

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ВНУТРИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ И В ОБЛАСТЯХ ИХ ВЛИЯНИЯ

© 2024 г. В. В. Остапенко^{1, *}, Е. И. Полунина^{1, **}, Н. А. Хандеева^{1, ***}

Представлено академиком РАН Е. Е. Тыртышниковым

Получено 27.03.2024 г.

После доработки 23.07.2024 г.

Принято к публикации 23.07.2024 г.

Проведен сравнительный анализ точности численных схем TVD (Total Variation Diminishing) второго порядка, RBM (Rusanov-Burstein-Mirin) третьего порядка и A-WENO (Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени при расчете специальной задачи Коши для уравнений мелкой воды с разрывными начальными данными, точное решение которой содержит центрированную волну разрежения и не содержит ударную волну. Показано, что внутри центрированной волны разрежения и в области ее влияния решения всех трех схем с различными порядками сходятся к разным инвариантам точного решения, что приводит к снижению точности этих схем при вычислении вектора базисных переменных рассматриваемой задачи Коши. Для теоретического обоснования данных численных результатов применяется Р-форма первого дифференциального приближения разностных схем.

Ключевые слова: численные схемы повышенной точности, уравнения мелкой воды, центрированные волны разрежения

DOI: 10.31857/S2686954324040109, **EDN:** YYRMQN

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] был предложен метод построения комбинированных численных схем сквозного счёта, которые, в отличие от NFC (Nonlinear Flux Correction) схем [2–7] и гибридных схем [8–10], не только монотонно локализуют фронты ударных волн, но также сохраняют повышенную точность в областях их влияния. Используя методику, разработанную в [1], различные комбинированные схемы были построены в [11, 12], где они применялись для расчета задач Коши для системы уравнений мелкой воды с гладкими периодическими начальными данными, когда ударные волны возникают в результате градиентных катастроф внутри расчетной области. Численное моделирование таких задач было об-

условлено тем, чтобы на первом этапе построения теории комбинированных схем избежать проблем, связанных с сохранением повышенной точности этих схем при аппроксимации разрывных начальных и граничных условий. Поэтому на следующих этапах развития этой теории необходимо исследовать точность разностных схем сквозного счёта при численном расчете обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач с разрывными начальными и граничными условиями.

Первый шаг в этом направлении сделан в [13], где был проведен сравнительный анализ точности монотонной схемы UpWind первого порядка [14] и двух NFC-схем: TVD второго порядка [15] и WENO5 третьего порядка по времени [16] при расчете для нелинейного уравнения переноса задачи Коши с кусочно-линейными разрывными периодическими начальными данными. Было показано, что в случае устойчивых начальных разрывов, из которых формируется последовательность ударных волн, порядок сходимости всех трех схем между ударными волнами совпадает с их точностью на гладких решении-

¹ Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: ostigil@mail.ru

**E-mail: ekpolunina2014@gmail.com

***E-mail: nzyuzina1992@gmail.com

ях. В случае неустойчивых начальных разрывов, при распаде которых формируется последовательность центрированных волн разрежения, все три рассмотренные схемы имеют первый порядок сходимости внутри этих волн разрежения, независимо от их точности на гладких решениях.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ точности численных схем TVD [15], RBM [17, 18] и A-WENO [19] при расчете специальной задачи Коши для уравнений мелкой воды с разрывными начальными данными, точное решение которой содержит центрированную волну разрежения, но не содержит ударную волну. Показано, что внутри центрированной волны разрежения и в области ее влияния решения всех трех схем с различными порядками сходятся к разным инвариантам точного решения. В частности, в волне разрежения численные решения с первым порядком сходятся к инварианту, который распространяется в этой волне вдоль характеристик, выходящих из ее центра, и приблизительно со вторым порядком сходятся к другому инварианту, который переносится в центрированную волну вдоль пересекающих ее характеристик. Это приводит к соответствующему снижению точности тестируемых схем при вычислении вектора базисных переменных рассматриваемой задачи Коши. С использованием Р-формы первого дифференциального приближения разностных схем [20] дается теоретическое обоснование данных численных результатов.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Векторная форма записи системы уравнений мелкой воды имеет вид [3]:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь x и t — пространственная и временная переменные, измеряемые в метрах (m) и секундах (s), $H(x, t)$ и $q(x, t)$ — глубина и расход жидкости, имеющие размерности m и m^2/s , g — ускорение свободного падения (в расчетах $g = 10 \text{ m/s}^2$). Рассмотрим для системы (1), (2), задачу Коши с начальными данными

$$H(x, 0) = \begin{cases} H_1, & x \leq 0, \\ \varphi(x), & x > 0, \end{cases} \quad q(x, 0) = \begin{cases} q_1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$H_1 = 5 \text{ m}, \quad \varphi(x) = \left(2 - \frac{1}{\pi} \arctan(x + 1)\right) m, \quad (4)$$

$$q_1 = 2\sqrt{g}(\sqrt{\varphi(0)} - \sqrt{H_1})H_1 \approx -28.88 \text{ m/s}^2. \quad (5)$$

Далее для задачи Коши (1)–(5) будем использовать аббревиатуру SCP (Special Cauchy Problem). Будем также применять следующие обозначения: $v = q/H$ — горизонтальная скорость жидкости, $c = \sqrt{gH}$ — скорость распространения малых возмущений в мелкой воде, $\lambda_1 = v - c$ и $\lambda_2 = v + c$ — собственные значения матрицы Якоби $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_u(\mathbf{u})$ системы (1), представляющие собой скорости характеристик, вдоль которых распространяются инварианты $w_1 = v - 2c$ и $w_2 = v + 2c$ системы (1).

