ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 518, с. 75–79

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.11, 515.122.252

КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ МЕР И ПСЕВДОКОМПАКТНОСТЬ

© 2024 г. Член-корр. РАН В. И. Богачев[1, 2, 3, 4, *]

Поступило 27.03.2024 г.
После доработки 01.08.2024 г.
Принято к публикации 01.08.2024 г.

Доказана псевдокомпактность тихоновского пространства X и пространства $\mathcal{P}(X)$ радоновских вероятностных мер на нем со слабой топологией при условии, что компактификация Стоуна–Чеха пространства $\mathcal{P}(X)$ гомеоморфна пространству $\mathcal{P}(\beta X)$ радоновских вероятностных мер на компактификации Стоуна–Чеха пространства X.

Ключевые слова: компактификации Стоуна–Чеха, пространство радоновских вероятностных мер, слабая топология, псевдокомпактность

DOI: 10.31857/S2686954324040111, **EDN:** YYKZZN

Пусть X — тихоновское (т. е. вполне регулярное) пространство, βX — его стоун-чеховская компактфикация и $\mathcal{P}(X)$ — пространство радоновских вероятностных мер на X, наделенное слабой топологией. В недавней работе [1] был рассмотрен вопрос о совпадении пространства $\mathcal{P}(\beta X)$ радоновских вероятностных мер на βX со стоун-чеховской компактификацией $\beta\mathcal{P}(X)$ пространства $\mathcal{P}(X)$. Это совпадение понимается в следующем смысле: продолжение по непрерывности естественного вложения $\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(\beta X)$ на компактификацию взаимно однозначно. В цитированной работе доказан следующий результат.

Теорема 1. (i) *Псевдокомпактность пространства мер $\mathcal{P}(X)$ влечет псевдокомпактность X.*

(ii) *Инъективность указанного продолжения вложения $\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(\beta X)$ на $\beta\mathcal{P}(X)$ влечет псевдокомпактность обоих пространств X и $\mathcal{P}(X)$.*

С другой стороны, в [1] построены примеры некомпактных пространств X, для которых указанное совпадение имеет место. К таким пространствам относятся открытый интервал счетных ординалов $[0,\omega_1)$ и плоскость Тихонова $[0,\omega_0]\times[0,\omega_1]\setminus(\omega_0,\omega_1)$ (где ω_0 — наименьший счетный ординал, ω_1 — первый несчетный ординал), показывающая, что совпадение возможно без счетной компактности. Как указано в [1], если вместо стоун-чеховских компактификаций брать компактификации Самюэля с подходящими равномерностями, то совпадение есть всегда. Наконец, в работе [1] был поставлен также ряд вопросов, связанных с компактификациями пространств мер. В настоящей заметке дан ответ на один из этих вопросов и усилен основной результат работы [1], а именно показано, что псевдокомпактность пространств $\mathcal{P}(X)$ и X вытекает из гомеоморфности $\mathcal{P}(\beta X)$ и $\beta\mathcal{P}(X)$. В частности, пространства $\mathcal{P}(\beta\mathbb{N})$ и $\beta\mathcal{P}(\mathbb{N})$ не гомеоморфны. Однако в общем случае вопрос о равенстве в указанном смысле пространств $\mathcal{P}(\beta X)$ и $\beta\mathcal{P}(X)$ при условии их гомеоморфности остается открытым. Неизвестна и описание пространств, для которых равенство верно.

Для тихоновского пространства X через $C_b(X)$ обозначим множество всех ограниченных непрерывных функций на X, а через βX его компактификацию Стоуна–Чеха (компактное пространство, в которое X вложено гомеоморфно как всюду плотное множество с тем свойством, что всякая функция из $C_b(X)$ является сужением на X функции из $C_b(\beta X)$). Линейное пространство всех ограниченных радоновских мер на X обозначим через $\mathcal{M}(X)$. Напомним (см. [2] или [3]), что знакопеременная мера μ на борелевской σ-алгебре пространства X называется

[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия
[3] Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия
[4] Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
*E-mail: vibogach@mail.ru

радоновской, если радоновы ее положительная и отрицательная части, а неотрицательная борелевская мера μ радонова, если для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$.

