

СТАБИЛИЗИРОВАННАЯ СХЕМА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ P_1

© 2024 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин¹, О. Г. Ольховская^{1,*}, В. А. Гасилов¹

Получено 28.06.2024 г.

После доработки 24.07.2024 г.

Принято к публикации 23.08.2024 г.

Рассматриваются характеристические разностные схемы для уравнения переноса излучения в модели P_1 . Уравнения данной модели модифицируются посредством коррекции скорости переноса энергии излучения. Такая коррекция способна уменьшить влияние нефизических эффектов при расчете лучистого теплообмена в среде с неоднородной оптической толщиной.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, приближение P_1 , метод характеристик с интерполяцией.

DOI: 10.31857/S2686954324050024, **EDN:** XEUSHK

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная сложность решения задач радиационной газодинамики обусловлена необходимостью, учитывать, в общем случае, взаимосвязь поля излучения с газодинамическими полями, от которых зависят оптические свойства среды [1]. Перенос излучения в высокотемпературных средах зачастую бывает необходимо рассчитывать на пределе применимости приближения локального термодинамического равновесия, что приводит к необходимости использования усовершенствованных моделей расчета лучистых потоков по сравнению, например, с такими широко употребляемыми моделями, как лучистая теплопроводность или диффузия излучения [2]. В настоящей работе рассматриваются уравнения переноса излучения в приближении P_1 . Известно [3], что это приближение не свободно от нефизических эффектов, связанных со скоростью переноса лучистого потока энергии. В приближении P_1 эта скорость занижена сравнительно со скоростью света, в то время как в диффузионном приближении она может быть сколь угодно большой. Уравнения модели P_1 можно модифицировать аналогично моделям, рассмотренным в [4, 5] путем коррекции скорости переноса энергии излучения. Численные эксперименты с тестовыми задачами, имеющими точные решения для сред с неоднородной оптической толщиной, показывают хорошую практическую точность

расчетов по модифицированным моделям. Предложенный подход позволяет развивать явные численные алгоритмы, удобные для адаптации к различным архитектурам параллельных вычислителей [5, 6].

Во втором разделе работы рассматривается модель P_1 и ее модификация, на основе которой строится численная методика. Третий раздел содержит описание сеточно-характеристической схемы, построенной для решения системы уравнений модели P_1 . Описание тестовых решений и результаты расчетов представлены в четвертом разделе.

2. УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА МОДЕЛИ P_1

Мы будем рассматривать перенос энергии излучением в случае излучающей и поглощающей среды. Спектральная интенсивность излучения J_ν , т.е. количество энергии, переносимой фотонами в единицу времени в спектральном интервале $d\nu$ через единичную площадку в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ перпендикулярно направлению полета квантов Ω в элементе телесного угла $d\Omega$ связана с плотностью распределения фотонов $F(\nu, \mathbf{r}, \Omega, t)$ соотношением [1]

$$J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d\nu d\Omega = h\nu c F(\nu, \mathbf{r}, \Omega, t) d\nu d\Omega. \quad (1)$$

Уравнение для функции $J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t)$ в случае излучающей и поглощающей среды имеет вид [1]

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial t}(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Omega^T \nabla J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) = B_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) - k_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t), \quad (2)$$

¹ Федеральное государственное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук” Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: olkhovsk@gmail.com

где функции $B_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$, $k_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ — спектральные коэффициенты испускания и поглощения фотонов.

Уравнение переноса (2) не включает учет рассеяния фотонов. Ситуации, когда это приближение справедливо для газовых и плазменных сред рассмотрены, например, в монографиях [1–3].

Мы рассмотрим, следуя [2, 3], модель переноса излучения, в которой используются интегральные по угловым переменным величины — плотность энергии излучения U_ν и лучистый поток $\mathbf{W}_\nu$:

$$\begin{aligned} U_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{S^2} J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}, \\ \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, t) &= \int_{S^2} \mathbf{\Omega} J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрирование (2) по полному телесному углу дает уравнение, связывающее $U_\nu(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu = \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — интеграл правой части (2) (его конкретный вид сейчас не важен).

