ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 518, с. 22–28

МАТЕМАТИКА

УДК 514.85

О ТАУТОХРОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ

© 2024 г. А. Г. Петров[1, *]

Представлено академиком РАН В. Ф. Журавлевым
Поступило 23.04.2024 г.
После доработки 20.05.2024 г.
Принято к публикации 16.07.2024 г.

Рассматривается прямолинейное движение материальной точки под действием двух сил меняющихся по степенным законам с произвольными показателями степеней. Находятся такие показатели степеней, при которых уравнение нелинейно, а период колебаний не зависит от начальных условий (таутохронное движение). Уравнения приводятся к гамильтоновой форме и методом нормальной гамильтоновой формы доказано, что существуют только два варианта таутохронного движения. Вариант 1: показатели степеней равны 1 и -3. Вариант 2: показатели степеней равны 0 и $-1/2$. При всех других степенных законах движение материальной точки не таутохронно. Гамильтонова нормальная форма таутохронного движения является гамильтонианом линейного осциллятора. Каноническое преобразование, приводящее исходный гамильтониан к нормальной форме, выражается через элементарные функции. Гамильтонианы таутохронных движений могут использоваться для тестирования программных комплексов вычисления нормальной гамильтоновой формы.

Ключевые слова: таутохронное движение, периодическое решение, система Гамильтона, метод гамильтоновой нормальной формы

DOI: 10.31857/S2686954324040045, **EDN**: YZNYQS

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно Аппелю прямолинейное движение является таутохронным, если точка, начинающая движение без начальной скорости и находящаяся под действием заданных сил, затратит одно и то же время для достижения определенного конечного положения, каково бы ни было ее положение в начальный момент [1, с. 297]. Таутохронным является движение материальной точки без трения по циклоиде с горизонтальной осью, расположенной в вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью перемещающуюся без трения по циклоиде с горизонтальной осью, расположенной в вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью вверх. Гюйгенс осуществил циклоидальный маятник, у которого нить последовательно огибает дуги двух циклоид [1, с. 388]. Аппель [1, с. 298–299] представил исследование возможности таутохронного прямольнейного движения материальной точки под действием силы, зависящей только от координаты точки x. Приняв точку прибытия (точку таутохронизма) за начало, он показал, что единственной силой, вы- зывающей прямолинейное таутохронное движение, является притяжение, пропорциональное расстоянию (линейный осциллятор).

Ландау и Лифшиц [2] в разделе “Определение потенциальной энергии по периоду колебаний” заметили, что в рассуждении Аппеля, предполагается симметрия функции потенциальной энергии $U(x)$ относительно некоторой начальной точки. Тогда начало можно принять за точку таутохроназма и по периоду потенциальная энергия определится единственным образом. В частности, для постоянного периода потенциальная энергия оказывается параболой, а таутохронным движением является притяжение, пропорциональное расстоянию. Если же потенциальная энергия не симметрична, то за начальную точку движения и точку прибытия (точку таутохронизма) следует принять две крайние точки периодического движения, в которых скорость обращается в ноль.

С помощью квадратуры [2] можно получить функциональное уравнение для определения потенциальной энергии таутохронного движения в неявной форме. В некоторых частных слу-

[1] *Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[*] *E-mail: petrovipmech@gmail.com*

чаях удается построить потенциальную энергию $U(x)$ в явном виде. Таким путем в работе [3] построены, кроме квадратичной функции, две явные функции

$$U(x) = \left(x + b - \frac{b^2}{x+b} \right)^2 \tag{1}$$

$$U(x) = \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \left(\sqrt{1 + 4ax / c^2} - 1 \right)^2 \tag{2}$$

В работе [4] обратили внимание на то, что движение линейного двумерного осциллятора в полярных координатах при понижении порядка по Раусу даст потенциал (1). Иными словами, второе слагаемое в (1) можно трактовать как потенциал центробежных сил. Соответственно решение уравнений движения материальной точки в поле сил с потенциалом (1) являются гармоническими колебаниями линейного осциллятора с частотой, не зависящей от амплитуды.

