

УДК 511.36

БЕСКОНЕЧНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ПОЛИАДИЧЕСКИХ РЯДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2024 г. В. Г. Чирский^{1*}

Представлена академиком РАН А. Л. Семёновым

Получено 12.09.2024 г.

После доработки 02.10.2024 г.

Принято к публикации 02.10.2024 г.

Рассмотрим последовательности целых чисел $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям $a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, T_j$, $n = 0, 1, \dots$, и рассмотрим ряды $F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$. Устанавливаются условия, при которых совокупность рядов $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ и ряд Эйлера $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ и для любого целого алгебраического числа $\gamma \neq 0$ их значения в точке γ бесконечно алгебраически независимы.

Ключевые слова: полиадические числа, бесконечная алгебраическая независимость.

DOI: 10.31857/S2686954324050032, EDN: XESVLP

Работа продолжает исследования, начатые в статье [1]. Используется модификация метода Зигеля–Шидловского [2], [3] для полиадических чисел [4] и подход, предложенный в работе В.Х. Салихова [5]. Пусть $T_1, \dots, T_m$ — попарно взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим последовательности целых чисел $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям $a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, T_j$, $n = 0, 1, \dots$. Потребуем выполнения следующих условий:

1. Для каждого $j = 1, \dots, m$ пусть $a_n^{(1,j)} = 1$ для всех n .

2. Для каждого $j = 1, \dots, m$ пусть векторы $(a_0^{(k,j)}, \dots, a_{T_j-1}^{(k,j)})$, $k = 2, \dots, T_j$ линейно независимы с вектором $(a_0^{(1,j)}, \dots, a_{T_j-1}^{(1,j)}) = (1, \dots, 1)$.

Обозначим

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n, \quad k = 1, \dots, T_j, j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Отметим, что для любого $j = 1, \dots, m$ выполнено равенство

$$F_{j,1}(z) = \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

Ряд $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ принято называть *рядом Эйлера*.

Теорема 1. Пусть целые числа $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда ряды $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ с рядом Эйлера $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ и для любого целого алгебраического числа $\gamma \neq 0$ ряды $F_{j,k}(\gamma)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ бесконечно алгебраически независимы с $\Phi(\gamma)$.

Поясним термин: бесконечно алгебраически независимы. Пусть $\gamma \neq 0$ принадлежит алгебраическому полю $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$. При условиях теоремы для любого простого числа p рассматриваемые ряды $F_{j,k}(\gamma)$ сходятся в любом пополнении $\mathbb{K}_v$ поля $\mathbb{K}$ по нормированию v , продолжающему p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$.

Суммы этих рядов в поле $\mathbb{K}_v$ обозначаем $(F_{j,k}(\gamma))^{(v)}$. Это означает, что можно рассмотреть прямое произведение всех таких полей $\mathbb{K}_v$. Бесконечная алгебраическая независимость означает, что для любого отличного от нуля многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x_{1,T_1}, \dots, x_{T_1,T_1}, x_{2,T_2}, \dots, x_{T_2,T_2}, \dots, x_{T_m,T_m}, \dots, x_{T_m,T_m})$$

существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ таких, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

$$P\left((F_{1,T_1}(\gamma))^{(v)}, \dots, (F_{T_1,T_1}(\gamma))^{(v)}, (F_{2,T_2}(\gamma))^{(v)}, \dots, (F_{T_2,T_2}(\gamma))^{(v)}, \dots, (F_{T_m,T_m}(\gamma))^{(v)}\right) \neq 0.$$

Доказательство теоремы существенно использует результаты статьи [1]. Основой являются тождества, аналогичные доказанным в [1]. Пусть $a_n^{(k,j)}$ — целые числа с условием $a_{n+T_j}^{(k,j)} = a_n^{(k,j)}$. Ряды $F_{j,k}(z)$, определенные равенствами (1) можно представить в виде

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n = \sum_{l=0}^{T_j-1} a_l^{(k,j)} \sum_{s=0}^{\infty} (l+sT_j)! z^{l+sT_j}. \quad (2)$$