Из формул (4) и (5) следует, что на разрыве начальных данных (3) инвариант w_2 системы (1) является постоянным, т.е.

$$w_2(0) = w_2(0 + 0) = 2\sqrt{g\varphi(0)} \approx 8.37 \text{ m/s}. \quad (6)$$

Это означает, что точное решение задачи SCP представляет собой автомодельную центрированную волну разрежения индекса $i = 1$ распространяющуюся в отрицательном направлении оси x по постоянному фоновому течению (H_1, q_1) . Справа к центрированной волне примыкает волна повышения уровня жидкости, формируемая начальной глубиной $\varphi(x)$.

В результате точное решение задачи SCP на ограниченном временном интервале $[0, T]$ (на котором эволюция волны повышения еще не приводит к возникновению ударной волны) содержит четыре качественно различных области гладкости (рис. 1), разделенных слабыми разрывами, расположенными на характеристиках системы (1). Это область R центрированной волны разрежения, расположенная между прямолинейными характеристиками L_1^- и L_1^+ первого семейства, выходящими из точек $x = 0$ и $x = 0 + 0$ на оси x , область U постоянного течения (H_1, q_1) , находящаяся левее характеристики L_1^- , область V влияния центрированной волны, расположенная между характеристиками L_1^+ и L_2 , где L_2 — характеристика второго семейства, выходящая из точки $x = 0 + 0$ на оси x , и область W повышения уровня жидкости, находящаяся правее характеристики L_2 . При этом инвариант w_2 точного решения имеет постоянное значение (6) в областях U , R и V .

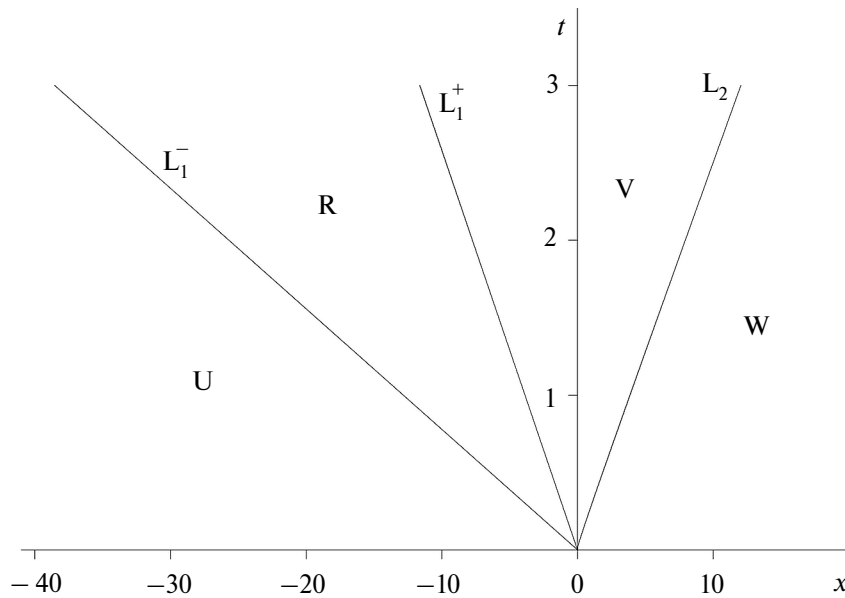


Рис. 1. Различные области гладкости точного решения задачи SCP.

3. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

Для численного решения задачи Коши (1)–(3) будем применять явные двухслойные по времени консервативные схемы

$$\frac{\mathbf{v}_j^{n+1} - \mathbf{v}_j^n}{\tau} + \frac{\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n - \bar{\mathbf{f}}_{j-1/2}^n}{h} = 0, \quad (7)$$

в которых численные потоки $\bar{\mathbf{f}}_{j\pm 1/2}^n$ определяют по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_{j-l+1}^n, \mathbf{v}_{j-l+2}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+l}^n, \theta), \\ \bar{\mathbf{f}}_{j-1/2}^n &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_{j-l}^n, \mathbf{v}_{j-l+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+l-1}^n, \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\theta = \tau / h$ и функция $\bar{\mathbf{f}}$ согласована с дифференциальным потоком $\mathbf{f}$ системы (1) в смысле выполнения тождества

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}, \theta) = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Функции $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}_j(x_j, t_n)$, входящие в разностную схему (7), (8), вычисляются в узлах равномерной прямоугольной сетки

$$\begin{aligned} S &= \{(x_j, t_n) : x_j = jh, M_1 \leq j \leq M_2; \\ & \quad t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где h – шаг сетки по пространству, а τ – шаг сетки по времени, удовлетворяющий условию устойчивости Куранта

$$\tau = \frac{zh}{\max_{i=1,2} \max_{j,n} |\lambda_i(\mathbf{v}_h(x_j, t_n))|}, \quad (10)$$

в котором $z \in (0, 1)$ – коэффициент запаса. Целые числа M_1 и M_2 , определяющие пространственный размер сетки (9), удовлетворяют неравенствам $M_1 \ll -1$ и $M_2 \gg 1$, а целое число N , определяющее количество временных слоев в сетке (9), задает момент времени $T = N\tau$, до которого проводится численный расчет.