Слабая топология на пространстве $\mathcal{M}(X)$ задается полунормами

$$p_f(\mu) = \left|\int_X f\,d\mu\right|, \quad f \in C_b(X).$$

Пространство $\mathcal{P}(X)$ вероятностных радоновских мер наделяется индуцированной слабой топологией.

Совпадение $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ в указанном смысле равносильно тому, что всякая ограниченная непрерывная функция на $\mathcal{P}(X)$ равномерно приближается функциями вида

$$\mu \mapsto F\left(l_{f_1}(\mu),\ldots,l_{f_n}(\mu)\right),$$
$$l_{f_i}(\mu) = \int_X f_i\,d\mu, \quad f_i \in C_b(X),$$

где F — многочлен на $\mathbb{R}^n$ (см. [1]).

Следующий результат усиливает утверждение (ii) теоремы 1 из работы [1] с более коротким обоснованием (в части, касающейся псевдокомпактности $\mathcal{P}(X)$, но заключение о самом X опирается на утверждение (i) теоремы 1).

Теорема 2. *Пусть тихоновское пространство X таково, что пространства $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ гомеоморфны. Тогда $\mathcal{P}(X)$ и X псевдокомпактны.*

Доказательство. В силу [1, теорема 2] достаточно проверить псевдокомпактность пространства $\mathcal{P}(X)$. Теперь применим следующий известный факт (см. [4], [5] или [6, с. 221, теорема 9.3]): если тихоновское пространство обладает локально связной компактификацией Стоуна—Чеха, то оно псевдокомпактно. Напомним, что пространство называется локально связным, если всякая точка обладает базой связных открытых окрестностей. Этот факт мы применим к пространству $\mathcal{P}(X)$, компактификация которого в рассматриваемом случае локально связна, ибо по предположению гомеоморфна выпуклому компакту $\mathcal{P}(\beta X)$ в локально выпуклом пространстве $\mathcal{M}(X)$ радоновских мер на X, наделенном слабой топологией. Разумеется, заключение теоремы остается справедливым при формально более слабом условии локальной связности компактификации пространства $\mathcal{P}(X)$, но вряд ли такое условие проще непосредственного требования псевдокомпактности $\mathcal{P}(X)$.

Следствие 1. *Предположим, что тихоновское пространство X можно непрерывно отобразить на всюду плотное множество в пространстве Y, которое не псевдокомпактно (например, в некомпактном метрическом или суслинском пространстве). Тогда пространства $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ не гомеоморфны. В частности, это верно, если X — некомпактное метрическое или суслинское пространство.*

Доказательство. При этом условии пространство X не псевдокомпактно, ибо композиция неограниченной непрерывной функции на пространстве Y с данным отображением из X в Y также непрерывно и неограниченно.

Известно (см. [7] или [8, теорема 1.2.2]), что псевдокомпактное пространство является бэровским, т. е. пересечение всякой последовательности открытых всюду плотных множеств всюду плотно. Поэтому получаем такое заключение.

Следствие 2. *Если пространства $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ гомеоморфны, то $\mathcal{P}(X)$ и X — бэровские пространства.*

В свою очередь, это влечет бэровость всех степеней X^n (см. [9], случай метрических пространств был рассмотрен в [10]). Впрочем, в данном случае это вытекает также и из псевдокомпактности X (см., например, [11, теоремы 5.3.2 и 5.3.3]). Вообще говоря, из бэровости X не следует бэровость $\mathcal{P}(X)$ даже в случае метрических пространств, но интересно выяснить, достаточна ли для бэровости $\mathcal{P}(X)$ псевдокомпактность X. Связанные с бэровостью свойства пространств мер изучались в [12] и [13]. Отметим, что в [14] построен пример в ZFC (система аксиом Цермело—Франклина с аксиомой выбора) сепарабельного метрического пространства X, не являющегося польским, для которого все замкнутые подмножества в $\mathcal{P}(X)$ являются бэровскими пространствами.