В работе [5] приведен пример системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, решение которого обладает свойством изохронности. Система имеет вид

$$\dot{u} + 2uv = 0, \quad \dot{v} - u^2 + v^2 + 1 = 0. \tag{3}$$

Для этой системы получено общее решение

$$u = \frac{1}{d - r\cos 2t}, \quad v = \frac{r \sin 2t}{d - r\cos 2t}, \quad d = \sqrt{r^2 + 1}, \tag{4}$$

где r произвольное положительное число.

Однако эта система не описывает движение материальной точки в потенциальном поле сил.

Ниже изучаются периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + kx^s = nx^{-r}, \quad k > 0, n > 0 \tag{5}$$

с произвольными вещественными показателями степеней sr. Доказано, что для нелинейных таутохронных колебаний существуют только два варианта степенных законов: $s = 1, r = 3$ и $s = 0, r = 1/2$.

Решение в случае 1) $s = 1, r = 3$ описывает гармонические колебания двумерного линейного осциллятора. К этому случаю относится и уравнение с потенциалом (1), для которых доказана таутохронность в [3,4].

Для случая 2) $s = 0, r = 1/2$ уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + k = nx^{-1/2}, \quad k > 0, n > 0. \tag{6}$$

Его решение построено в параметрическом виде и выражается через тригонометрические функции. Уравнение с потенциалом (2) с помощью замены $1 + 4ax / c^2 = x'$ приводится к виду с коэффициентами $k = n = 4 / c^2$, то есть является частным случаем уравнения (6).

Для доказательства используется метод гамильтоновой нормальной формы Биркгофа [6]. Нормальная гамильтонова форма находится методом инвариантной нормализации В.Ф. Журавлева [7,8].

Замечательно, что нормальная форма в обоих случаях является гамильтонианом линейного осциллятора $(1/2)(p^2 + \omega^2 q^2)$, а исходный гамильтониан приводится к нормальной форме каноническим преобразованием, который представляется не асимптотическим рядом, а точными выражениями через элементарные функции.

2. ТАУТОХРОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (5)

Сформулируем результат исследования свойства таутохронности

Теорема 1. *Прямолинейное движение, определяемое уравнением* $\ddot{x} + kx^s = nx^{-r}, k > 0, n > 0$, *таутохронно в случае, когда оно сводится к линейному осциллятору при* $s = 0$ *и* $r = -1$. *В нелинейном случае движение таутохронно только для двух вариантов.*

Вариант 1: $s = 1, r = 3$. *Уравнение таутохронного движения имеет вид* $\ddot{x} + kx = nx^{-3}$, *с решением*

$$x = \left(\frac{n}{k} \right)^{1/4} y,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(y_0^2 - \frac{1}{y_0^2} \right) \cos(2\tau) + y_0^2 + \frac{1}{y_0^2}}, \tag{7}$$

