

УДК 519.634

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ДВУМЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШЕК

© 2024 г. К. В. Брушлинский^{1,*}, В. В. Крюченков^{2,**}, Е. В. Стёпин^{1,***}

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Получено 30.07.2024 г.

После доработки 17.09.2024 г.

Принято к публикации 20.09.2024 г.

В статье представлен анализ известных из предыдущих работ неустойчивостей в двумерной математической модели равновесия плазмы. Конкретно рассмотрен пример распрямленной в цилиндр тороидальной магнитной ловушки “Галатей-Пояс”, обладающей плоской симметрией. Установлено, что наблюдавшиеся ранее большие значения двумерной скорости возмущений в плоскости сечения цилиндра возникают на периферии конфигурации вблизи ее условной границы, не растут со временем, а обязаны как угодно малым значениям плотности, которая не определяется идеализированной моделью строгого равновесия. Варьируя плотность, можно влиять на устойчивость. Трехмерные (гофрированные вдоль оси цилиндра) возмущения растут со временем в соответствии с традиционной по Ляпунову неустойчивостью. Расчеты позволяют определить зависимость ее количественных характеристик от параметров задачи.

Ключевые слова: магнитоплазменные конфигурации, модель равновесия, устойчивость конфигураций, возмущения.

DOI: 10.31857/S2686954324050015, EDN: XFBYTG

Устойчивость плазменных конфигураций, удерживаемых в равновесии магнитным полем ловушек, является постоянной темой исследований, направленных на реализацию управляемого термоядерного синтеза (УТС). Существенную роль в них играют математическое моделирование и расчеты с применением современной высокопроизводительной вычислительной техники.

Модели равновесных конфигураций плотной квазинейтральной плазмы в приближении механики сплошных сред строятся в терминах краевых задач с системой уравнений плазмостатики*

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

*E-mail: brushk@keldysh.ru

**E-mail: kriuchenkov.viacheslav@mail.ru

***E-mail: eugene.v.stepin@gmail.com

¹Здесь и далее все физические величины безразмерные, т.е. отнесены к единицам измерения, составленным из раз-
мерных констант задачи

для трех функций: давления плазмы p , напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Они следуют из уравнений магнитной газодинамики (МГД) и уравнений Максвелла. Задачи описывают распределение этих величин в пространстве ловушки и в общем случае трехмерны.

Ситуация существенно упрощается, если рассматриваемая ловушка обладает какой-либо симметрией (плоской, осевой, винтовой, ...) или допускает ее в каком-либо приближении. Уравнения (1) при этом сводятся к одному скалярному полuliнейному уравнению Грэда–Шафранова [1, 2], плоский вариант которого имеет вид

$$\Delta \psi + \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} = 0, \quad (2)$$

где $\psi(x, y)$ — z -компонента вектор-потенциала магнитного поля, $I(x, y) = H_z$, и p, ψ, I функционально зависимы друг от друга: функции $p = p(\psi)$ и $I = I(\psi)$ должны быть заданы при постановке задачи о конкретной ловушке с учетом имеющейся или требуемой информации о ней. Численное решение краевых задач с уравнением (2) или его разновидностями позволяет определить основные

свойства равновесных конфигураций плазмы в тороидальных ловушках и их распрямленных в цилиндр аналогах: геометрию магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ и изобар, а также необходимую количественную информацию.

В цикле работ авторов (см. [3, 4] с подробной библиографией) изложены математическая модель равновесия плазмы в цилиндрическом аналоге предложенной А. И. Морозовым тороидальной ловушки “Галатей–Пояс” [5]. В плазменный цилиндр погружены два параллельных оси проводника с током, создающие необходимое для удержания магнитное поле и не соприкасающиеся с горячей плазмой (рис. 1). Модель получена в результате решения краевой задачи с уравнением (2) в квадратном сечении цилиндра. Функции $p(\psi)$, $I(\psi)$ задаются формулами

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_0}{q}\right)^2\right); \quad (3)$$

$$\psi_0 = \psi(0, 0); \quad I(\psi) \equiv H_z \equiv 0,$$

которые отражают отсутствие продольного магнитного поля H_z и быстрое убывание давления от максимального значения p_0 в центре и на проходящей через него магнитной сепаратрисе в стороны проводников и внешней границы. На рис. 1 приведен пример численного решения одного из вариантов задачи: магнитное поле представлено силовыми линиями $\psi(x, y) = \text{const}$, которые являются изобарами согласно (3).

