

УДК 517.54

## НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. М. В. Шамолин<sup>1</sup>, \*

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 18.06.2024 г.

После доработки 11.07.2024 г.

Принято к публикации 17.07.2024 г.

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четырехмерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

*Ключевые слова:* инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость

DOI: 10.31857/S2686954324040089, EDN: YYZYAZ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1, 2, 3], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомого инварианта должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  надо знать  $m - 1$  независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится

соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле с диссипацией разного знака.

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака.

Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [5]).

В работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система с четырьмя степенями свободы на своем восьмимерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

## 2. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ СИММЕТРИИ

Пусть  $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), z = (z_1, \dots, z_4)$  — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным  $v, z$  с коэффициентами, зависящими от  $\alpha, \beta$  следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{v}, \dot{z}_4, \dots, \dot{z}_1, v\dot{\alpha}, v\dot{\beta}_1, v\dot{\beta}_2, v\dot{\beta}_3)^T &= A(\alpha, \beta)P, \\ P^T &= (v^2, vz_4, \dots, vz_1, z_4^2, z_4z_3, z_4z_2, z_4z_1, z_3^2, z_3z_2, z_3z_1, z_2^2, z_2z_1, z_1^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A(\alpha, \beta)$  — матрица размером  $9 \times 15$ . Тогда, выбирая новую независимую переменную  $q$  ( $dq = vdt, d/dq = \langle' \rangle, v \neq 0$ ), а также новые

фазовые переменные  $Z_k, z_k = Z_k v, k = 1, \dots, 4, Z = (Z_1, \dots, Z_4)$ , систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta)Q, \\ Q^T &= (1, Z_4, \dots, Z_1, Z_4^2, Z_4Z_3, Z_4Z_2, Z_4Z_1, Z_3^2, Z_3Z_2, Z_3Z_1, Z_2^2, Z_2Z_1, Z_1^2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$(Z_4', \dots, Z_1', \alpha', \beta_1', \beta_2', \beta_3')^T = \hat{A}(\alpha, \beta)Q - (Z_4\Psi(\alpha, Z), \dots, Z_1\Psi(\alpha, Z), 0, 0, 0, 0)^T, \quad (3)$$

где  $A_v(\alpha, \beta)$  — первая строка матрицы  $A(\alpha, \beta)$ , а  $\hat{A}(\alpha, \beta)$  — матрица  $A(\alpha, \beta)$  без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (2) на  $v$  отделяется, что дает возможность рассматривать восемь оставшихся уравнений в качестве системы

(3) на восьмимерном фазовом многообразии  $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ .

## 3. СИСТЕМЫ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Будем рассматривать следующую (из класса (2),(3)) систему девятого порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha), \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha), \\ Z_4' &= -f_4(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)\right]Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z) = \zeta_4(Z; \alpha, \beta), \\ Z_3' &= -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z) = \zeta_3(Z; \alpha, \beta), \\ Z_2' &= -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_2Z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)\right]Z_2Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z) = \zeta_2(Z; \alpha, \beta), \\ Z_1' &= -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_1Z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)\right]Z_1Z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z) = \zeta_1(Z; \alpha, \beta), \\ \beta_1' &= Z_3f_1(\alpha), \beta_2' = Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \beta_3' = Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$DQ(\pi) = d \ln |Q(\pi)| / d\pi$ ,  $b \geq 0$ ,  $\Delta(\alpha)$ ,  $f_1(\alpha)$ , ...,  $f_4(\alpha)$ ,  $g_1(\beta_1)$ ,  $g_2(\beta_1)$ ,  $h(\beta_2)$ ,  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ ,  $i, j, k = \alpha, \beta$ , — некоторые гладкие функции, и будем смотреть на нее как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (5) в качестве независимой системы (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии  $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta\}$

(касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия  $M^4\{\alpha, \beta\}$ , см. также [7, 8]).