Поскольку разрыв начальных данных (3) расположен в узле $x_0 = 0$ сетки (9), то начальные значения численного решения будем задавать по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^0 &= \mathbf{v}_h(x_j, 0) = \\ &= \begin{cases} \mathbf{u}(x_j, 0), & x_j \neq 0, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{u}(x_j - 0, 0) + \mathbf{u}(x_j + 0, 0)), & x_j = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку при $x \leq 0$ начальные данные (3) являются постоянными, а при $x > 0$ начальный расход $q(x, 0) = 0$ и начальная глубина удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.5 \text{ м},$$

то выбирая границы расчетной области (9) таким образом, что

$$X_1 = hM_1 \ll x_1^-(T), \quad X_2 = hM_2 \gg x_2(T), \quad (12)$$

где $x = x_1^-(t)$ и $x = x_2(t)$ – уравнения характеристик L_1^- и L_2 , граничные значения численного решения можно задавать путем точной аппрок-

симации начальных условий (3) по следующим формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^n &= \mathbf{v}_h(x_j, t_n) = \mathbf{u}(x_j, 0), \\ j &= \overline{M_1, M_1 + l - 1}, j = \overline{M_2 - l + 1, M_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом начальных и граничных условий (11) и (13) решение схемы (7) однозначно вычисляется в сеточной области (9).

В качестве конкретных численных схем (7) мы будем использовать схемы TVD, RBM и A-WENO, детальное описание которых приводится в работах [15], [17, 18] и [19], соответственно.

4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Для приближенной оценки порядков локальной сходимости численного решения $\mathbf{v}_h(x_j, t_n)$, построенного на равномерной сетке (9), зафиксируем на этой сетке некоторый узел (x_j, t_n) , где $n \geq 1$, и введем для него новое обозначение (x_*, t_*) , где $x_* = jh$ и $t_* = n\tau > 0$. Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток

$$\begin{aligned} S_i &= \{x_j^i, t_n^i : x_j^i = jh_i, 2^{i-1}M_1 \leq j \leq 2^{i-1}M_2, n^i = \\ &= n\tau_i, 0 \leq n \leq 2^{i-1}N\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $h_i = h / 2^{i-1}$, $\tau_i = \tau / 2^{i-1}$, получаемых путем сжатия базисной сетки (9), численное решение $\mathbf{v}_{h_i}(x_j^i, t_n^i)$ в точке (x_*, t_*) сходится к точному решению $\mathbf{u}(x, t)$ с порядком r . Это означает, что в точке (x_*, t_*) с точностью $o(h_i^r)$ выполнено условие

$$\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{u} = \mathbf{A}h_i^r, \quad (15)$$

где $\mathbf{A}$ — векторная величина, не зависящая от h_i и такая, что $|\mathbf{A}| > 0$. Из условия (15) следуют [21] формулы Рунге для приближенного определения порядка сходимости

$$r = \log_2 \frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|} = \log_{1/2} \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|} \quad (16)$$

и вектора ошибок

$$\delta \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h - \mathbf{u} = (\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|} \right)^{-1} \quad (17)$$

численного решения $\mathbf{v}_h$ на базисной сетке (9).

Рассмотрим некоторую гладкую скалярную функцию $w(\mathbf{u})$ векторного решения $\mathbf{u}$, точность вычисления которой мы хотим определить. Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток (14) численная функция

$w_{h_i} = w(\mathbf{v}_{h_i})$ сходится в точке (x_*, t_*) с порядком ρ к функции $w = w(\mathbf{u})$. Это означает, что в точке (x_*, t_*) с точностью $o(h_i^\rho)$ выполнено условие

$$w_{h_i} - w = Bh_i^\rho, \quad (18)$$

где B — скалярная величина, независящая от h_i и такая, что $B \neq 0$. Если вычисляемое решение $\mathbf{u}$ является гладким, то порядки сходимости r и ρ совпадают ($r = \rho$) для любой гладкой функции $w(\mathbf{u})$. В то же время, если точное решение $\mathbf{u}$ содержит центрированные волны разрежения и ударные волны, то внутри центрированных волн разрежения, а также в областях влияния ударных и центрированных волн для некоторых функций $w(\mathbf{u})$, в частности для инвариантов точного решения, порядки сходимости r и ρ могут различаться ($r \neq \rho$). С учетом этого, из (18), также как из (15), следуют [22] приближенные формулы для определения порядка сходимости

$$\rho = \log_2 \frac{|w_{h_1} - w_{h_2}|}{|w_{h_2} - w_{h_3}|} = \log_{1/2} \frac{|w_{h_2} - w_{h_3}|}{|w_{h_1} - w_{h_2}|} \quad (19)$$

и ошибки

$$\delta w_h = w_h - w = (w_{h_1} - w_{h_2}) \left(1 - \frac{|w_{h_2} - w_{h_3}|}{|w_{h_1} - w_{h_2}|} \right)^{-1}$$

численного решения $w_h = w(\mathbf{v}_h)$.

Если порядки локальной сходимости $r = r_h(x_j, T)$ и $\rho = \rho_h(x_j, T)$, определяемые по формулами (16) и (19), сильно осциллируют, то на приводимых ниже рисунках мы будем показывать осредненные и ограниченные сверху значения этих порядков

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_h(x_j, T) = \begin{cases} \hat{r}(x_j, T), & \hat{r}(x_j, T) \leq R, \\ R, & \hat{r}(x_j, T) > R, \end{cases} \\ \bar{\rho} &= \bar{\rho}_h(x_j, T) = \begin{cases} \hat{\rho}(x_j, T), & \hat{\rho}(x_j, T) \leq R, \\ R, & \hat{\rho}(x_j, T) > R, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

посчитанные на достаточно мелкой базисной сетке (9), где $R > 3$ и

$$\hat{r}_h(x_j, T) = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k r_h(x_{j+i}, T),$$

$$\hat{\rho}_h(x_j, T) = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \rho_h(x_{j+i}, T)$$