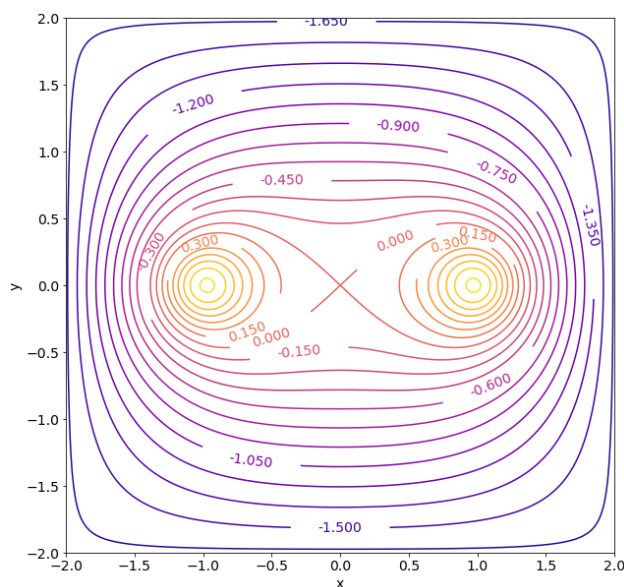


Рис 1. Распределение магнитного поля в ловушке “Галатей–Пояс”.

Решение получено итерационным методом установления в разностном аналоге обсуждаемой задачи.

Устойчивость магнитоплазменных конфигураций в ловушках, необходимая с точки зрения про-

грамм УТС, исследуется в основном относительно малых возмущений упомянутых выше функций и скорости плазмы в линейном приближении [6–8]. Уравнения МГД, линеаризованные на равновесии, имеют вид

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = [\text{rot } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}] + [\mathbf{j}^{pl}, \mathbf{H}_1], \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p, \mathbf{V}_1) + \gamma \text{div } \mathbf{V}_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{V}_1, \mathbf{H}]. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь малые возмущения упомянутых выше величин, а также скорости $\mathbf{V}$ снабжены индексом “1” и рассматриваются в объеме цилиндра с граничными условиями $V_{1n} = 0$, $H_{1n} = 0$ и требованием ограниченности решения при $z \rightarrow \pm\infty$. Равновесные конфигурации плазмы считаются устойчивыми, если решения задачи для возмущений остаются ограниченными со временем при произвольных начальных данных.

Численное решение задач проведено в два этапа. На первом — рассмотрены только двумерные возмущения при $\partial/\partial z \equiv 0$. В этом случае система из 7 скалярных уравнений (4) распадается на две независимых: два уравнения для z -компонент V_{1z} и H_{1z} образуют систему уравнений типа акустики, решения которой ограничены (см. [3, 4]), а оставшиеся 5 уравнений связывают только 5 оставшихся величин. В их численном решении наблюдались растущие значения скоростей V_{1x} и V_{1y} при превышении давлением значения $p_0^{cr} \approx 0.5$. Это ограничение существенно более сильное, чем ограничение $p_0 \leq 4$, при котором задача о равновесии теряет свой физический смысл [3, 4].

Полученный результат имеет право быть названным неустойчивостью конфигураций относительно двумерных возмущений при $p_0 > p_0^{cr}$, поскольку в расчетах появляются достаточно большие значения возникшей при возмущении скорости плазмы в плоскости $z = \text{const}$. Однако более подробный объем расчетов и их анализ позволяет обратить внимание на некоторые закономерности в их результатах и связать их с особенностями использованной двумерной модели равновесия в терминах задач с уравнением Грэда–Шафранова (2).

Во-первых, следует обратить внимание на то, что упомянутые большие значения наблюдаются только в скорости $\mathbf{V}_1$, а возмущения давления p_1 и магнитного поля $\mathbf{H}_1$ остаются ограниченными.

Во-вторых, скорости растут только на периферии траектории ловушки по обе стороны от сепаратрисы магнитного поля (рис. 1), где невозмущенное давление p экспоненциально убывает с ростом $(\psi - \psi_0)^2$.