Интегрирование (2) после домножения на компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$, приводит к уравнению для $\mathbf{W}_\nu$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial W_{\nu,i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{S^2} \Omega_i \Omega_k I_\nu d\mathbf{\Omega} &= -k_i W_{\nu,i}, \\ i &\in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сюда входит наряду с $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ тензор давления излучения $\mathbf{P}_\nu$:

$$\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{S^2} \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^T J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}.$$

В дальнейшем предполагаем независимость лучеиспускающей способности и коэффициента поглощения от угловой переменной:

$$B_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = B_\nu(\mathbf{r}, t), \quad k_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = k_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Выпишем с учетом (6) систему (4), (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu &= 4\pi B_\nu - c k_\nu U_\nu, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + c \nabla \mathbf{P}_\nu &= -k_\nu \mathbf{W}_\nu. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае пространственной изотропии, как показано, например, в [2, 3], диагональные элементы $\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t)$ равны между собой:

$$P_{\nu,11}(\mathbf{r}, t) = P_{\nu,22}(\mathbf{r}, t) = P_{\nu,33}(\mathbf{r}, t),$$

а недиагональные элементы равны нулю, т.е.

$$\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = P_\nu(\mathbf{r}, t) \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Соответственно имеем

$$\begin{aligned} U_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 \int_{S^2} \Omega^2 J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega} = \\ &= \operatorname{Tr} \mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = 3 P_\nu(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (8) система (7) становится замкнутой, ее называют приближением P_1 :

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu = 4\pi B_\nu - c k_\nu U_\nu, \quad (9)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_\nu = -k_\nu \mathbf{W}_\nu. \quad (10)$$

Уравнения (9), (10) можно получить, оставив в разложении интенсивности поля излучения по сферическим гармоникам $J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ линейную компоненту

$$J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) \approx f_\nu(\mathbf{r}, t) + \mathbf{\Omega}^T g_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

Функции $f_\nu(\mathbf{r}, t)$ и $g_\nu(\mathbf{r}, t)$ приведены, например, в [3]:

$$\begin{aligned} f_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} U_\nu(\mathbf{r}, t), \\ g_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{3}{4\pi} \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Условия применимости линейной зависимости вида (11), приводящей к приближенным моделям типа диффузии, или P_1 , подробно обсуждаются в [1, 2]. Там показано, что в случае умеренной анизотропии поля излучения такие модели дают правильные качественные, а зачастую и количественные результаты, поскольку приближенным является лишь уравнение (10), тогда как (9) является точным уравнением баланса энергии [2].

В случае малой оптической толщины среды $l_\nu \sim L$ (L — характерный размер области распространения излучения, l_ν — длина свободного пробега фотона частоты ν) уравнения приближения P_1 соответствуют волновому процессу при скорости, меньшей скорости света [3]. При условии $l_\nu \sim L$ можно упростить систему (9)–(10), пренебрегая слагаемыми, пропорциональными k_ν :

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu = 4\pi B_\nu, \quad (12)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_\nu = 0. \quad (13)$$

Преобразуем (12), умножая обе его части на $1/c$ и дифференцируя по времени. К уравнению (13)

применим оператор div . Получим соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U_\nu}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} \right) &= 4\pi \frac{\partial B_\nu}{\partial t}, \\ \frac{1}{c} \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} \right) + \frac{c}{3} \text{div} (\nabla U_\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (14) следует волновое уравнение для функции плотности излучения:

$$\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial t^2} - \frac{c^2}{3} \text{div} (\nabla U_\nu) = 4\pi \frac{\partial B_\nu}{\partial t}.$$

Отсюда видно, что в приближении P_1 скорость переноса энергии излучения равна $c/\sqrt{3}$. В [3] предложено изменить второе уравнение (14) так, чтобы обеспечить перенос энергии со скоростью c :

$$\frac{1}{3c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_\nu = 0. \quad (15)$$

Данная модификация названа приближением $P_{1/3}$.

Показано [7], что уравнения (12), (15) дают физически корректные результаты, как в случае малых, так и в случае больших оптических толщин среды. Мы воспользуемся данным свойством модели $P_{1/3}$ для построения численной методики, в которой для повышения точности применяется дополнительная коррекция множителя при производной по времени от потока энергии:

$$\frac{\alpha_\nu}{c} \frac{\partial W_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} = -k_\nu W_\nu. \quad (16)$$

3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОГРУППОВОМ СПЕКТРАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим одномерную постановку задачи о переносе излучения в излучающей и поглощающей среде. Задача решается на отрезке $[0, L]$ оси Ox декартовой системы координат, по времени — в интервале $0 < t \leq t^*$. Перенос излучения рассматривается для квантов в спектральном диапазоне $[\nu', \nu'']$.