для всех индексов j , удовлетворяющих неравенствам $M_1 + k \leq j \leq M_2 - k$, в которых k — за-

данное натурально число. На рисунках мы будем приводить относительные погрешности численных решений, определяемые по формулам

$$\Delta v = \Delta v_h(x_j, T) = \lg \frac{|\delta v_h(x_j, T)|}{|v_h(x_j, T)|},$$

$$\Delta w_h = \Delta w_h(x_j, T) = \lg \frac{|\delta w_h(x_j, T)|}{|w_h(x_j, T)|}. \quad (21)$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 2–4 в момент времени $T = 3$ s приведены результаты расчетов задачи SCP по схемам TVD, RBM и A-WENO на равномерной сетке (9) с шагами $h = 0.1$ m и $\tau = 0.005$ s, что гарантирует выполнение условия устойчивости (10). Численная сетка (9) задана в пространственной области $[X_1, X_2]$, удовлетворяющей условиям (12), где $X_1 = -150$ m и $X_2 = 150$ m. На рис. 2 показано сравнение точного и численных значений глубин жидкости, где точное решение моделируется расчетом по схеме A-WENO на достаточно мелкой сетке (9). На рис. 3 приведены порядки сходимости (20), где $R = 3.5$ и $k = 10$, а на рис. 4 показаны относительные дисбалансы (21), получаемые при вычислении точного решения u , а также его инвариантов w_1 и w_2 . Результаты расчетов на рис. 2–4 приведены для каждого 18-го пространственного узла $j = 18i$ сетки (9). Из рис. 2 следует, что на такой сетке все схемы с достаточно высокой точностью локализуют слабые

разрывы на границах центрированной волны разрежения.

Поскольку рассматриваемые схемы точно воспроизводят постоянное течение (H_1, q_1) в области U , находящейся на рис. 1 левее характеристики L_1^- , то в этой области ошибки (21) численных решений равны нулю, а порядки сходимости (20) не определены. Кроме того, в некоторых ε -окрестностях $(L_1^-)_\varepsilon$, $(L_1^+)_\varepsilon$ и $(L_2)_\varepsilon$ слабых разрывов точного решения, расположенных на характеристиках L_1^- , L_1^+ и L_2 , порядки сходимости также не определены и поэтому их формальные значения, получаемые по формулам (20), дают в этих окрестностях характерные осцилляции. С учетом этого области U и $(L_1^-)_\varepsilon$ на рис. 3 и 4 не приводятся. Далее мы будем использовать следующие обозначения

$$R_\varepsilon = R \setminus ((L_1^-)_\varepsilon \cup (L_1^+)_\varepsilon),$$

$$V_\varepsilon = V \setminus ((L_1^+)_\varepsilon \cup (L_2)_\varepsilon),$$

$$W_\varepsilon = W \setminus (L_2)_\varepsilon$$

для тех частей областей R , V и W , которые не пересекаются с ε -окрестностями характеристик L_1^- , L_1^+ и L_2 .

Из рис. 3 следует, что в области W_ε для каждой из рассматриваемых схем порядки сходимости численного решения к векторному решению u и его инвариантам w_1 , w_2 совпадают ($\bar{r} = \bar{r}_1 = \bar{r}_2$); при этом схема TVD имеет второй порядок, а схемы RBM и A-WENO третий порядок сходимости, что согласуется с их порядками

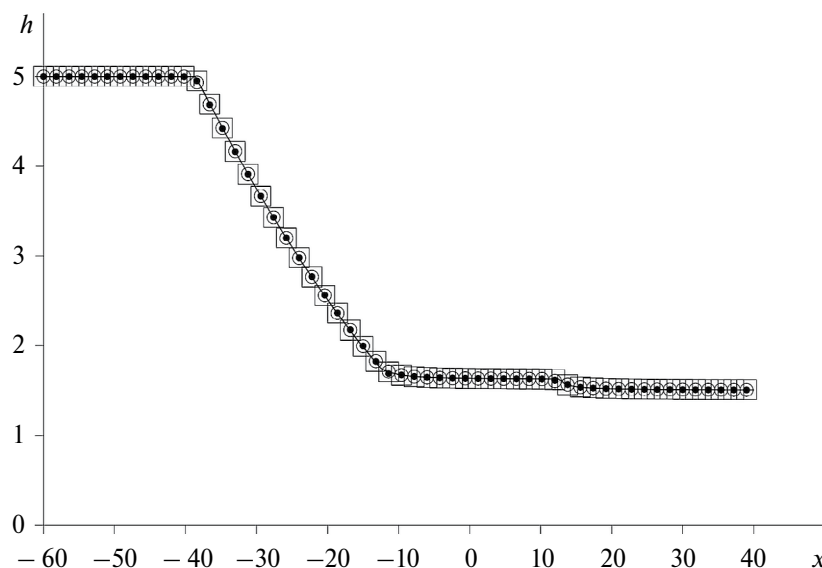


Рис. 2. Сравнение точного (сплошная линия) и численных значений глубин жидкости, получаемых в момент времени $T = 3$ при расчете задачи SCP по схемам TVD (кружки), RBM (точки) и A-WENO (квадратики).