С именем Бэра связаны еще два понятия: бэровская σ-алгебра, порожденная непрерывными функциями на тихоновском пространстве X, и меры на ней, называемые бэровскими. На пространстве бэровских мер также определена слабая топология. Через $\mathcal{P}_\sigma(X)$ обозначают пространство вероятностных бэровских мер со слабой топологией. Псевдокомпактность X равносильна компактности $\mathcal{P}_\sigma(X)$. Поэтому в случае гомеоморфности $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ и существования радоновского продолжения всякой бэровской меры на X мы получаем обычную компактность X, а не только псевдокомпактность.

Из равенства $\beta\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\beta X)$ вытекает, что бэровская σ-алгебра пространства $\mathcal{P}(X)$ порождается также линейными функционалами вида

$$\mu \mapsto \int_X f\,d\mu, \quad f \in C_b(X).$$

Это следует из того, что при выполнении указанного равенства всякая ограниченная непрерывная функция на $\mathcal{P}(X)$ равномерно приближается многочленами от таких функционалов (как уже отмечалось выше). Бэровская σ-алгебра всего пространства мер $\mathcal{M}(X)$ всегда порождается такими функционалами, см. [2, теорема 6.10.6], но неясно, верно ли это для $\mathcal{P}(X)$. Само множество $\mathcal{P}(X)$ оказывается бэровским в $\mathcal{M}(X)$ при довольно ограничительном условии, как показывает следующее утверждение.

Предложение 1. *Множество $\mathcal{P}(X)$ входит в бэровскую σ-алгебру пространства $\mathcal{M}(X)$ в точности тогда, когда имеется счетный набор непрерывных функций на X, разделяющих точки, т. е. X можно непрерывно и инъективно отобразить в $\mathbb{R}^\infty$.*

Доказательство. Предположим, что имеется счетный набор непрерывных функций на X, разделяющих точки. Тогда можно перейти к счетному набору ограниченных функций с таким свойством. К нему добавим всевозможные многочлены с рациональными коэффициентами от конечного числа данных функций, а затем подстановки полученных функций в функцию $t \mapsto \min(\max(t,0),1)$. Это дает счетный набор $\{f_n\} \subset C_b(X)$. Покажем, что множество $\mathcal{P}(X)$ задается в $\mathcal{M}(X)$ как пересечение множеств вида $\{l_f(\mu) \ge 0\}$ и $\{l_1(\mu) = 1\}$, где $l_f(\mu)$ — интеграл по мере μ от неотрицательной функции из набора $\{f_n\}$ и $l_1(\mu) = \mu(X)$. Достаточно проверить, что совокупность указанных неравенств выделяет множество неотрицательных мер. Допустим, что нашлась знакопеременная мера μ, интегралы по которой от неотрицательных функций из $\{f_n\}$ неотрицательны. Можно считать, что $|\mu|(X) \le 1$, где $|\mu|$ — полная вариация меры μ. Пусть K — компакт, для которого $\mu(K) = -c < 0$, причем $\mu^+(K) = 0$, где μ^+ — неотрицательная часть μ. Возьмем больший компакт S с $|\mu|(X \setminus S) < c/4$, а также открытое множество U с $K \subset U$ и $|\mu|(U \setminus K) < c/4$. Так как X вполне регулярно, найдется непрерывная функция g на X с $0 \le g \le 1$, $g|_K = 1$, $g|_{X\setminus U} = 0$. В силу выбора набора $\{f_n\}$ и теоремы Стоуна—Вейерштрасса в этом наборе найдется функция f_n, для которой $0 \le f_n \le 1$ и $\sup_S |g(x) - f_n(x)| < c/4$. Тогда с учетом оценок $|\mu|(S) \le 1$, $|\mu|(X \setminus S) < c/4$ и $|\mu|(U \setminus K) < c/4$ получаем

$$\int_X f_n\,d\mu \le \int_S f_n\,d\mu + c/4 \le \int_S g\,d\mu + c/2 = \mu(K) + \int_{U\setminus K} g\,d\mu \le$$
$$\le \mu(K) + 3c/4 = -c/4,$$

что дает противоречие.