$$\tau = \sqrt{k}t, \quad y_0 > 1.$$

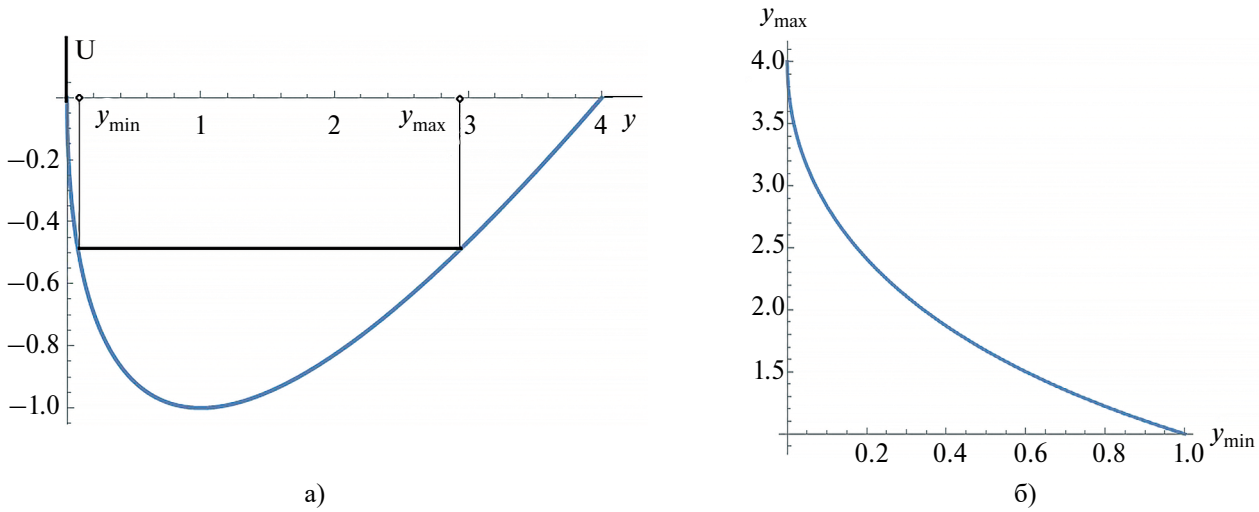
Вариант 2: $s = 0, r = 1/2$. *Уравнение таутохронного движения имеет вид* $\ddot{x} + k = nx^{-1/2}$, *а решение представляется в параметрической форме*

$$x = \left(\frac{n}{k} \right)^2 y, \quad \tau = \frac{k\sqrt{k}}{n} t$$

$$y = (1 + (\sqrt{y}_0 - 1)\cos\varphi)^2, \tag{8}$$

$$\tau / \sqrt{2} = \varphi + (\sqrt{y}_0 - 1)\sin\varphi$$

Замечание 1. *Вариант 1 изучен в работах* [3, 4]. *Хотя решение* (7) *уравнения* $\ddot{x} + kx = nx^{-3}$ *в этих работах не приводится, но его легко получить с по-*



а) б)

Рис. 1. Таутохронный нелинейный осциллятор; а) – потенциальная энергия $U(y)$, б) – зависимость верхней границы от нижней.

мощью наблюдения [4]. *Для этого достаточно записать в декартовых координатах решение уравнений линейного двумерного осциллятора с кинетическим моментом, соответствующим силе инерции* nx^{-3}, *и подставить эти функции в полярный радиус.*

Вариант 2 сводится к интегрированию уравнения энергии $\dot{y}^2/2 + U(y) = E$ *с потенциальной энергией* $U(y) = y - 2\sqrt{y}$, *изображенной на рис. 1 а). Колебательное движение* $y(\tau)$ *в элементарных функциях не выражается, но оно построено ниже в параметрическом виде* (8). *Решение описывает колебание переменной* $y(\tau)$ *в пределах* $y_{min} \le y(\tau) \le y_{max}$. *Зависимость верхнего значения* y_{max} *от нижнего* y_{min} *определяется формулой* $y_{max} = (2 - \sqrt{y_{min}})$ *и изображена на рис. 1 б).*

План доказательства теоремы.

1) Приводим уравнение к гамильтоновой форме.

2) Находим нормальную гамильтонову форму 6-го приближения.

3) Из условия равенства нулю коэффициентов нормальной формы 4-го и 6-го приближений находим показатели степеней s и r (необходимое условие таутохронности).

4) Находим решение уравнений при степенях, удовлетворяющих необходимому условию таутохронности. Из решения находим частоту колебаний. Если оказывается, что частота не зависит от начальных условий, то решение описывает таутохронное колебание.

Доказательство.