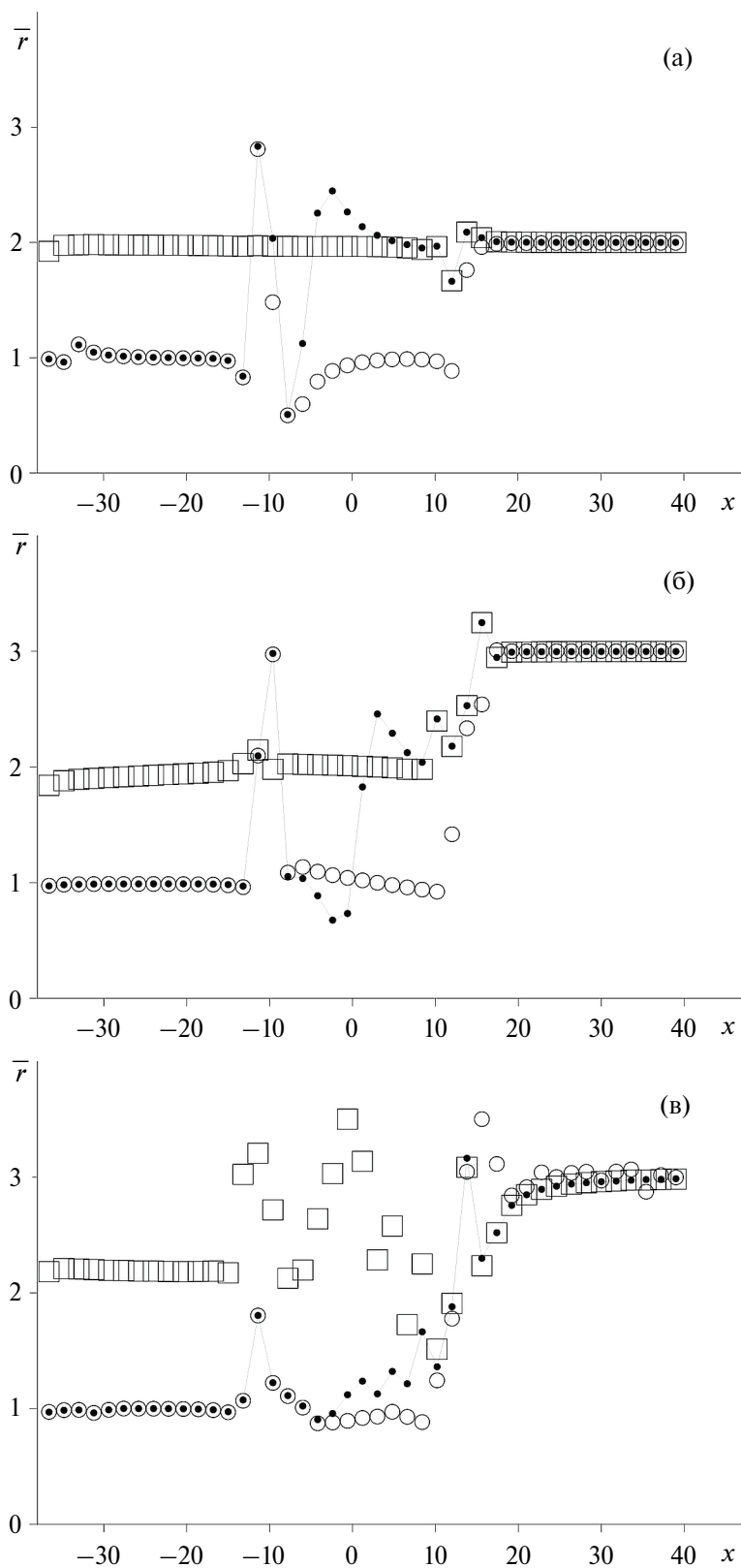


Рис. 3. Порядки сходимости численных решений к векторному решению задачи SCP (точки), а также к его инвариантам w_1 (кружки) и w_2 (квадратики), получаемые по схемам TVD (а), RBM (б) и A-WENO (в).