Модель лучистого теплообмена включает систему уравнений (12), (16) и уравнение энергии среды $E = E(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{\partial W_\nu}{\partial x} &= c k_\nu (U_{\nu p} - U_\nu), \\ \frac{\alpha_\nu}{c} \frac{\partial W_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} &= -k_\nu W_\nu, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= c \int_0^\infty k_\nu (U_\nu - U_{\nu p}) d\nu, \\ x \in [0, L], \quad t \in [0, t^*], \nu \in [\nu', \nu'']. \end{aligned} \quad (17)$$

Модели нагрева неподвижной среды применялись, например, в [2, 3, 10] и других работах.

Разобьем спектральный диапазон $[\nu', \nu'']$ сеткой (не обязательно равномерной)

$$\omega_\nu = \begin{cases} d_n \in [\nu', \nu''], & d_n = \nu'_n - \nu'_{n-1}, \\ \nu_n = 0.5(\nu'_{n-1} + \nu'_n), \\ n \in \{0, 1, \dots, N\}, & \nu_0 = \nu', \\ n_N = \nu''. \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнения (18) по $d\nu$ на отрезке d_n . Для первого из уравнений (18) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} W_\nu d\nu \right) &= \\ &= c \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu (U_{\nu p} - U_\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим

$$U_n = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu, \quad W_n = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} W_\nu d\nu$$

и примем постоянными значения функций k_ν и $U_{\nu p}$, в каждом интервале частот d_n , положив

$$B_n = U_p(\nu_n), \quad k_n = k(\nu_n).$$

Тогда (19) можно записать в виде

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial W_n}{\partial x} = c k_n (B_n d_n - U_n). \quad (19)$$

Аналогично, для второго из уравнений (17) имеем:

$$\frac{1}{c} \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} \alpha_\nu \frac{\partial W_\nu}{\partial t} d\nu + \frac{c}{3} \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} d\nu = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu W_\nu d\nu. \quad (20)$$

Примем постоянство корректирующего множителя α_ν в пределах отрезка $[\nu'_{n-1}, \nu'_n]$ и обозначим

$$\alpha_n = \alpha(\nu_n).$$

Тогда потоковое уравнение (21) приобретает вид:

$$\frac{\alpha_n}{c} \frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_n}{\partial x} = -k_n W_n. \quad (21)$$

Уравнение энергии из системы (3) проинтегрируем с учетом правила Кирхгофа [1]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 4AT^3 \frac{\partial T}{\partial t} = c \int_{\nu'}^{\nu''} k_\nu (U_\nu - U_{\nu p}) d\nu =$$

$$= c \sum_{n=1}^N \left(k_n \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu - k_n B_n \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} d\nu \right).$$

С учетом введенных обозначений имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c}{4AT^3} \sum_{n=1}^N k_n (U_n - B_n d_n). \quad (22)$$

Система из $2N+1$ уравнений вида (19), (21), (22) решается относительно плотности и потока излучения в спектральных группах U_n , W_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, и температуры среды $T(x, t)$. Опишем метод решения.

Запишем систему уравнений (19), (21) в матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial t} + \mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial x} &= -\mathbf{S}_n(\mathbf{Q}_n), \\ \mathbf{Q}_n &= \begin{pmatrix} U_n \\ W_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c^2}{3\alpha_n} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_n(\mathbf{Q}_n) &= \begin{pmatrix} ck_n U_n - ck_n B_n d_n \\ \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для матрицы $\mathbf{A}_n$ вычисляем левые собственные вектора и соответствующие им собственные значения

$$\begin{aligned} I_n^1 &= \left(\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, 1 \right), \quad I_n^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, 1 \right), \\ \lambda_n^1 &= \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad \lambda_n^2 = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Инварианты Римана системы (23) вычисляются по формулам [8]:

$$\begin{aligned} I_n^1 &= I_n^1 \mathbf{Q}_n = \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n + W_n, \\ I_n^2 &= I_n^2 \mathbf{Q}_n = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n + W_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Умножая систему (23) на I_n^1 и I_n^2 перейдем к уравнениям для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial I_n^1}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} \frac{\partial I_n^1}{\partial x} + \frac{c^2 k_n}{\alpha_n} U_n - \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n = \frac{c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial I_n^2}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} \frac{\partial I_n^2}{\partial x} - \frac{c^2 k_n}{\alpha_n} U_n - \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n = \frac{c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad (26)$$

Если I_n^1 и I_n^2 найдены, функции U_n и W_n вычисляются из (24):

$$U_n = \frac{(I_n^1 - I_n^2) \sqrt{3\alpha_n}}{2c}, \quad W_n = \frac{(I_n^1 + I_n^2)}{2}. \quad (27)$$

Поскольку исходная система уравнений относится к гиперболическому типу, для ее решения можно применить сеточно-характеристический метод [9].

