицей в силу малоранговости матрицы C . Поэтому, будем решать приближенные задачи оптимального управления следующего вида.

Задано $T > 0$, вектор x_T и допустимая погрешность $\varepsilon \geq 0$. Найти определенную в интервале $[0, T]$ функцию $\xi(t)$ такую, что

$$\xi \in L_2 : \left\| \int_0^T W(t) \xi(t) dt - x_T \right\|_2 \leq \varepsilon \|x_T\|_2, \quad (8)$$

$$\|\xi\|_{L_2} \rightarrow \min.$$

Пусть D — квадратная диагональная положительно определенная матрица отвечающая m максимальным собственным значениям матрицы $P(T)$, U — прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированную систему соответствующих собственных векторов.

Утверждение 1. Пусть $\varepsilon_0 = \|(I - UU^*)x_T\|_2 / \|x_T\|_2$. Тогда решение задачи (8) при $\varepsilon_0 \leq \varepsilon < 1$ существует, единственно и представимо в виде $\xi(t) = W(t)^* U \gamma$, где γ — решение оптимизационной задачи

$$\gamma \in \mathbb{C}^m : \|D\gamma - \psi\|_2 \leq \delta \|\psi\|_2, \quad (D\gamma, \gamma) \rightarrow \min,$$

$$\text{с } \psi = U^* x_T, \delta = \sqrt{(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) / (1 - \varepsilon_0^2)}.$$

Таким образом решение рассматриваемой задачи приближенного оптимального управления сводится к простейшей задаче выпуклого программирования. В качестве m будем выбирать максимальное целое число, при котором отношение минимального диагонального элемента матрицы D

к максимальному больше либо равно машинной точности. В качестве T будем выбирать минимальное положительное число, обеспечивающее неизменность у ε_0 трех значащих десятичных цифр с ростом T .

4. Известно, что течение Пуазейля в канале квадратного сечения является асимптотически устойчивым по Ляпунову при любом конечном числе Рейнольдса [3, 5], иными словами линейное критическое число Рейнольдса для этого течения равно бесконечности. Далее мы рассмотрим в качестве целей для задачи оптимального управления волну Толлмина–Шлихтинга, то есть ведущую (наименее затухающую) моду, и оптимальное возмущение, обладающие указанной выше симметрией. Следуя работам [6, 7], мы будем рассматривать течение Пуазейля с $Re = 3000$ и генерировать ведущую моду и оптимальное возмущение с волновым числом $\alpha = 0.1$, а также, для сравнения, с $\alpha = 0$ и 1.

Необходимый для этого расчет амплитуды ведущей моды сводится к вычислению собственного вектора матрицы A , отвечающего собственному значению с максимальной действительной частью, который мы вычислим с помощью QR алгоритма [8]. Расчет оптимального возмущения с помощью алгоритма [9] сводится к вычислению нормированного правого сингулярного вектора [9] матричной экспоненты $\exp\{tA\}$, отвечающего ее максимальному сингулярному числу, в момент времени, при котором достигается максимум этого сингулярного числа.

Система (2) аппроксимировалась описанным выше способом на сетке с $n_y = n_z = 40$. Дополнительные расчеты, результаты которых мы здесь приводить не будем, показали, что данное число узлов обеспечивает сходимость результатов по шагу сетки с достаточно высокой точностью. После учета симметрий и алгебраической редукции была сформирована система (6) с квадратной матрицей A порядка 780 и прямоугольной матрицей C размера 780×40 . Все результаты вычислений приводятся далее округленными до трех значащих десятичных цифр.

В таблице 1 представлены затраты на генерацию целей при различных значениях ε , то есть значения L_2 нормы соответствующих оптимальных управлений. Видно, что затраты на генерацию оптимального возмущения значительно выше затрат на генерацию ведущей моды. Более того, при выбранных значениях α и T генерация оптимального возмущения с допустимыми погрешностями $\varepsilon = 10^{-7}$, 10^{-5} и 10^{-4} соответственно невозможна, поскольку они меньше соответствующих неустраняемых погрешностей ε_0 . Для указанных в таблице значений α и T эти погрешности равны соответственно 2.56×10^{-8} , 1.16×10^{-6} , 3.62×10^{-5} для ве-

дущей моды и 1.85×10^{-3} , 6.76×10^{-2} , 7.23×10^{-1} для оптимального возмущения.

Результаты расчетов, представленные в таблице 1, позволяют сделать вывод, что затраты на создание оптимального возмущения с помощью вдува–отсоса выше затрат на создание ведущей моды примерно в 10^4 раз, а оптимальное возмущение с высокой точностью вообще не удалось создать.

Таблица 1. Затраты на генерацию ведущей моды и оптимального возмущения с волновыми числами $\alpha = 0$ (при $T = 1500$), а также 0.1 и 1 (при $T = 500$) при заданной допустимой погрешности ε

α	ε	Ведущая мода	Оптимальное возмущение
0	10^{-1}	5.77×10^{-2}	2.13×10^2
	1.86×10^{-3}	1.08×10^{-1}	1.98×10^3
	10^{-7}	2.89×10^{-1}	–
0.1	10^{-1}	1.21	6.76×10^4
	6.78×10^{-2}	1.45	1.28×10^5
	10^{-5}	7.19	–
1	9×10^{-1}	5.52×10^{-1}	1.04×10^3
	7.24×10^{-1}	2.06	7.86×10^5
	10^{-4}	5.02×10^2	–

Авторы благодарны анонимным рецензентам за полезные замечания, позволившие улучшить данную работу.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 22-71-10028).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V. Physics of transitional shear flows. Springer, Berlin, 2012.
2. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. Spectral methods. Fundamentals in single domains. Springer, Berlin, 2006.
3. Demyanko K. V., Nечepurenko Yu. M. Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. V. 28. № 2. P. 125–148.
4. Nечepurenko Yu. M. On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86. P. 457–459.
5. Tatsumi T., Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 437–449.
6. Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M. Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross sections // J. Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48. № 10. P. 1–17.

7. *Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M.* Numerical study of stability and transient phenomena of Poiseuille flows in ducts of square cross-sections // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2009. V. 24. № 3. P. 193–205.
8. *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, thirded., 1996 (Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999).
9. *Nечepurenko Yu. M., Sadkan M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm. *SIAM J. Matr. Anal. Appl.* 2011. V. 32. № 2. P. 349–363.

COMPARISON OF THE COSTS FOR GENERATING THE TOLLMIE-SCHLICHTING WAVES AND OPTIMAL DISTURBANCES USING OPTIMAL BLOWING–SUCTION

K. V. Demyanko^{a,b}, Y. M. Nечepurenko^{b,a}, I. G. Chechkin^{a,c}

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS E. E. Tyrtysnikov

The problem of generating the Tollmien-Schlichting waves (leading eigenmodes) and optimal disturbances with a given accuracy using optimal blowing–suction is considered with the example of Poiseuille flow in a duct of square cross-section and streamwise-harmonic blowing-suction through the duct walls. The problem is reduced to solving optimal control problems for the linearized governing equations of viscous incompressible media. It is shown for the first time that generating the optimal disturbances using blowing–suction is much more expensive than generating the leading modes.

Keywords: linear control system, duct flow, blowing-suction, leading mode, optimal disturbance, matrix exponential, convex programming.