Предположим теперь, что $\mathcal{P}(X)$ входит в бэровскую σ-алгебру пространства $\mathcal{M}(X)$. Тогда оно имеет вид

$$P = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : (F_1(\mu), F_2(\mu), \ldots) \in B\},$$

где B — борелевское множество в $\mathbb{R}^\infty$,

$$F_i(\mu) = \int_X f_i\,d\mu, \quad f_i \in C_b(X).$$

Заметим, что функции f_i разделяют точки пространства X. В самом деле, иначе есть две разные точки $a, b \in X$, для которых $f_i(a) = f_i(b)$ при всех i. Значит, $F_i(\delta_a) = F_i\big(\delta_a + (\delta_a - \delta_b)\big)$ при всех i. Так как $\delta_a \in P$, то $\delta_a + (\delta_a - \delta_b) \in P$, что неверно.

Некоторые равносильные условия существования последовательности непрерывных функций, разделяющих точки, можно найти в [15] (см. также [2, теорема 8.10.39]).

В работе [1] был рассмотрен пример $X = \beta\mathbb{N} \setminus \{p\}$, где $p \in \mathbb{N}^* := \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тогда X счетно компактно, причем $\beta X = \beta\mathbb{N}$ (см. [16, с. 239, задача 58] или [17, п. 2.14]), а если p есть P-точка, то пространство $\mathcal{P}(X)$ также счетно компактно, как показано в [1]. Точка $p \in \mathbb{N}^*$ называется P-точкой, если пересечение всякого счетного набора ее открытых окрестностей содержит ее открытую окрестность в $\mathbb{N}^*$. Такие точки существуют в предположении гипотезы континуума (CH) или при ее отрицании и аксиоме Мартина (MA), но в ZFC непротиворечиво их отсутствие, см. [16, задача 55 гл. IV], [18, с. 138], [19, следствие 1.7.2], [6, с. 107], [20], [21]. Поскольку стоун-чеховская компактификация здесь одноточечна, пространство $\mathcal{P}(\beta X)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\mathcal{P}(X)$ и меры Дирака δ_p в точке p. Однако неясно, совпадает ли оно с $\beta\mathcal{P}(X)$.

Остается неизвестным, следует ли равенство $\beta\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\beta X)$ из псевдокомпактности X или $\mathcal{P}(X)$, а также из счетной компактности какого-либо из этих пространств. Неясно, сохраняется ли оно при умножении на компакты (напомним, что псевдокомпактность таким свойством обладает, см. [8]). В построенных в [1] примерах выполнения этого равенства для некомпактных пространств их компактификации Стоуна–Чеха одноточечны. Интересно рассмотреть случай общего пространства X с одноточечной компактификацией Стоуна – Чеха (такое пространство автоматически псевдокомпактно, см. [8, теорема 1.3.8]). Известным частным случаем является пространство Мрувки (см. [22, упражнение 3.6.I] или подробное обсуждение в [23]), для которого $M = S \cup D$, где S счетно и всюду плотно в M, все точки S изолированы, D — несчетное дискретное замкнутое множество, дизъюнктное с S. Здесь $\beta M = M \cup \{p\}$, $\mathcal{P}(M)$ состоит из вероятностных мер, сосредоточенных на счетных множествах, $\mathcal{P}(\beta M)$ совпадает с выпуклой оболочкой $\mathcal{P}(M)$ и меры Дирака в точке p из одноточечной компактификации. Другой заслуживающий внимания пример — подпространство S в тихоновском кубе $[0,1]^{[0,1]}$, состоящее из функций со счетными носителями (так называемое Σ-произведение). Это подпространство секвенциально компактно и всюду плотно, причем $\beta S = [0,1]^{[0,1]}$, см. [22, п. 2.7.13].