В-третьих, большие значения скорости появляются одновременно с убыванием плотности плаз-

мы ρ , а значения удельного потока массы $\rho \mathbf{V}_1$ остаются ограниченными по величине со временем и возрастание $\mathbf{V}_1$ связано не со временем, а с убыванием плотности при удалении по пространству в направлениях от центра конфигурации к ее фактическим границам.

Сама по себе граница конфигурации здесь весьма условна, поскольку рассматриваемая и в целом зарекомендовавшая себя модель равновесия с уравнением Грэда–Шафранова идеализирована: она описывает строгое равновесие, пренебрегая диссипативными процессами диффузии, в первую очередь полагая проводимость плазмы бесконечной. Газодинамическая природа плазмы представлена только функцией $p(\psi)$, заданная исследователем (3) и не содержит какой-либо информации о плотности ρ , которая может неограниченно убывать, приближаясь к проводникам и внешней границе ловушки, вызывая там неограниченный рост возмущений скорости.

В предыдущих работах [3, 4] и цитированных в них более ранних имелось в виду, что давление p и связанная с ним плотность ρ , температура T и энтропийная функция $S = \exp(s/C_v)$ удовлетворяют уравнению состояния совершенного газа

$$p = p_0 \rho T = p_0 \rho^\gamma S \quad (5)$$

и неявно предполагалась адиабатичность процессов $S \equiv \text{const}$, т.е. неограниченное убывание плотности $\rho \sim p^{1/\gamma}$ и, соответственно, температуры $T \sim p^{(\gamma-1)/\gamma}$ при удалении от центра. Это стало причиной фактически неограниченного роста скорости $\mathbf{V}_1$. Однако стремление плотности к нулю вступает в противоречие с приближением механики сплошных сред, поэтому в решение уравнений (4) введено ограничение плотности снизу малой величиной $\rho_{\text{гр}}$:

$$\rho = \max \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \rho_{\text{гр}} \right),$$

которое ограничивает сверху значение скорости. Магнитную силовую линию $\psi = \text{const}$, на которой

$\rho = \rho_{\text{гр}}$, можно интерпретировать как фактическую границу исследуемой равновесной конфигурации, тем более, что скорость $\mathbf{V}_1$ направлена здесь вдоль нее.

Результаты расчета упомянутого адиабатического варианта равновесия представлены в таблице 1 значениями характерных максимальных по пространству двумерных значений скорости $\mathbf{V}_1$ и возмущений p_1 и $\mathbf{H}_1$, которые, начиная с некоторого момента, практически не растут, а лишь колеблются со временем.

При этом максимальные значения потока массы $(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{max}}$ находятся не на границе $\rho = \rho_{\text{гр}}$ и не зависят от $\rho_{\text{гр}}$, а граничное значение $(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{гр}}$ убывает вместе с $\rho_{\text{гр}}$, но медленнее, чем сама плотность.

Таким образом, полученные ранее результаты о неустойчивости объяснены достаточно большими значениями двумерной скорости возмущений на условной границе конфигурации. Они зависят от произвольного выбора этой границы и значения $\rho = \rho_{\text{гр}} \ll 1$ на ней, а также от заданной связи плотности и давления в равновесной конфигурации. Зависимость результатов от этой связи представлена расчетами устойчивости еще двух вариантов равновесия, находящихся “по разные стороны” от адиабатического. Изотермический вариант $T \equiv 1$, т.е. $\rho = p/p_0$, где температура остается равной своему максимальному значению в центре конфигурации, а плотность убывает в сторону границ быстрее, чем в адиабатическом. Назовем его “горячей” плазмой. Другой вариант предполагает постоянную плотность конфигурации $\rho \equiv 1$ и быстрое убывание температуры $T = p/p_0$ вместе с давлением, т.е. “холодную” плазму вблизи условной границы конфигурации.

Результаты содержатся в таблицах 2 и 3.