Перейдем к разностной аппроксимации (25)–(27). Введем сетки по переменным x и t с шагами, соответственно, h и τ :

$$\omega_h = \{ih : i \in \{0, 1, \dots, N_L\}\},$$

$$\omega_\tau = \{j\tau : j \in \{0, 1, \dots, N_t\}\},$$

где $N_L = L/h$, $N_t = t^*/\tau$. В начальный момент времени на сетке ω_h определим сеточные функции — проекции инвариантов Римана

$$\begin{aligned} F_n &= P_h(I_n^1) \in H_h[0, L], \\ G_n &= P_h(I_n^2) \in H_h[0, L], \end{aligned} \quad (28)$$

где P_h — оператор проектирования. Определим в узлах сеток по пространству $ih \in \omega_h$ и времени $j\tau \in \omega_\tau$ сеточные функции $F_n^{ij} = F_n(ih)$, $G_n^{ij} = G_n(ih)$, $U_n^{ij} = U_n(ih)$, $W_n^{ij} = W_n(ih)$. Рекуррентные формулы для пересчета значений F_n^{ij} , G_n^{ij} на j -ом слое по времени через значения в точках $(j-1)$ -го слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} F_n^{ij} &= F_n^{i,j-1} - \frac{c\tau}{h\sqrt{3\alpha_n}} (F_n^{i,j-1} - F_n^{i-1,j-1}) - \\ &- \frac{c^2 k_n \tau}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n^{i,j-1} - \frac{\tau c k_n}{\alpha_n} W_n^{i,j-1} + \frac{\tau c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} G_n^{ij} &= G_n^{i,j-1} - \frac{c\tau}{h\sqrt{3\alpha_n}} (G_n^{i+1,j-1} - G_n^{i,j-1}) + \\ &+ \frac{c^2 k_n \tau}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n^{i,j-1} - \frac{\tau c k_n}{\alpha_n} W_n^{i,j-1} - \frac{\tau c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Формулы (29) и (30) определены, соответственно, для $i \in \{1, \dots, N_L\}$ и $i \in \{1, \dots, N_L - 1\}$. Значения F_n^{0j} и $G_n^{N_L j}$ определяются по крайевым условиям. Значения F_n^{i0} и G_n^{i0} для $i \in \{0, \dots, N_L\}$ известны из начальных условий.

Для завершения перехода к новому уровню по времени $t_j \rightarrow t^{j+1}$ выполняется расчет температуры соответственно (22):

$$\begin{aligned} T^{i+1,j} &= T^{ij} + \frac{c\tau}{4(T^{ij})^3} \sum_{n=1}^N k_n (T^{ij}) \times \\ &\times (U_n^{ij} - B_n (T^{ij}) d_n). \end{aligned} \quad (31)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Для тестирования представленной методики использовалось аналитическое решение системы уравнений спектральной диффузии (17), построенное в работе [10]. В системе единиц [10] $c = 3$, $\sigma = 1$.

Аналитическое решение построено для внутренней энергии среды, плотности энергии равновесного излучения и коэффициента поглощения, взятых в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(T) &= AT^4, \\ U_{vp} &= \frac{p\nu^3}{\exp(\nu/T) - 1}, \\ k_\nu &= \frac{k\nu \exp(\nu/T)}{4(\exp(\nu/T) - 1)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Решение задачи (17) в постановке [10] имеет вид

$$T(x, t) = \begin{cases} (ax + bct + T^*)^{1/m}, & ax + bct > 0, \\ T^*, & ax + bct \leq 0, \end{cases} \quad (33)$$

где T^* — начальная температура прогреваемой излучением среды.

$$U_\nu = RU_{vp}, \quad W_\nu = cqU_{vp}. \quad (34)$$

Решение (33) при значениях констант

$$\begin{aligned} A &= m = b = q = 1, \quad k = 4, \\ R &= 2, \quad a = -3, \quad p = \frac{15}{\pi^4} \end{aligned} \quad (35)$$