Рассмотрим структуру системы (5). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с 13 ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении  $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$  многообразия  $M^4\{\alpha, \beta\}$  (в частности, на расслоении (четырёхмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.; здесь всевозможные  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$  — символы Кристоффеля):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Действительно, выбрав новые координаты  $z_1, \dots, z_4$  в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= z_4f_4(\alpha), \dot{\beta}_1 = z_3f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (5)):

$$Z_{k'} = \zeta_k(Z; \alpha, \beta), k = 1, \dots, 4, \quad (8)$$

при этом уравнения (6) почти всюду эквивалентны совокупности (7), (8), которая, прежде всего, присутствует в системе (5) (при этом вместо (7) лучше выбрать равенства  $\alpha' = Z_4f_4(\alpha)$ ,  $\beta_1' = Z_3f_1(\alpha)$ ,  $\beta_2' = Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1)$ ,  $\beta_3' = Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2)$ ).

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (6). (а) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай —

метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного (пятимерного) твердого тела (см. также [9, 10, 11]). (b) Системы на касательном расслоении более общей четырехмерной поверхности вращения. (c) Системы на касательном расслоении пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (4), (5) также присутствуют коэффициенты при параметре  $b \geq 0$ . Но они не нарушают консервативности, поскольку система (4), (5) обладает полным набором (шестью) гладких первых интегралов.

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении четырехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет  $n^2(n+1)/2$  функций при  $n=4$ , т.е. 40 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$  из (7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” 13 ( $n(n-1)+1$  функций при  $n=4$ ) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих коорди-

наты на касательном расслоении — их будет  $7(n(n-1)/2 + 1)$  функций при  $n=4$ ). Таким образом, мы имеем 20 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ( $B(4)$ ) на имеющиеся  $A(4) = 20$  функций ( $A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$  функций при  $n=4$ )? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. В данной работе будем накладывать  $B(4) = 16$  условий на имеющиеся  $A(4) = 20$  функций.

Число  $B(4)$  складывается из трех слагаемых:  $B(4) = B_1(4) + B_2(4) + B_3(4)$ . Число  $B_1(4)$  равно количеству условий, накладываемых на функции  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ , а именно,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &\equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), \\ g_1(\beta_1) &\equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \end{aligned} \quad (9)$$

т.е.  $B_1(4) = 3$  (в общем случае  $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$ ). Число  $B_2(4)$  равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha_2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha_3}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \\ \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_3(\beta_2), \end{aligned} \quad (10)$$

т.е.  $B_2(4) = 6$  (в общем случае  $B_2(n) = n(n-1)/2$ ). Число  $B_3(4)$  равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых на функции  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ , и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} f_4^2(\alpha) &\left[ 2\Gamma_{\alpha_1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) &\left[ 2\Gamma_{\alpha_2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) &\left[ 2\Gamma_{\alpha_3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) &\left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) &\left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_2^2(\alpha) &g_1^2(\beta_1) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) &+ Df_4(\alpha) \equiv 0, \end{aligned} \quad (11)$$

т.е.  $B_3(4) = 7$  (в общем случае  $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$ ). Условия (11) опираются на (9), (10), благодаря чему количество аргументов в некоторых функциях уменьшается.

Видно, что в общем случае  $B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = (n-1)^2 + n(n-1)/2 + 1$ , при этом  $A(n) - B(n) = n$ , что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с

условиями, накладываемыми на них, ровно на  $n$  ( $n$  — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае  $A(4) - B(4) = 4$ .

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4), (5) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [5, 6, 7]). И то, что полный набор состоит из шести, а не из восьми, тензорных инвариантов (помимо тривиального — векторного поля самой системы [23]), показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (6), переписанных в виде  $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, i = 1, \dots, 4$ , является гладкая функция  $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k$ , но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым “выпрямив” квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1 (справедливой и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (10)–(12) на 20 функций: на 7 функций  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$  и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ .

**Теорема 1.** *Если выполнены условия (9)–(11), то система (4), (5), рассмотренная на произведении  $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , обладает полным набором, состоящим из шести гладких первых интегралов вида*

$$\begin{aligned} \Phi_0(v; Z_4; \alpha) &= v^2(1 + 2bZ_4\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \\ \Phi_1(v; Z_4, \dots, Z_1) &= v^2(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) = \\ &= C_1^2 = \text{const}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) &= v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\Delta(\alpha) = \\ &= C_2 = \text{const}, \\ \Delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp\left\{2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db\right\}, \\ A_1 &= \text{const}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) &= v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\Delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = \\ &= C_3 = \text{const}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db\right\};$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = \\ &= C_4 = \text{const}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp\left\{2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db\right\};$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 - \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = \\ &= C_5 = \text{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной  $d / dt = f_4(\alpha) d / d\tau$  и фазовых

$$\begin{aligned} w_4 = Z_4, w_3^* &= \ln |w_3|, w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, s = 1, 2, \\ w_2 &= \frac{Z_2}{Z_1}, w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

— фазовый поток системы (4), (5) сохраняет фазовый объем с плотностью  $\rho(v) = v^3$  на произведении  $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{w_4, w_3^*, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма  $v^3 dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3$ .

Заметим также, что система равенств (11) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (12). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

#### 4. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (4), (5) при наличии двух ключевых параметров  $b \geq 0, b_1 \neq 0$ , вводя

внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент  $F(\alpha)f_4(\alpha)$  в уравнение на  $Z'_4$  системы (18), (19) и даже положив при этом  $b_1 = 0$ , полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии:  $b = 0$ . Но мы расширим введение силового поля, положив  $b > 0$ ,  $b_1 \neq 0$ . При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного

$t$  на  $\tau$  по формуле  $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$  и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по  $\tau$ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения  $TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примет вид

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = \\ &= -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \\ Z'_4 &= F(\alpha) - \left[ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \right] Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_3 &= - \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] Z_3 Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_2 &= - \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] Z_2 Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] Z_2 Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)f_4(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_1 &= - \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] Z_1 Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) \right] Z_1 Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1(\alpha) \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta'_1 &= Z_3 \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \beta'_2 = Z_2 \frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1(\beta_1), \beta'_3 = Z_1 \frac{f_3(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2(\beta_1) h(\beta_2), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь  $\mu > 0$  — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр  $b$ , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр  $b_1$ .

Силовое поле в уравнениях на  $v'$ ,  $Z'$  определяется функцией  $\Psi(\alpha, Z)$ . Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на  $\alpha'$ , а во второй строке — коэффициенты из функции  $\Psi(\alpha, Z)$ . Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра  $b \geq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $\mu > 0$ ) будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где  $U$  — преобразование с определителем, равным  $\mu$ , и являющееся унимодулярным преоб-

зованием при  $\mu = 1$ . В частности, если  $\mu = 1$ , а  $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$  или  $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$ , то данное преобразование задает поворот на угол  $\alpha$ . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [5, 6, 7]).

## 5. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы девятого порядка (18), (19) при выполнении свойств (9)–(11), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (18), (19) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или

шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (9)–(11) на 20 функций: на 7 функции  $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$  и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ . В частности, следствием наложения 16 соотношений является следующее свойство:  $\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) =: \Gamma_4(\alpha)$ .

Тогда после замены фазовых переменных (17) система (18), (19) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi_0(\alpha, w), \Psi_0(\alpha, w) = \\ &= -b(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ w_4' &= F(\alpha) - \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3^2 - w_4\Psi_0(\alpha, w), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} w_3' &= \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3w_4 - w_3\Psi_0(\alpha, w), \\ w_2' &= \pm w_3\sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_2' &= \pm \frac{w_2w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \\ w_1' &= \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \beta_1' &= \pm \frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \\ \beta_3' &= \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (20)–(24) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (21), по одному — для систем (22), (23) (после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, “привязывающих” уравнения (20) и (24) (т.е. всего шесть).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого  $\kappa \in \mathbf{R}$  выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (25)$$

а для некоторого  $\lambda \in \mathbf{R}$  — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (26)$$

Условие (25) назовем “геометрическим”, а условие (26) — “энергетическим”. Условие (26) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности  $\Gamma_4(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции  $\Delta(\alpha)$  при участии функций  $f(\alpha), f_4(\alpha)$ , входящих в кинематические соотношения. Условие (26) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции  $\Delta^2(\alpha)/2$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции  $\Delta(\alpha)$ ). При этом сама функция  $\Delta(\alpha)$ , в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [12, 13, 14]).