1) Из уравнения $kx^s = nx^{-r}$ находим положение равновесия $x = a = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(s+r)}$

Для исследования колебаний около точки равновесия удобно ввести замену $x = a(1+q)$. Тогда точкой равновесия будет $q = 0$, а уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + (1+q)^s = (1+q)^{-r}, \quad \omega^2 = n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1+r}{s+r}}$$

Для наших целей уравнение удобно представить в гамильтоновой форме

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \tau = \sqrt{k}t,$$

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + U(q)),$$

$$U(q) = \frac{(1+q)^{s+1}}{s+1} + \frac{(1+q)^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{r-1}, \quad s \ne -1, \quad r \ne 1, \tag{9}$$

$$U(q) = -\ln(1+q) + \frac{(1+q)^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}, \quad s \ne -1, \quad r = 1$$

$$U(q) = \ln(1+q) + \frac{(1+q)^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{r-1}, \quad s = -1, \quad r \ne 1.$$

2) Согласно плану находим нормальную гамильтонову форму 6-го приближения. При $s \neq -1, r \neq 1$ в окрестности точки равновесия гамильтониан имеет следующее разложение

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6, \quad H_2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2(r+s)), \quad H_3 = -\frac{q^3}{6}(s + r + r^2 - s^2)$$
$$H_4 = \frac{q^4}{24}\Big(2(s+r) + 3(r^2 - s^2) + (r^3 + s^3)\Big),$$
$$H_5 = -\frac{q^5}{120}\Big(6(s+r) + 11(r^2 - s^2) + 6(r^3 + s^3) + (r^4 - s^4)\Big), \tag{10}$$
$$H_6 = -\frac{q^6}{720}\Big(24(s+r) + 50(r^2 - s^2) + 35(r^3 + s^3) + 10(r^4 - s^4) + (r^5 + s^5)\Big)$$

где $H_i, i = 2,3,...6$ однородные полиномы степени i.

Для исследования колебаний в окрестности точки равновесия используем метод гамильтоновой нормальной формы Биркгофа [6]. Нормальная форма шестого приближения для степенного разложения (10) имеет вид $\tilde{H}(Q,P) = h + K_1(s,r)h^2 + K_2(s,r)h^3$, $h = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2(r+s))$. Функция $h(Q,P)$ является интегралом уравнений движения и при $s + r > 0$ уравнения Гамильтона

$$\frac{dQ}{d\tau} = P, \quad \frac{dP}{d\tau} = -\frac{\partial h}{\partial q}\Big(1 + 2K_1 h + 3K_2 h^2\Big)$$

имеют вид уравнений колебаний линейного осциллятора, квадрат частоты которого отличается от квадрата частоты линейных колебаний на множитель $\left(1 + 2K_1 h + 3K_2 h^2\right)$. Если коэффициенты K_1 или K_2 не равны нулю, то частота колебаний будет зависеть от амплитуды и движение не таутохронно. Таким образом, одновременное равенство нулю коэффициентов нормальной формы является необходимым условием таутохронности движения.

Приводить гамильтониан к нормальной форме будем с помощью метода инвариантной нормализации [7, 8] (см. приложение).

Для гамильтониана (10) коэффициенты нормальной формы имеют вид

$$K_1 = -\frac{-1 + r - s - 7rs + (r^2 + s^2)}{192(r+s)},$$
$$K_2 = \frac{Q_2}{R_2}, \quad R_2 = 55296(r+s)^2,$$
$$Q_2 = 29 + 58s - 39s^2 - 68s^3 + 20s^4 +$$
$$+ 2r(-29 + 78s + 237s^2 + 2s^3) - \tag{11}$$
$$-3r^2(13 + 158s + 25s^2) + 4r^3(17 + s) + 20r^4$$

На рис. 2 изображены контуры $K_1(s,r) = 0$ (желтый), $K_2(s,r) = 0$ (синий) и прямая линия $s + r = 0$, являющаяся границей области периодических решений. Функции $K_1(s,r)$ и $K_2(s,r)$ одновременно обращаются в ноль в шести точках.