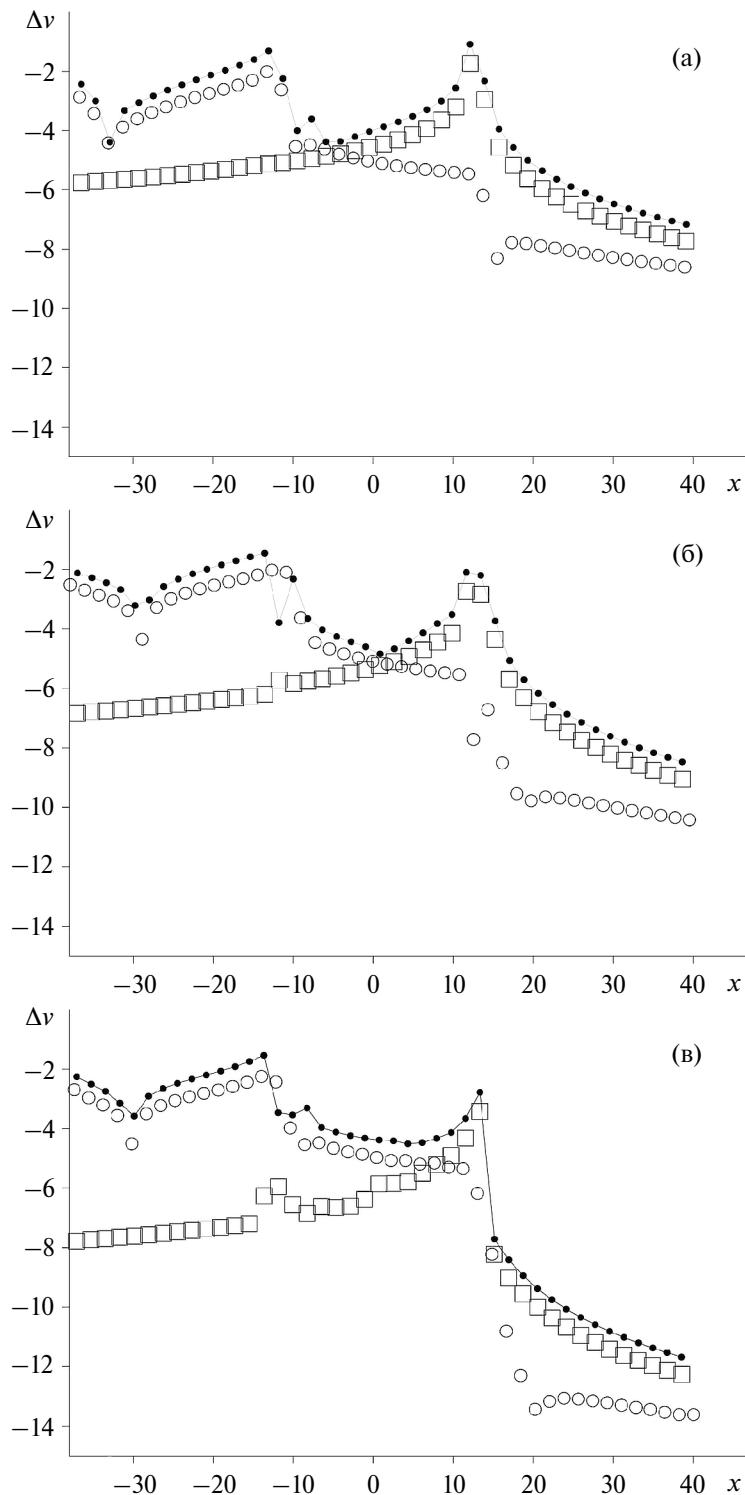


Рис. 4. Относительные дисбалансы, получаемые при вычислении векторного решения задачи SCP (точки), а также его инвариантов w_1 (кружки) и w_2 (квадратики) по схемам TVD (а), RBM (б) и A-WENO (в).

аппроксимации на гладких решениях. Несмотря на это (рис. 4), во всех схемах инвариант w_1 вычисляется в области W_ε с существенно более высокой точностью, чем инвариант w_2 . Из рис. 4

также следует, что в области W_ε точность схемы TVD второго порядка существенно ниже, чем схем RBM и A-WENO третьего порядка. При этом точность схемы A-WENO в области W_ε су-

шественно выше, чем схемы RBM, поскольку по пространству схема A-WENO имеет пятый, а схема RBM третий порядок аппроксимации.

Из рис. 3 следует, что в области R_ε все схемы с первым порядком сходятся к векторному решению $\mathbf{u}$ и его инварианту w_1 , и приблизительно со вторым порядком к инварианту w_2 , т.е. $\bar{r} = \bar{r}_1 = 1$ и $\bar{r}_2 \approx 2$. В результате (рис. 4) в области R_ε все схемы имеют приблизительно одинаковую точность при вычислении векторного решения $\mathbf{u}$ и его инварианта w_1 , которая существенно ниже, точности вычисления инварианта w_2 , т.е.

$$\Delta \mathbf{v}_h \approx \Delta(w_1)_h \gg \Delta(w_2)_h.$$

В области V_ε все схемы имеют (рис. 3) приблизительно первый порядок сходимости ($\bar{r}_1 \approx 1$) к инварианту w_1 , а схемы TVD и RBM сохраняют второй порядок сходимости ($\bar{r}_2 = 2$) к инварианту w_2 ; в схеме A-WENO порядки сходимости $\bar{r}_2$, получаемые по второй формуле (20), сильно осциллируют, что означает отсутствие регулярной сходимости к инварианту w_2 . При этом во всех схемах порядки сходимости $\bar{r}$ к векторному решению $\mathbf{u}$ в левой части области V_ε ближе к значениям $\bar{r}_1$, а в правой части этой области к значениям $\bar{r}_2$. Связано это с тем (рис. 4), что в области V_ε ошибки вычисления инварианта w_1 возрастают, а инварианта w_2 убывают.

6. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для теоретического обоснования полученных в предыдущем разделе численных результатов, воспользуемся P-формой первого дифференциального приближения схемы (7), которая представляет собой [20] систему дифференциальных уравнений

$$(\mathbf{v}_h)_t + \mathbf{f}(\mathbf{v}_h)_x = h^k \Psi[\mathbf{v}_h], \quad (22)$$

где k — порядок аппроксимации схемы (7), $\Psi[\mathbf{v}_h]$ — дифференциальный оператор, зависящий от функции $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h(x, t)$ и ее частных производных по x до $(k+1)$ -ой включительно. Система (22) получается из схемы (7) следующим образом [42]: функции $\mathbf{v}_{j+l}^{n+s} = \mathbf{v}_h(x_j + lh, t_n + s\tau)$, заданные в узлах сетки (9), заменяются на функции $\mathbf{v}_h(x + lh, t + s\tau)$, зависящие от непрерывно меняющихся аргументов x и t ; эти функции разлагаются в ряды Маклорена по h и τ , где $\tau = \theta h$, после чего с учетом дифференциальных следствий системы (22) производные по t порядка выше первого выражаются через производные по x .

Система (22) позволяет моделировать поведение численных решений схемы (7) в различных областях гладкости аппроксимируемого точного решения.