Открыт вопрос о возможном несовпадении мощностей $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$. Так как $\mathcal{P}(\beta X)$ — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве радоновских мер, то его мощность κ совпадает со своей счетной степенью, т. е. $\kappa = \kappa^{\omega_0}$, см. [24].

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю К. А. Афонина за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В.И.* // Функц. анал. и его прил. 2024. Т. 58. № 1. С. 4–21.
2. *Bogachev V.I.* Measure theory. V. 2. Springer, New Your, 2007.
3. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2018.
4. *Banaschewski B.* // Canadian J. Math. 1956. V. 8. P. 395–398.
5. *Henriksen M., Isbell J.R.* // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 574–582.
6. *Walker R.C.* The Stone-Čech compactification. Springer-Verlag, Berlin – New York, 1974.
7. *Colmez J.* // C. R. Acad. Paris. 1952. T. 234. P. 1019–1921.
8. *Angoa-Amador J., Contreras-Carreto A., Ibarra-Contreras M., Tamariz-Mascarúa A.* Basic and classic results on pseudocompact spaces. In: Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Edited by Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa and Mikhail Tkachenko. Developments in Mathematics, 55, pp. 1–38, Springer, Cham, 2018.
9. *Koumoullis G.* // Adv. Math. 1996. V. 124. № 1. P. 1–24.
10. *Wójcicka M.* // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1985. V. 33. P. 305–311.
11. *Dorantes-Aldama A., Okunev O., Tamariz-Mascarúa Á.* Weakly pseudocompact spaces. In: Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Edited by Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa and Mikhail Tkachenko. Developments in Mathematics, 55, pp. 151–190, Springer, Cham, 2018.
12. *Brown J.B.* // Fund. Math. 1977. V. 96. P. 189–193.
13. *Brown J.B., Cox G.V.* // Fund. Math. 1984. V. 121. P. 143–148.
14. *Krupski M.* // J. Inst. Math. Jussieu. 2022. V. 21. № 3. P. 851–868.
15. *Koumoullis G., Sapounakis A.* // Mich. Math. J. 1984. V. 31. № 1. P. 31–47.
16. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Наука, М., 1974.
17. *Vaughan J.E.* Countably compact and sequentially compact spaces. In: Handbook of set-theoretic topology, pp. 569–602, North-Holland, Amsterdam, 1984.
18. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. Van Nostrand, Princeton – New York, 1960.
19. *van Mill J.* An introduction to $\beta\omega$. In: Handbook of set-theoretic topology, pp. 503–567, North-Holland, Amsterdam, 1984.
20. *Szymański A.* // Colloq. Math. 1977. V. 37. P. 185–192.
21. *Wimmers E.* // Israel J. Math. 1982. V. 43. № 1. P. 28–48.
22. *Энгелькинг Р.* Общая топология. Мир, М., 1986.
23. *Hernández-Hernández F., Hrušák M.* Topology of Mrówka-Isbell spaces. In: Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Edited by Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa and Mikhail Tkachenko. Developments in Mathematics, 55, pp. 253–289, Springer, Cham, 2018.
24. *Lipecki Z.* // Colloq. Math. 2011. V. 123. № 1. P. 133–147.

COMPACTIFICATION OF SPACES OF MEASURES AND PSEUDOCOMPACTNESS

Corresponding Member of the RAS V. I. Bogachev[a, b, c, d]

[a]*Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia*

[b]*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[c]*Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russia*

[d]*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

We prove pseudocompactness of a Tychonoff space X and the space $\mathcal{P}(X)$ of Radon probability measures on it with the weak topology under the condition that the Stone–Čech compactification of the space $\mathcal{P}(X)$ is homeomorphic to the space $\mathcal{P}(\beta X)$ of Radon probability measures on the Stone–Čech compactification of the space X.

Keywords: Stone–Čech compactification, space of Radon probability measures, weak topology, pseudocompactness