соответствует следующим начальным и краевым условиям

$$T(x, 0) = T^* > 0, \quad (36)$$

$$U_n(x, 0) = \frac{30}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1}, \quad (37)$$

$$W_n(x, 0) = \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1},$$

$$U_n(0, t) = \frac{30}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct + T^*} - 1}, \quad (38)$$

$$W_n(0, t) = \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct + T^*} - 1},$$

$$U_n(L, t) = \frac{30}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct - 3L + T^*} - 1}, \quad (39)$$

$$W_n(L, t) = \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct - 3L + T^*} - 1}.$$

Для решения уравнений (26)–(28) необходимо задать на расчетной сетке начальные значения ин-

вариантов Римана:

$$\begin{aligned} I_n^1(x, 0) &= \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n(x, 0) + W_n(x, 0) = \\ &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1}, \\ I_n^2(x, 0) &= -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n(x, 0) + W_n(x, 0) = \\ &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Соответствующие краевые условия для инвариантов задаются на левой и правой границах $x = 0$, $x = L$:

$$I_n^1(0, t) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct + T^*} - 1}, \quad (41)$$

$$I_n^2(L, t) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct - 3L + T^*} - 1}. \quad (42)$$

Решение тестовой задачи выполнено на отрезке $0 < x < 3$ для интервала времени $0 < t < 2$. Шаги по пространству и времени $h = 10^{-2}$ и $\tau = 10^{-4}$. Диапазон частот $\nu \in [6, 20]$ был разбит на 14 равных единичных интервалов. Фоновое значение температуры $T^* = 0.1$.

На рис. 1 показаны результаты расчетов на момент времени $t = 2$ с разными значениями параметра α_n , который полагался одинаковым для всех спектральных групп.

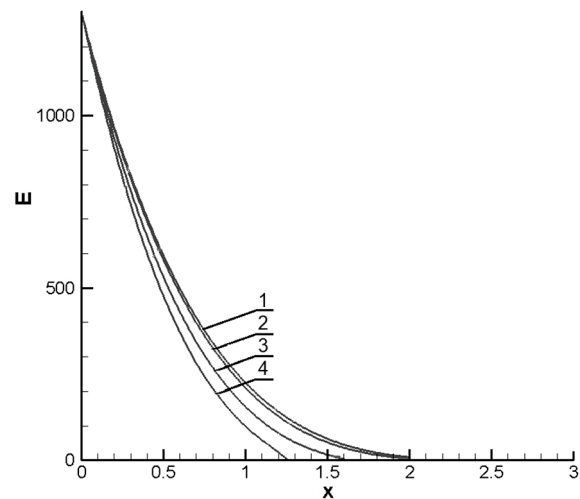


Рис 1. Радиационная волна. Внутренняя энергия E : 1 — аналитическое решение, $\alpha = 1$; 2 — $\alpha = 0.1$; 3 — $\alpha = 0.02$; 4 — $\alpha = 0.01$.

В [7] было указано, что нелинейный корректирующий фактор может приводить к нефизичным радиационным скачкам либо вызывать численные неустойчивости. Разработанная методика

вполне допускает возможность использования переменного параметра стабилизации в расчетах среды с различной прозрачностью для разных участков спектра, однако выполненные нами численные эксперименты показали, что применение постоянного параметра α в достаточно широком спектральном диапазоне обеспечивает хорошую практическую точность и вычислительную устойчивость.

При проведении расчетов использовалась частично аналитическая аппроксимация лучистых потоков, полученная в предположении постоянства коэффициентов уравнений в пределах сеточной ячейки ([3, с. 112–113]). В отличие от других часто применяемых способов коррекции потоков диффузионного типа, например, посредством фактора Эддингтона [4], данный подход является более универсальным, т.к. позволяет без какой-либо предварительной настройки правильно описать теплообмен излучением между оптически толстыми горячими слоями и оптически прозрачными холодными.

При $\alpha = 1$ (кривая 1) численное решение близко к аналитическому, соответствующие графики визуально не различимы, погрешность в равномерной норме не превышает 3%.

В окрестности фронта радиационной волны наблюдается экспоненциально уменьшающийся “предвестник”, происхождение которого обусловлено использованием схемы сквозного счета без явного выделения фронта.

При уменьшении α (кривые 2, 3, 4) видно, что форма фронта и скорость его распространения отличаются от исходной, что позволяет использовать параметр α для коррекции диффузионного приближения в оптически плотной среде.