**Теорема 2.** Пусть для некоторых  $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$  выполняются условия (25) и (26). Тогда система (20)–(24) обладает полным набором — шестью (одним гладким и пятью, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает шестью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Действительно, благодаря однородным переменным  $u_1, u_2, w_3 = u_1\Delta(\alpha), w_4 = u_2\Delta(\alpha)$ , из системы (21) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (27)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 - \kappa u_1^2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (28)$$

Уравнение (28) имеет вид уравнения Абеля [15, 16, 17]. В частности, при  $\kappa = -1$  оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (29)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) &= G_1 \left( \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{w_4^2 + w_3^2 + b_1 \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_3 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля  $W(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta)$ ,  $w_3^* = \ln |w_3|$ ,  $w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$ ,  $s = 1, 2$ , системы (20)–(24) с диссипацией функцию  $\rho(v) = v^3$  (полученную для системы (4), (5)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\text{div}[\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta)W(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta)] = 0 \quad (31)$$

будет состоять из системы (20)–(24) (правая часть которой умножена на функцию  $\rho(v) = v^3$ ) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho. \quad (32)$$

Системе (20)–(24), (32) уравнений характеристик можно сопоставить следующие соотношения: два из (27) и

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (33)$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если  $\kappa = -1$ , то используется равенство (29)). При участии уравнений (27) получается дополнительный первый интеграл системы (21), имеющий следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} \Theta_2(w_4, w_3; \alpha) &= G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом (при  $\kappa = -1$ ) первый интеграл (34) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\},$$

$$u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2.$$

Выражение первого интеграла (34) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции  $\Delta(\alpha)$ .

Кроме того, у системы (20)–(24) существует гладкий первый интеграл, который, например, при  $b = -b_1$  примет вид

$$\begin{aligned} \Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha) &= v^2(1 + 2bw_4\Delta(\alpha) - \\ &- b^2\mu(w_3^2 + w_4^2)) = C_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (35)$$

Первые интегралы для независимых (после замены в них независимого переменного) подсистем (22), (23) будут иметь вид

$$\Theta_3(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\Psi_2(\beta_2)} = C_3 = \text{const}, \quad (36)$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\Psi_1(\beta_1)} = C_4 = \text{const},$$

о функциях  $\Psi_s(\beta_s)$ ,  $s = 1, 2$ , см. (14), (15). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (24), находится по аналогии с (16):

$$\begin{aligned} \Theta_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 \mp \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - 1}} db = \\ &= C_5 = \text{const}. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнение (33), в свою очередь, позволяет получить функцию  $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \exp \left\{ b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} &= C_\rho = \\ &= \text{const}, U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1 U(C_1, u_2). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$R(v; w_4; \alpha) dv \wedge d\alpha \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

$$R(v; w_4; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\}, u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (31) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = R(v; w_4; \alpha) \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5],$$

где  $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5]$  — произвольная гладкая функция шести аргументов, при этом  $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5$  — шесть независимых первых интегралов (35), (30), (34), (36), (37) соответственно.

В частности, за шесть функционально независимых решений линейного уравнения (31) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\begin{aligned} \rho_0(v; w_4, w_3; \alpha) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha), \\ \rho_1(v; w_4, w_3; \alpha) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_1(w_4, w_3; \alpha), \\ \rho_2(v; w_4, w_3; \alpha) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_2(w_4, w_3; \alpha), \\ \rho_3(v; w_4, w_2; \alpha, \beta_2) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_3(w_2; \beta_2), \\ \rho_4(v; w_4, w_1; \alpha, \beta_1) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_4(w_1; \beta_1), \\ \rho_5(v; w_4; \alpha, \beta_2, \beta_3) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3). \end{aligned}$$