Предположим, что решение $\mathbf{v}_h$ системы (22) в некоторой области Ω с порядком $r \leq k$ сходится к решению $\mathbf{u}$ задачи SCP, т.е. в этой области с точностью $o(h^r)$ выполнено равенство

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{u} + h^r \mathbf{v}_r, \quad (23)$$

где $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r(x, t)$ — функция, задающая главный член ошибки (из рис. 3 следует, что $r = k$ при $\Omega = W_\varepsilon$ и $r = 1$ при $\Omega = R_\varepsilon$). Выясним с какой скоростью в области Ω инварианты

$$(w_1)_h = F_1(\mathbf{v}_h), \quad (w_2)_h = F_2(\mathbf{v}_h)$$

решения $\mathbf{v}_h$ сходятся к инвариантам

$$w_1 = F_1(\mathbf{u}) = v - 2c, \quad w_2 = F_2(\mathbf{u}) = v + 2c$$

решения $\mathbf{u}$.

Зафиксируем индекс $i = 1, 2$ и в приводимых далее формулах для краткости будем его опускать. С учетом этого инварианты w и w_h удовлетворяют характеристическим уравнениям

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{\lambda(\mathbf{u})} = w_t + \lambda(\mathbf{u})w_x = 0 \quad (24)$$

и

$$\left. \frac{dw_h}{dt} \right|_{\lambda(\mathbf{v}_h)} = (w_h)_t + \lambda(\mathbf{v}_h)(w_h)_x = h^k \Phi[\mathbf{v}_h], \quad (25)$$

где $\Phi[\mathbf{v}_h] = \mathbf{I}(\mathbf{v}_h)\Psi[\mathbf{v}_h]$ и $\mathbf{I}$ — левый собственный вектор, отвечающий собственному значению λ . Подставляя в формулу $w_h = F(\mathbf{v}_h)$ разложение (23), с учетом равенства $w = F(\mathbf{u})$ с точностью $o(h^r)$ получаем

$$w_h = w + h^r \omega_r, \quad (26)$$

где $\omega_r = F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_r$. Подставляя в уравнение (25) разложения (23) и (26), с учетом формул

$$\lambda(\mathbf{u} + h^r \mathbf{v}_r) = \lambda(\mathbf{u}) + h^r \lambda_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_r + o(h^r),$$

$$\Phi[\mathbf{u} + h^r \mathbf{v}_r] = \Phi[\mathbf{u}] + O(h^r)$$

и уравнения (24), с точностью $o(h^r)$ получаем характеристическое уравнение

$$\left. \frac{d\omega_r}{dt} \right|_{\lambda(\mathbf{u})} = (\omega_r)_t + \lambda(\mathbf{u})(\omega_r)_x = \Psi_r(\mathbf{V}), \quad (27)$$

в котором

$$\Psi_r(\mathbf{V}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_r, w) = \delta_{kr} \Phi[\mathbf{u}] - (\lambda_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_r)_x, \quad (28)$$

где $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_r, w)$ — вспомогательная вектор-функция, δ_{kr} — символ Кронекера.

Зафиксируем некоторую точку $(x^*, t^*) \in \Omega$ и рассмотрим характеристику

$$L_\lambda^* = \{(x, t) : x = x_\lambda(t), t_b \leq t \leq t^*\}, \quad (29)$$

распространяющуюся со скоростью $(x_\lambda)_t = \lambda(\mathbf{u})$ и приходящую в точку (x^*, t^*) из точки $(x_b, t_b) \in \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ — граница области Ω . Из рис. 1 следует, что в интересующих нас случаях, когда $\Omega = W_\varepsilon$ или $\Omega = R_\varepsilon$, выполнено условие $L_\lambda^* \subseteq \Omega$. Интегрируя с учетом этого уравнение (27) вдоль характеристики (29), получаем

$$\omega_r(x^*, t^*) = \omega_r(x_b, t_b) + \int_{t_b}^{t^*} \Psi_r(\mathbf{V}(x_\lambda(t), t)) dt. \quad (30)$$

Предположим сначала, что $\Omega = W_\varepsilon$, в силу чего $r = k$ и в формуле (28) коэффициент $\delta_{kr} = \delta_{kk} = 1$. В этом случае (рис. 1) характеристика (29) выходит из положительной части оси x , т.е. $t_b = 0$ и $x_b > 0$, где начальные данные (3) являются гладкими. Поскольку численная аппроксимация (11) начальных данных (3) в области их гладкости является точной, т.е. $\mathbf{v}_h(x, 0) = \mathbf{u}(x, 0)$, то из равенств

$$w_h(x, 0) = F(\mathbf{v}_h(x, 0)) = F(\mathbf{u}(x, 0)) = w(x, 0)$$

с учетом разложения (26) получаем $\omega_k(x_b, 0) = 0$. В результате, формула (30) принимает вид

$$\omega_k(x^*, t^*) = \int_0^{t^*} \Psi_k(\mathbf{V}(x_\lambda(t), t)) dt.$$

Так как $\omega_k(x^*, t^*) \neq 0$ для всех точек $(x^*, t^*) \in W_\varepsilon$ при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, то с учетом (26) в области W_ε численные решения каждой схемы (рис. 3) сходятся к инвариантам w_1 и w_2 с одинаковым порядком $r = k$. При этом (рис. 4) точность вычисления инварианта w_1 существенно выше, поскольку он переносится в точку (x^*, t^*) из области $x > x^*$, где модули производных точного решения меньше, чем на интервале $[0, x^*]$, откуда переносится инвариант w_2 .

