ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 518, с. 61–64

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.22

МНОЖЕСТВО БАНАХОВЫХ ПРЕДЕЛОВ И ЕГО ДИСКРЕТНОЕ И НЕПРЕРЫВНОЕ ПОДМНОЖЕСТВА

© 2024 г. Н. Н. Авдеев[1, *], Р. Е. Зволинский[1, **], Е. М. Семенов[1, ***], А. С. Усачев[1, 2, ****]

Представлено академиком РАН С. В. Кисляковым
Поступило 05.07.2023 г.
После доработки 20.07.2024 г.
Принято к публикации 24.07.2024 г.

Приводятся критерии принадлежности банахова предела дискретной и непрерывной частям множества банаховых пределов. Найдены диаметр и радиус этих частей.

Ключевые слова: банаховы пределы, инвариантные банаховы пределы, диаметр и радиус множества

DOI: 10.31857/S2686954324040092, **EDN:** YYXBPO

§ 1. Через ℓ_∞ обозначается множество ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

и обычной полуупорядоченностью, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $x \geq 0$.
2. $BTx = Bx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
3. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$.

Из определения вытекает, что

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq Bx \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

для всех $x \in \ell_\infty$ и, следовательно,

$$Bx = \lim_{n\to\infty} x_n$$

для любой сходящейся последовательности, а также $\|B\|_{\ell_\infty^*} = 1$ для любого $B \in \mathfrak{B}$, где через $\mathfrak{B}$ мы обозначаем множество банаховых пределов. Тогда $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*. Г. Лоренц доказал [1], что для заданных $x \in \ell_\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ равенство $Bx = \lambda$ выполняется для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В этом случае говорят, что последовательность x почти сходится к $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Например, любая периодическая числовая последовательность почти сходится к среднему по периоду. Последовательность $x_n = \cos nt$ сходится к 1 для $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ и почти сходится к 0 для остальных $t \in \mathbb{R}^1$. Множество последовательностей, почти сходящихся к числу $\lambda \in \mathbb{R}^1$, обозначается через ac_λ. Известно, что ac_0 есть замкнутое недополняемое подпространство ℓ_∞. Л. Сачестон уточнил теорему Г. Лоренца, показав, что

$$q(x) \leq Bx \leq p(x)$$

для любых $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \; p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Эта двусторонняя оценка точна [2]. Существование банаховых пределов было доказано с помощью теоремы Хана–Банаха С. Мазуром [3] и приведено в книге С. Банаха [4]. Пусть H — ограниченный линейный оператор в ℓ_∞.

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Центральный Южный Университет, Чанша, Хунань, КНР*
**E-mail: nickkolok@mail.ru*
***E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com*
****E-mail: nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru*
*****E-mail: dr.alex.usachev@gmail.com*

Банахов предел B называется инвариантным относительно H, если $Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$. В работе У. Эберлейна [5] было доказано существование банаховых пределов, инвариантных относительно регулярных преобразований Хаусдорфа. Подход У. Эберлейна был развит в [6], где было показано,что для любого H, удовлетворящего следующим условиям:

1. $H \geq 0$ и $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$,
2. $Hc_0 \subset c_0$,
3. $\limsup_{j\to\infty}(A(I-T)x)_j \geq 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $A \in R(H) = \operatorname{conv}\left\{H^k, k \in \mathbb{N}\right\}$,

существует $B \in \mathfrak{B}$, инвариантный относительно H. Множество таких банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}(H)$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{B}(H)$ есть замкнутое выпуклое подмножество $\mathfrak{B}$. Условиям 1—3 удовлетворяют оператор Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, n \in \mathbb{N}$$

и операторы растяжения

$$(\sigma_n x) = \left(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots\right), n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому множества $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ непусты для любого $n \in \mathbb{N}$. В работе [7] было доказано, что $\mathfrak{B}(C) \subset \bigcap_{n=2}^{\infty}\mathfrak{B}(\sigma_n)$.