Как и в статье [1], обозначим

$$f_{j,0}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (zT_j)^{T_j s} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T_j}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T_j-1}{T_j}\right)_s, \quad (3)$$

при $l = 0, 1, \dots, T_j - 2$,

$$f_{j,l}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (sT_j)^{T_j s} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T_j} + 1\right)_s \cdot \dots \times \times \left(\frac{l}{T_j} + 1\right)_s \left(\frac{l+1}{T_j}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T_j-1}{T_j}\right)_s, \quad (4)$$

$$f_{j,T_j-l}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (sT_j)^{T_j s} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T_j} + 1\right)_s \cdot \dots \times \times \left(\frac{T_j-1}{T_j} + 1\right)_s, \quad (5)$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)$ при $n \geq 1$. В статье [1] установлены тождества: при $l = 1, \dots, T-1$

$$l!(T)^{Ts} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \times \times \left(\frac{l+1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s = (l+sT)!. \quad (6)$$

При $l = 0$

$$(T)^{Ts} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s = (Ts)!. \quad (7)$$

Таким образом, при $k = 1, \dots, T_j$ из равенств (2)–(7) получаем:

$$F_{j,k}(z) = \sum_{l=0}^{T_j-1} a_l^{(k,j)} l! f_{j,l}(z) \quad (8)$$

Линейную эквивалентность над полем $\mathbb{C}(z)$ конечных наборов рядов S_1, S_2 обозначаем символом $S_1 \sim S_2$.

Лемма 1 (Лемма 1 из [1]). Для любого $j = 1, \dots, m$

$$\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,0}^{(T_j-1)}(z)\}.$$

Обозначим $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ — ряд Эйлера.

Лемма 2 (Лемма 2 из [1]). Для любого $j = 1, \dots, m$

$$f_{j,0}(z) = \frac{1}{T_j} \sum_{r=0}^{T_j-1} \Phi(\zeta_j^r z), \text{ где } \zeta_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{T_j}\right).$$

Обозначим $\Psi(z) = z\Phi(z)$.

Лемма 3 (Лемма 3 из [1]). Для любого $j = 1, \dots, m$

$$\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}.$$

Доказательства этих лемм совпадают с доказательствами лемм из [1] с точностью до обозначений.

Рассмотрим при каждом $j = 1, \dots, m$ эквивалентные системы векторов $\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}$ и, соответственно, $\{f_{j,1}(z), \dots, f_{j,T_j}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}$, так как набор $\{F_{j,1}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\}$ ввиду (8) линейно эквивалентен набору $\{F_{j,0}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\}$.

Заметим, что $F_{j,1}(z) = \Phi(z)$, $\Psi(\zeta_j^0 z) = \Psi(z) = z\Phi(z)$. Поэтому

$$\{F_{j,2}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\{F_{1,1}(z), F_{1,2}(z), \dots, F_{1,T_1}(z), F_{2,2}(z), \dots, \\ &F_{2,T_2}(z), \dots, F_{m,2}(z), \dots, F_{m,T_m}(z)\} \sim \\ &\sim \{\Psi(z), \Psi(\zeta_1^{T_1-1} z), \dots, \Psi(\zeta_1^{T_1-1} z), \dots, \\ &\Psi(\zeta_m^{T_m-1} z), \dots, \Psi(\zeta_m^{T_m-1} z)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В статье [1] была доказана следующая теорема:

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — различные числа, отличные от 0. Тогда формальные степенные ряды $\Psi(\alpha_1 z), \dots, \Psi(\alpha_N z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

Применим эту теорему к набору рядов $\{\Psi(z), \Psi(\zeta_1^{T_1-1} z), \dots, \Psi(\zeta_1^{T_1-1} z), \dots, \Psi(\zeta_m^{T_m-1} z), \dots, \Psi(\zeta_m^{T_m-1} z)\}$.