При этом следует отметить, что разница решений 1–4 в интегральной норме не превышает 2.5%, что указывает на то, что на фронте содержится незначительная доля энергии излучения, мало влияющая на общий энергобаланс.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена методика решения системы моментных уравнений лучистого переноса энергии в приближении P_1 в задачах для сред с переменной непрозрачностью, а именно — добавление стабилизирующего множителя в производной по времени потока излучения. Вычислительные эксперименты показывают, что предложенный метод подавления нефизических эффектов в схеме метода характеристик с интерполяцией дает удовлетворительные по точности и физически корректные результаты в случае сред с переменной непрозрачностью.

Построенная схема может быть обобщена для двумерной и трехмерной по простран-

ству постановки, например, с применением интерполяционно-характеристического метода [3] или метода характеристических трубок [11]. Метод имеет хорошие перспективы для использования на локально-адаптивных декартовых сетках, однако переменность размеров ячеек такой сетки (их разная оптическая толщина) может оказаться серьезной проблемой и потребовать дополнительных исследований для ее решения.

Дальнейшим направлением развития предложенной методики является разработка критериев выбора корректирующего параметра для многогрупповой спектральной модели.

Отдельно следует отметить возможность использования предлагаемой методики для решения уравнения переноса излучения в рамках модели квазидиффузии [3].

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (суперкомпьютеры К-60, К-100). Авторы благодарны кандидату физ.-мат. наук Е. М. Урвачеву за полезные обсуждения тестовых задач.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматлит, 2008.
2. Castor J. I. Radiation Hydrodynamics. Cambridge University Press, 2004. 355 p.
3. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М., Наука, 1985.
4. Olson G. L. Introduction to radiation transport. Workshop on MHD and radiation Methods for Pulsed Power. Los Alamos National Laboratory, 1998.
5. Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г. Моделирование процесса лучистой теплопроводности на высокопроизводительных вычислительных системах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 111–114. <https://doi.org/10.31857/S2686954320020083>
Chetverushkin B. N. and Olkhovskaya O. G. Modeling of Radiative Heat Conduction on High-Performance Computing Systems // Doklady

- Mathematics, 2020, V. 101. N. 2, P. 172–175.
<https://doi.org/10.1134/S1064562420020088>
6. Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Трехслойная схема для решения уравнения диффузии излучения // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. № 1. С. 89–95.
<https://doi.org/10.31857/S2686954323600295>
 Chetverushkina B. N., Olkhovskaya O. G., and Gasilov V. A. Three-Level Scheme for Solving the Radiation Diffusion Equation // Doklady Mathematics, 2023, V. 108, No. 1, P. 320–325.
<https://doi.org/10.1134/S1064562423700837>
 7. Morel J. E. Diffusion-limit asymptotics of the transport equation, the $P_{1/3}$ equations, and two flux-limited diffusion theories // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2000, 65(5). P. 769–778.
[https://doi.org/10.1016/S0022-4073\(99\)00148-X](https://doi.org/10.1016/S0022-4073(99)00148-X)
 8. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation: With applications to Physics and Magnetohydrodynamics. New York, Academic press, 1964.
 9. Petrov I. B. Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems // Computational Mathematics and Information Technologies. 2023;7(1):6-21.
<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21>
 10. Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. О некоторых точных решениях системы уравнений диффузии излучения // ВАНТ, серия: Методики и программы численного решения задач математической физики, Вып. 3/14/1983. С. 65–67.
 11. Трощев В. Е., Нифанова А. В. Подход характеристических трубок к анализу DSn-метода и построение новых разностных схем на Sn-сетках // Математическое моделирование, 2006. Т. 18. № 7. С. 24–42.

STABILIZED SCHEME FOR CALCULATING RADIATION TRANSFER IN THE P_1 APPROXIMATION

Academician of the RAS B. N. Chetverushkin^a, O. G. Olkhovskaya^a, V. A. Gasilov^a

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

We consider interpolation-characteristic scheme approximating approximation to the radiative transfer equations corresponding to the P_1 model. The explicit finite-difference scheme is corrected by special term adjusting the rate of radiation energy transfer. Such correction can reduce the influence of non-physical effects when calculating radiative heat transfer in a medium with non-uniform opacity.

Keywords: radiative heat transfer, P_1 approximation, interpolation-characteristic method.