### 6. СТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Система (20)–(24) является динамической системой с переменной диссипацией [12, 13, 14]. При этом при  $F(\alpha) \equiv 0$  она превращается в систему консервативную, эквивалентную (4), (5). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (12), (13) в координатах  $w$ . Более того, если функция  $F(\alpha)$  не равна тождественно нулю, но  $b_1 = 0$ , то система (20)–(24) при условии (26) обладает первым интегралом вида

$$\begin{aligned} \Theta|_{B=0}(B; v; w_4, w_3; \alpha) &= \\ &= v^2(w_3^2 + w_4^2 - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \end{aligned} \tag{38}$$

где  $\Theta(B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 + B\lambda\mu w_4\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$  — семейство функций, зависящих от параметра  $B \geq 0$ .

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (38), (13) (в координатах  $w$ ) также является первым интегралом системы (20)–(24) при равенстве функции  $F(\alpha)$  тождественно нулю, но  $b_1 = 0$ . Но при  $b_1 > 0$  каждая из функций

$$\begin{aligned} \Theta|_{B=b_1}(B; v; w_4, w_3; \alpha) &= \\ &= v^2(w_3^2 + w_4^2 + b_1\lambda\mu w_4\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const} \end{aligned} \tag{39}$$

и (13) (в координатах  $w$ ) по отдельности не является первым интегралом системы (20)–(24). Однако

отношение функций (39), (13) (в координатах  $w$ ) является первым интегралом (30) системы (20)–(24) (для простоты, при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b_1 > 0$ .

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [4, 13, 14].

Выделим теперь существенные случаи для функций  $f(\alpha)$ ,  $f_4(\alpha)$ , определяющих метрику на четырехмерной сфере, и функции  $\Delta(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + v \sin^2 \alpha}}, \\ v \in \mathbf{R}, f_4(\alpha) &\equiv -1, \Delta(\alpha) = \sin \alpha, \end{aligned} \tag{40}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + v \sin^2 \alpha}}, v \in \mathbf{R}, f_4(\alpha) \equiv -1, \tag{41}$$

а также следующий случай, имеющий самостоятельный интерес:

$$f(\alpha) = \frac{v_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + v_2}}, v_1, v_2 \in \mathbf{R}, f_4(\alpha) = v_1 \alpha. \tag{42}$$

Случай (40) формирует класс систем (18), (19) при  $\mu = 1$ , соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил. В частности, при  $\Delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$  рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (40), если  $\Delta(\alpha) = F(\alpha) / \cos \alpha$ , то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле  $F(\alpha)$  под действием следящей силы [12]. В частности, если  $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \Delta(\alpha) = \sin \alpha$ , то система эквивалентна обобщенному сферическому маятнику, находящемуся в неконсервативном поле сил (“помещенному в поток набегающей среды”), и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Случай (41) формирует класс систем (18), (19), соответствующих движению точки по четырехмерной сфере с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства.

Случай (42) формирует класс систем (18), (19), соответствующих движению точки в четырехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна.

В двух последних случаях функция  $\Delta(\alpha)$  пробегает некоторое функциональное множество.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируе-

мости достаточно многообразное. В данной работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем девятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат дополнительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде (см. также [18, 19, 20]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Gauthier–Villars, Paris. 1912.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
6. *Шамолин М.В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 98–106.
7. *Шамолин М.В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 86–92.
8. *Шамолин М.В.* Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 3. С. 322–345.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
12. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
14. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
16. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F. (2017).* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315117638>
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
18. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
19. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
20. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.

## NEW CASES OF INTEGRABLE NINTH-ORDER CONSERVATIVE AND DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

M. V. Shamolin<sup>a</sup>

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

New cases of integrable dynamical systems of the ninth order homogeneous in terms of variables are presented, in which a system on a tangent bundle to a four-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of a different sign. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both first integrals and invariant differential forms are given.

**Keywords:** invariant of dynamical system, essentially singular points of invariant, system with dissipation, integrability