Три точки 1) $s = 0, r = 1$; 2) $s = 1, r = 3$; 3) $s = 0, r = 1/2$ изображены жирными кружочками и для них выполнено условие $s + r > 0$. Первая точка соответствует линейному осциллятору, для которого свойство таутохронности хорошо известно. Для второй и третьей точки уравнения нелинейны и свойство таутохронности требует проверки. Три точки, для которых изображены тонкими кружочками и движение, соответствующее этим точкам, апериодично.

Теперь найдем нормальную форму шестого приближения при $s \neq -1, r = 1$. При этих показателей степеней гамильтониан (9) имеет вид

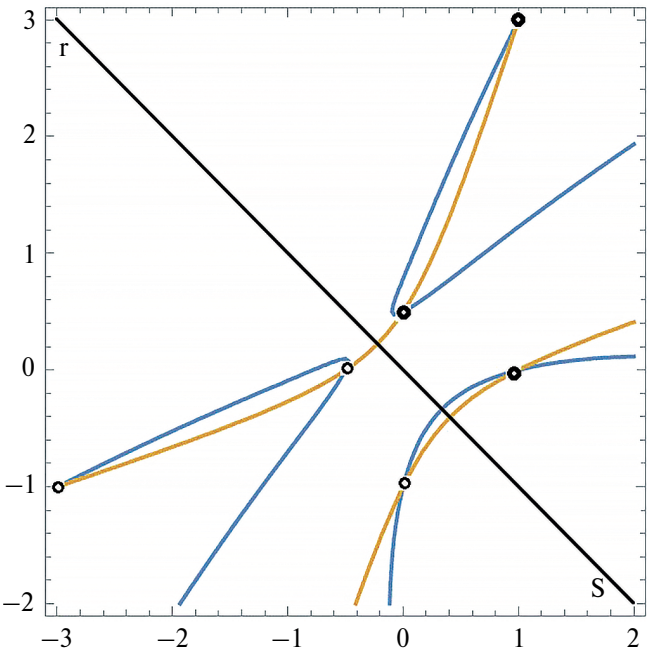


Рис. 2. Необходимое условие таутохронного движения.

$$H = p^2\Big/2 - \ln(1+q) + \frac{(1+q)^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}$$

В окрестности точки равновесия гамильтониан имеет следующее разложение

$$H_2 = (1/2)(p^2 + q^2(1+s)),$$
$$H_3 = (q^3/6)(-2 - s + s^2),$$
$$H_4 = (q^4/24)(6 + 2s - 3s^2 + s^3),$$
$$H_5 = (q^5/120)(-24 - 6s + 11s^2 - 6s^3 + s^4),$$
$$H_6 = (q^6/720)(120 + 24s - 50s^2 + 35s^3 - 10s^4 + s^5)$$

Методом инвариантной нормализации находим нормальную форму шестого приближения

$$H = h + K_1h^2 + K_2h^3, \quad h = (1/2)(P^2 + Q^2(1+s)),$$
$$K_1 = \frac{1 - 4s + s^2}{24(1+s)}, \quad K_2 = \frac{5 - 64s + 90s^2 - 16s^3 + 5s^4}{864(1+s)^2},$$

Корни $2 \pm \sqrt{3}$ уравнения $K_1 = 0$ не совпадают с корнями 0.08912 и 0.6997 уравнения $K_2 = 0$. Поэтому в случае $r = 1$ таутохронных движений нет.

Наконец найдем нормальную форму шестого приближения во втором вырожденном случае при $s = -1, r \neq 1$. При этих показателях степеней гамильтониан (9) имеет вид

$$H = p^2\Big/2 + \ln(1+q) + \frac{(1+q)^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{r-1}$$

Для этого гамильтониана достаточно найти нормальную форму четвертого приближения, чтобы убедиться, что у него нет таутохронных движений.