Предположим теперь, что $\Omega = R_\varepsilon$, в силу чего $r = 1$ и в формуле (28) коэффициент $\delta_{k1} = 0$. Для инварианта w_1 , который в точку $(x^*, t^*) \in R_\varepsilon$ переносится вдоль характеристики, выходящей из начала координат, из формулы (30), где $r = 1$, следует, что $\omega_1(x^*, t^*) \neq 0$, в силу чего численные решения сходятся к инварианту w_1 с первым порядком. Поскольку в области R_ε инвариант $w_2 = \text{const}$, то для него функция $\Psi_1(\mathbf{V}) = 0$ и формула (30) имеет вид

$$\omega_1(x^*, t^*) = \omega_1(x_b, t_b),$$

где точка (x_b, t_b) лежит на левой границе области R_ε . Если на этой границе для инварианта w_2 вы-

полнено условие (26), где $r \approx 2$, то в области R_ε для этого инварианта $\omega_1(x^*, t^*) = 0$ и численные решения будут сходиться к нему приблизительно со вторым порядком (рис. 3).

В области V_ε сходимость (23) является неравномерной (рис. 3), так как ее порядок r не является постоянным. Поэтому для обоснования в этой области полученных порядков сходимости численных решений к инвариантам w_1 и w_2 необходимо разработать специальную методику, что предполагается сделать в дальнейшем.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный сравнительный анализ точности численных схем TVD, RBM и A-WENO при расчете специальной задачи Коши для уравнений мелкой воды показал, что внутри центрированной волны разрежения и в области ее влияния решения всех трех схем с различными порядками сходятся к разным инвариантам точного решения. В частности, в волне разрежения численные решения с первым порядком сходятся к инварианту, который распространяется в этой волне вдоль характеристик, выходящих из ее центра, и приблизительно со вторым порядком сходятся к другому инварианту, который переносится в центрированную волну вдоль пересекающих ее характеристик. Это приводит к соответствующему снижению точности тестируемых схем при вычислении вектора базисных переменных рассматриваемой задачи Коши. С использованием Р-формы первого дифференциального приближения численных схем дано теоретическое обоснование данных численных результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 4–7 работы выполнены при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. 517–522. <https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
2. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems, advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. 150–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения

- гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
4. *LeVeque R.J.* Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
 5. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
 6. *Hesthaven J.S.* Numerical methods for conservation laws. // Computational Science and Engineering 18. SIAM, 2018.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611975109>
 7. *Shu C.-W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. 701–762.
<https://doi.org/10.1017/S0962492920000057>
 8. *Gelb A., Tadmor E.* Adaptive edge detectors for piecewise smooth data based on the minmod limiter // J. Sci. Comput. 2006. V. 28. 279–306.
<https://doi.org/10.1007/s10915-006-9088-6>
 9. *Guermond J.L., Pasquetti R., Popov B.* Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. 4248–4267.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.043>
 10. *Dewar J., Kurganov A., Leopold M.* Pressure-based adaption indicator for compressible Euler equations // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2015. V. 31. № 6. 1844–1874.
<https://doi.org/10.1002/num.21970>
 11. *Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А.* Комбинированные численные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. 1763–1803.
<https://doi.org/10.1134/S0965542522100025>
 12. *Chu S., Kovyrykina O.A., Kurganov A., Ostapenko V.V.* Experimental convergence rate study for three shock-capturing schemes and development of highly accurate combined schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2023. V. 39. № 6. 4317–4346.
<https://doi.org/10.1002/num.23053>
 13. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О точности разностных схем при расчете центрированных волн разрежения // Матем. моделир. 2023. Т. 35. № 7. 83–96.
<https://doi.org/10.1134/S2070048223070104>
 14. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. 1959. Т. 47. № 3. 271–306.
 15. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. № 3. 357–393.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
 16. *Jiang G.S., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. № 1. 202–228.
<https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
 17. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. 1303–1305.
 18. *Burstein S.Z., Mirin A.A.* Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. № 3. 547–571.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(70\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90080-X)
 19. *Wang B.S., Don W.S., Garg N.K. and Kurganov N.K.* Fifth-order A-WENO finite-difference schemes based on a new adaptive diffusion central numerical flux // SIAM J. Sci. Comput. 2020. V. 42. A3932–A3956.
<https://doi.org/10.1137/20M1327926>
 20. *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985.
 21. *Ковыркина О.А., Курганов А.А., Остапенко В.В.* Сравнительный анализ точности трех различных схем при расчете ударных волн // Матем. моделир. 2022. Т. 34. № 10. 43–64.
<https://doi.org/10.1134/S2070048223030092>
 22. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О точности схем типа MUSCL при расчете разрывных решений // Матем. моделир. 2021. Т. 33. № 1. 105–121.
<https://doi.org/10.1134/S2070048221050136>

ON THE ACCURACY OF CALCULATING INVARIANTS IN CENTERED RAREFACTION WAVES AND IN THEIR INFLUENCE AREA

V. V. Ostapenko^a, E. I. Polunina^a, N. A. Khandeeva^a

^a*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

We perform a comparative analysis of the accuracy of second-order TVD (Total Variation Diminishing), third-order RBM (Rusanov-Burstein-Mirin), and fifth-order in space and third-order in time A-WENO (Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) difference schemes for solving a special Cauchy problem for shallow water equations with discontinuous initial data. The exact solution of this problem contains a centered rarefaction wave and does not contain a shock wave. It is shown that in the centered rarefaction wave and its influence area, the solutions of these three schemes with different orders converge to different invariants of the exact solution. This leads to a decrease in the accuracy of these schemes when calculating the vector of base variables of the considered Cauchy problem. The P-form of the first differential approximation of the difference schemes is used for the theoretical justification of these numerical results.

Keywords: high order difference schemes, shallow water equations, centered rarefaction waves