Из них следует, во-первых, очевидное в случае “холодной” плазмы невозрастание скорости у границ, т.е. устойчивость в любом смысле понимания этого слова. В “горячей” плазме имеет место замеченная ранее “неустойчивость”, т.е. рост скорости у границы при малых значениях плотности $\rho_{\text{гр}} \ll 1$,

Таблица 1. $S \equiv 1$, $\rho = (p/p_0)^{1/\gamma}$

$\rho_{\text{гр}}$	$V_{1\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{гр}}$	$H_{1\text{max}}$	$p_{1\text{max}}$
10^{-2}	41	26	0.410	11	19
10^{-3}	221	31	0.221	10	20
10^{-4}	480	29	0.048	12	19

Таблица 2. $T \equiv 1$, $\rho = (p/p_0)$

$\rho_{\text{гр}}$	$V_{1\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{гр}}$	$H_{1\text{max}}$	$p_{1\text{max}}$
10^{-2}	52	35	0.520	13	26
10^{-3}	285	35	0.285	15	26
10^{-4}	620	33	0.062	12	27

Таблица 3. $T = (p/p_0)$, $\rho \equiv 1$

$V_{1\max}$	$(\rho V_1)_{\max}$	$H_{1\max}$	$p_{1\max}$
34	34	4	15

более интенсивный, чем в адиабатическом варианте.

На втором этапе исследовалась динамика трехмерных малых возмущений в процессе численного решения начально-краевых задач с уравнениями (4) в продолжение и развитие начатых расчетов в [3, 4]. Поскольку коэффициенты линейных однородных уравнений (4) не зависят от z , решения задач строятся из Фурье-гармоник с множителем $\exp(ikz)$, ограниченных при $z \rightarrow \pm\infty$, т.е. с действительными значениями параметра k . Поэтому в уравнениях (4) производные $\partial/\partial z$ заменены умножением на множитель ik , и сами уравнения остаются двумерными по пространству. Они, вообще говоря, комплексные, но их действительные и мнимые части отличаются друг от друга только знаком k , что равносильно знаку мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$. В серии расчетов установлено, что, во-первых, представляющий основной интерес рост решения со временем имеет экспоненциальный характер вида $\exp(\lambda t)$ при любых значениях частоты гофрированных возмущений $k \neq 0$, т.е. соответствует общепринятой в смысле Ляпунова неустойчивости. Во-вторых, он характеризуется двумя количественными параметрами: временем $t_{\text{нр}}$ начала интенсивного роста возмущений и самой интенсивностью скорости роста, т.е. коэффициентом λ . Первый из них убывает, а второй — возрастает с ростом абсолютной величины частоты k .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафранов В.Д. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. № 3. С. 710–722.

2. Grad H., Rubin H. // Proc. 2nd UN Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva. 1958. V. 319. P. 190–197.

3. Брушлинский К. В., Стёпин Е. В. // Дифф. уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1112–1120.

4. Брушлинский К. В., Крюченков В. В., Стёпин Е. В. // Труды МИАН. 2023. Т. 322, С. 58–70.

5. Морозов А. И., Франк А. Г. // Физ. Плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.

6. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. // УФН. 1961. Т. 73. Вып. 4. С. 701–766.

7. Кадомцев Б. Б. // Вопросы теории плазмы / ред. М. А. Леонтович. М.: 1963. Вып. 2. С. 132–176.

8. Bateman G. MHD instabilities. Cambridge: MIT Press. 1978.

ON THE STABILITY OF STRICT EQUILIBRIUM OF PLASMA
IN TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODELS OF MAGNETIC
TRAPS

K. V. Brushlinskii^a, V. V. Kriuchenkov^b, E. V. Stepin^b

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

^bNational Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

The article presents an analysis of instabilities known from previous works in a two-dimensional mathematical model of plasma configuration equilibrium using the example of a toroidal magnetic trap “Galatea—Belt” straightened into a cylinder and possessing plane symmetry. It is established that the previously observed large values of the two-dimensional velocity of disturbances in the plane of the cylinder cross-section arise on the periphery of the configuration near its conventional boundary, do not grow with time, and are due to arbitrarily small values of density, which is not determined by the idealized model of strict equilibrium. By varying the density, it is possible to influence stability. Three-dimensional (corrugated along the axis of the cylinder) disturbances grow with time in accordance with the traditional Lyapunov instability. Calculations allow us to determine the dependence of its quantitative characteristics on the problem parameters.

Keywords: magnetoplasma configurations, model of equilibrium, stability of configurations, perturbations.