В окрестности точки равновесия гамильтониан имеет следующее разложение

$$H_2 = (1/2)(p^2 + q^2(-1+r)),$$
$$H_3 = -(q^3/6)(-2 + r + r^2),$$
$$H_4 = (q^4/24)(-6 + 2r + 3r^2 + r^3)$$

Методом инвариантной нормализации находим нормальную форму четвертого приближения

$$H = h + K_1h^2,$$
$$h = (1/2)(P^2 + Q^2(-1+r)),$$
$$K_1 = -\frac{1 + 4r + r^2}{24(-1+r)}$$

При $r > 1$ числитель $1 + 4r + r^2 > 0$ и коэффициент K_1 в ноль не обращаются. Следовательно для этого гамильтониана тоже нет таутохронных движений.

Необходимое условие теоремы 1 доказано.

3) Построим решение уравнений для вариантов 1 и 2, для которых движение может быть таутохронным. Для варианта 1 такое решение (7) уже построено (см. замечание).

С помощью замены $x = (n/k)^2 y$, $\tau = (k\sqrt{k}/n)t$ уравнение варианта 2 (6) преобразуется к виду

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 1 = 1/\sqrt{y} \tag{12}$$

Будем искать решение с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$. Тогда интеграл энергии уравнения примет вид

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + 2\left(y - 2\sqrt{y}\right) = 2\left(y_0 - 2\sqrt{y}_0\right)$$

Решение представляется квадратурой

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{\left(1-\sqrt{y}_0\right)^2 - \left(1-\sqrt{y}\right)^2}}$$

Заменой $1 - \sqrt{y} = z$ квадратура выражается через элементарные функции

$$\tau = -\sqrt{2}\int \frac{(1-z)dz}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} = \sqrt{2}\left(\arccos\frac{z}{z_0} - \sqrt{z_0^2 - z^2}\right),$$
$$z_0 = 1 - \sqrt{y}_0$$

Решение можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\frac{z}{z_0} = \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \sqrt{z_0^2 - z^2}\right)$$

Решение имеет неявный вид. Чтобы получить функцию $z(\tau)$, надо разрешить уравнение относительно z. Но можно построить зависимость $z(\tau)$ в параметрической форме

$$\frac{z}{z_0} = \cos\varphi, \quad \tau = \sqrt{2}(\varphi - z_0\sin\varphi).$$

Исходная переменная выражается через z по формуле $y = (1-z)^2$. С помощью нее получим решение уравнения (12) в параметрической форме (8).

Покажем непосредственной проверкой, что параметрическая зависимость (8) определяет функцию $y(\tau)$, которая удовлетворяет уравнению (12). Действительно, вычисляем первую производную $y(\tau)$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -2\left(1 + (\sqrt{y}_0 - 1)\cos\varphi\right)\left(\sqrt{y}_0 - 1\right)\sin\varphi$$
$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \sqrt{2}\left(1 + (\sqrt{y}_0 - 1)\cos\varphi\right)$$

$$\dot{y}(\tau) = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{d\varphi} \Big/ \frac{d\tau}{d\varphi} = -\sqrt{2}\left(\sqrt{y_0} - 1\right)\sin\varphi$$

Вычисляем вторую производную по τ

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{d\dot{y}}{d\tau} = \frac{d\dot{y}}{d\varphi} \Big/ \frac{d\tau}{d\varphi} = -\frac{\left(\sqrt{y_0} - 1\right)\cos\varphi}{1 + \left(\sqrt{y_0} - 1\right)\cos\varphi}$$

и убеждаемся в справедливости тождества

$$\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 = -\frac{\left(\sqrt{y_0} - 1\right)\cos\varphi}{1 + \left(\sqrt{y_0} - 1\right)\cos\varphi} = \frac{d^2y}{d\tau^2}$$

что и требовалось доказать.