Ниже мы будем использовать терминологию и результаты теории полуупорядоченных пространств. По теореме Какутани—Боненблуста—Накано [8, с. 192] ℓ_∞^* изометрично пространству $L_1(\Omega)$ для некоторого множества Ω с мерой μ. Обозначим через Ω_d и Ω_c дискретную и непрерывную части Ω. Тогда

$$\ell_\infty^* \approx L_1(\Omega) = L_1(\Omega_d) \oplus L_1(\Omega_c) \text{ и } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_d \oplus \mathfrak{B}_c,$$

где $\mathfrak{B}_d$ и $\mathfrak{B}_c$ — замкнутые и непрерывные подмножества $\mathfrak{B}$, соответствующие дискретной и непрерывной мерам на Ω. Любому $B \in \mathfrak{B}$ соответствуют такие $B_1 \in \mathfrak{B}_d$ и $B_2 \in \mathfrak{B}_c$ и $\lambda \in [0,1]$, что

$$B = (1-\lambda)B_1 + \lambda B_2.$$

По теореме Крейна—Мильмана

$$\mathfrak{B} = \overline{\operatorname{conv}}\operatorname{ext}\mathfrak{B},$$

где $ext\mathfrak{B}$ — множество экстремальных точек $\mathfrak{B}$ и замыкание выпуклой оболочки берется в слабой* топологии. Как показал Ч. Чоу [9], множество $ext\mathfrak{B}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{c}$ — континуум. Для любых $B_1, B_2 \in ext\mathfrak{B}$ выполнено $\|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2$. Основные свойства множества $\mathfrak{B}$ изложены в обзоре [10].

§ 2. Каждому $B \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие определенную на $[0,1]$ функцию

$$t \mapsto \gamma(B,t) = B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[2^n, 2^{n+t}\right]\right),$$

где $\bigcup_{n=1}^{\infty}[2^n, 2^{n+t}]$ — последовательность

$$x_k = \begin{cases} 1, & 2^n \leq k \leq 2^{n+t} \\ 0, & 2^{n+t} < k < 2^{n+1} \end{cases}, n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. мы отождествляем последовательность и ее характеристическую функцию.

Эти функции были введены в работе [11], где были использованы для исследования банаховых пределов. Очевидно, функция $\gamma(B,t)$ монотонно возрастает на $[0,1]$, $\gamma(B,0) = 0$, $\gamma(B,1) = 1$. Обозначим через Γ множество возрастающих на $[0,1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Для любой $f \in \Gamma$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $\gamma(B,t) = f(t)$ для всех $t \in [0,1]$ [11]. Хорошо известно, что множество точек разрыва любой функции $f \in \Gamma$ конечно или счетно и функция f дифференцируема почти везде.

Теорема 1. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Для того, чтобы $B \in \mathfrak{B}_c$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\gamma(B,t)$ была непрерывной.*

Теорема 2. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Для того, чтобы $B \in \mathfrak{B}_d$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\gamma(B,t)$ принадлежала замкнутой (в топологии нормы) выпуклой оболочке функций $\varphi_s(t)$, где*

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < s \\ 1, & s \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s \\ 1, & s < t \leq 1 \end{cases}$$

и $0 < s \leq 1$ в первом случае и $0 \leq s < 1$ во втором.

Принадлежность $B \in \mathfrak{B}$ множеству $ext\mathfrak{B}$ в терминах функции $\gamma(\cdot,t)$ описать невозможно. Действительно, если $B_1 \in ext\mathfrak{B}$, то существует такой $B_2 \in ext\mathfrak{B}$, $B_2 \neq B_1$, что $\gamma(B_1,t) = \gamma(B_2,t)$ [11]. Тогда

$$\gamma(B_1,t) = \gamma(B_2,t) = \gamma\left(\frac{B_1 + B_2}{2}, t\right)$$

для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, $B_1 \in ext\mathfrak{B}$ и $\frac{B_1 + B_2}{2} \notin ext\mathfrak{B}$ имеют одинаковую функцию $\gamma(\cdot,t)$.

Теорема 3. *Если $B \in \mathfrak{B}_d$, то $\gamma'(B,t) = 0$ почти везде.*

Обратное к теореме 3 утверждение не имеет места, так как справедлива

Теорема 4. *Существует такой* $B \in \mathfrak{B}_c$, *что* $\gamma(B,t)$ *совпадает с функцией Кантора.*

§ 3. Известно [12], что диаметр $d(\mathfrak{B}, \ell_\infty^*)$ и радиус $r(\mathfrak{B}, \ell_\infty^*)$ множества $\mathfrak{B}$ в ℓ_∞^* равны 2, т. е.

$$\sup_{B_1, B_2 \in \mathfrak{B}} \|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2,$$

$$\inf_{B_1 \in \mathfrak{B}} \sup_{B_2 \in \mathfrak{B}} \|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2.$$