Если для некоторых $k, j, r < T_j, s < T_k$ выполняется равенство $\zeta_j^r = \zeta_k^s$, то $\frac{2\pi i r}{T_j} = \frac{2\pi i s}{T_k}$ и $\frac{r}{s} = \frac{T_j}{T_k}$, что противоречит условию взаимной простоты чисел T_j и T_k . Следовательно, наборы (9) состоят из рядов, алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$. Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части начнем с замечания о том, что все рассматриваемые ряды $F_{j,k}(z)$ входят в класс рядов $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$. Для ряда, имеющего вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ это означает, что выполнены следующие условия:

1. Все коэффициенты a_n принадлежат полю $\mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq \exp(c_1 n)$ для всех n .

2. Существует последовательность натуральных чисел $d_n = d_{0,n} d^n$ такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, причем для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа $p \leq c_2 n$ и степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$ на простые множители, обозначаемая $\text{ord}_p d_{0,n}$, удовлетворяет неравенству

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае $c_2 = c_3 = 0$, $d = 1$, а в качестве c_1 можно взять $\ln \left(\max \left\{ |a_l^{(k,j)}|, j=1, \dots, m, k=0, \dots, T_j-1, l=0, \dots, T_j-1 \right\} \right)$.

Заметим, что ряды $f_{j,k}(z)$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, T_j-1$ составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'_{j,k} = (k+1) \frac{y_{j,k+1} - y_{j,k}}{z}, k = 0, \dots, T_j-2, \\ y'_{j,T_j-1} = \frac{T_j}{z^{T_j+1}(T_j-1)!} (y_{j,0} - 1) - \frac{T_j}{z} \cdot y_{j,T_j-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку для любого $j = 1, \dots, m$ совокупность рядов $\{F_{j,1}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\}$ линейно эквивалентна совокупности рядов $\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\}$, причем любой ряд $F_{j,k}(z)$ является линейной комбинацией рядов $f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)$ с коэффициентами — целыми числами, ряды $F_{j,1}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)$ для любого $j = 1, \dots, m$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющими, ввиду (10), полюс только в точке $z = 0$. При этом для каждого $j = 1, \dots, m$ выполняется равенство $F_{j,1}(z) = \Phi(z)$. Поэтому и ряды $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ и ряд Эйлера $F_{j,1}(z) = \Phi(z)$ составляют решение системы из $T_1 + \dots + T_m + 1 - m$ линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющими полюс только в точке $z = 0$. Осталось применить теорему 3 из статьи [6]:

Пусть F -ряды $g_1(z), \dots, g_r(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого целого алгебраического числа $\gamma \neq 0$ и отличного от особых точек этой системы ряды $g_1(\gamma), \dots, g_r(\gamma)$ бесконечно алгебраически независимы.

Теорема полностью доказана.

Сделаем заключительные замечания. Рассмотрение взаимно простых чисел $T_1, \dots, T_m$ позволяет получить $T_1 + \dots + T_m + 1 - m$ алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ рядов, выбирая $T_1^2 + \dots + T_m^2 - (T_1 + \dots + T_m)$ вместо $(T_1 + \dots + T_m)^2 - (T_1 + \dots + T_m)$ целых чисел. Это соображение можно использовать при вычислительных экспериментах, упомянутых в [7] и экономном построении наборов независимых псевдо-случайных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. 2017. Т. 81. № 2. С. 215–232.
<https://doi.org/10.4213/im8421>
2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука. 1987. 448 с.
3. Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V. Number Theory IV. Springer-Verlag Berlin Heidelberg-New York, 1998, 345 p.
4. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука. 1971. 416 с.
5. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13. № 1. С. 29–40
6. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.
<https://doi.org/10.1134/S1061920821030031>
7. Матвеев В. Ю. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 2(70). С. 383–390.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-383-390>

INFINITE ALGEBRAIC INDEPENDENCE OF POLYADIC SERIES WITH PERIODIC COEFFICIENTS

V. G. Chirskii^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

Consider sequences of integers $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ such that $a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, T_j$, $n = 0, 1, \dots$, and consider the series $F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$. The conditions are established under which the set of series $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ and the Euler series $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$ and for any algebraic integer $\gamma \neq 0$, their values at the point γ are infinitely algebraically independent.

Keywords: polyadic numbers, infinite algebraic independence.