Мы усилим эти результаты. Любая счетная последовательность различных экстремальных точек $B_1, B_2, \ldots$ порождает подпространство, изометричное ℓ_1 [13], т. е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k B_k \right\|_{\ell_\infty^*} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|. \tag{1}$$

Из (1) вытекает, что

$$d(\mathfrak{B}_d, \ell_\infty^*) = r(\mathfrak{B}_d, \ell_\infty^*) = 2. \tag{2}$$

Действительно, если $B \in \mathfrak{B}_d$, то $B \in \overline{conv}\, \mathrm{ext}\mathfrak{B}$, где замыкание берется в нормированной топологии ℓ_∞^*. Отсюда

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k$$

для некоторых $B_k \in ext\mathfrak{B}$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Так как $ext\mathfrak{B}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$, то существует $B_0 \in ext\mathfrak{B}$, отличный от B_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда в силу (1) имеем $\|B - B_0\|_{\ell_\infty^*} = 2$. Этим установлено (2).

Теорема 5. *Радиус и диаметр множества* $\mathfrak{B}(C)$ *в* ℓ_∞^* *равны 2.*

Так как $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}_c$ в силу [14, теорема 3] и [7, теорема 5], то из теоремы 5 вытекает

Следствие 1. *Радиус и диаметр множества* $\mathfrak{B}_c$ *в* ℓ_∞^* *равны 2.*

Для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ справедливо очевидное неравенство $\|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} \leq 2$. Поэтому теорема 5, следствие 1 и (2) говорят о том, что радиус и диаметр $\mathfrak{B}_d$, $\mathfrak{B}_c$ и $\mathfrak{B}(C)$ в ℓ_∞^* принимают максимально возможное значение.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят рецензентов за ценные замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования первого, второго и четвертого авторов выполнены за счет гранта Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22-7-2-27-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G.G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta mathematica. 1948. V. 80. № 1. P. 167–190.
2. *Sucheston L.* Banach limits // The American Mathematical Monthly. 1967. V. 74. № 3. P. 308–311.
3. *Mazur S.* O metodach sumowalnosci // Ann. Soc. Polon. Math.(Suppl.). 1929. P. 102–107.
4. *Банах С.* Теория линейных операций // РХД, М.–Ижевск, 2001. 272 с.
5. *Eberlein W.F.* Banach–Hausdorff limits // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. V. 1. № 5. P. 662–665.
6. *Semenov E.M., Sukochev F.A.* Invariant Banach limits and applications // Journal of Functional Analysis. 2010. V. 259. № 6. P. 1517–1541.
7. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Dilation invariant Banach limits // Indagationes Mathematicae. 2020. V. 31. № 5. P. 885–892.
8. *Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* Positive operators // Academic Press. 1985. 376 p.
9. *Chou C.* On the size of the set of left invariant means on a semigroup // Proceedings of the American Mathematical Society. 1969. V. 23. № 1. P. 199–205.
10. *Семенов Е.М., Сукочев Ф.А., Усачев А.С.* Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи математических наук. 2020. Т. 75. № 4. С. 153–194.
11. *Семенов Е.М., Сукочев Ф.А., Усачев А.С.* Основные классы инвариантных банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 1. С. 140–167.
12. *Семенов Е.М., Сукочев Ф.А., Усачев А.С.* Структурные свойства множества банаховых пределов // Докл. РАН. 2011. Т. 441. № 2. С. 177–178.
13. *Semenov E., Sukochev F.* Extreme points of the set of Banach limits // Positivity. 2013. Vol. 17. № 1. P. 163–170.
14. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Invariant Banach limits and applications to noncommutative geometry // Pacific Math. J. 2020. V. 306. № 1. P. 357–373.

THE SET OF BANACH LIMITS AND ITS DISCRETE AND CONTINUOUS SUBSETS

N. N. Avdeev[a], R. E. Zvolinskii[a], E. M. Semenov[a], A. S. Usachev[a, b]

Presented by Academician of the RAS S. V. Kislyakov

[a]*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

[b]*Central South University, Changsha, Hunan, People's Republic of China*

The note states criteria for a Banach limit to belong to discrete or to continuous part of the set of Banach limits. Diameters and radii of these parts are found, too.

Keywords: Banach limits, invariant Banach limits, diameter and radius of the set