3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И НОРМАЛИЗУЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ТАУТОХРОННЫХ ДВИЖЕНИЙ

Поскольку все коэффициенты нормальной формы гамильтониана для таутохронных движений тождественно равны нулю, то должно существовать каноническое преобразование, приводящее исходный гамильтониан нелинейной системы к гамильтониану линейного осциллятора.

Обычно нормализующая замена и нормальная гамильтонова форма нелинейной системы представляются в виде асимптотических рядов. Таутохронные движения представляют собой редкие случаи, когда для сильно нелинейной системы каноническая замена переменных (15) точно приводит гамильтониан (13) к его нормальной форме.

Покажем как строится нормализующая замена таутохронного движения на примере гамильтониана варианта 1. Исходный гамильтониан H и его нормальная форма $\tilde{H}$ имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + (1+q)^2 + (1+q)^{-2} - 2), \qquad \tilde{H} = \frac{1}{2}(P^2 + 4Q^2) \tag{13}$$

В переменных q, p решение с начальными данными $q(0) = y_0 - 1$, $p(0) = 0$ получается из (7) с помощью подстановки $q = y - 1$, $p = dq / d\tau$. В новых переменных Q, P ему соответствует решение

$$Q = Q_0 \cos 2t, \quad P = -2Q_0 \sin 2t \tag{14}$$

Из равенства гамильтонианов в начальный момент времени

$$\left(y_0 - y_0^{-1}\right)^2 = y_0^2 + y_0^{-2} - 2 = 4Q_0^2 = P^2 + 4Q^2$$

находим $y_0^2 + y_0^{-2} = P^2 + 4Q^2 + 2$, $(y_0 + y_0^{-1})^2 = P^2 + 4Q^2 + 4$, $2Q_0 = y_0 - 1/y_0$. Отсюда следует

$$(y_0^2 - y_0^{-2})\cos 2\tau = (y_0 + y_0^{-1})2Q = 2Q\sqrt{P^2 + 4Q^2 + 4}$$

Решение (7) запишется так

$$1 + q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2Q\sqrt{P^2 + 4Q^2 + 4} + P^2 + 4Q^2 + 2}$$

С помощью этих формул находим закон преобразования переменных

$$\begin{aligned} R(Q,P) &= P^2 + 4Q^2 + 2 + 2Q\sqrt{P^2 + 4Q^2 + 4}, \\ q(Q,P) &= \sqrt{R(Q,P)/2} - 1, \\ p(Q,P) &= \frac{dq}{d\tau} = P\sqrt{\frac{P^2 + 4Q^2 + 4}{2R(Q,P)}} \end{aligned} \tag{15}$$

Замена переменных (15) обладает следующими свойствами:

1) Замена каноническая. Дифференциальная форма $PdQ - pdq$ является полным дифференциалом.

2) Подстановка (15) в исходный гамильтониан $H(q,p)$ преобразует его в нормальную форму $\tilde{H}(Q,P)$.

3) Подстановка решения (14) в замену (15) дает точное решение исходной гамильтоновой системы.

Точно также можно получить нормализующую замену для нелинейной системы варианта 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для семейства нелинейных уравнений $\ddot{x} + kx^s = nx^{-r}$ показатели степеней $s = 1, n = -3$ и $s = 0, n = -1/2$ являются единственными, для которых решение описывает таутохронные колебания. Этот вывод демонстрирует эффективность метода инвариантной нормализации, который позволяет достаточно просто строить высокие приближения нормальной гамильтоновой формы. Обычно нормализующая замена и нормальная гамильтонова форма нелинейной системы представляются в виде рядов. Найден редкий случай, когда для сильно нелинейной системы каноническая замена переменных (15) точно приводит гамильтониан H (13) к его нормальной форме $\tilde{H}$.

Найденные гамильтонианы таутохронных движений нелинейных систем удобны для тестирования программ, в которых вычисляются

коэффициенты нормальных форм и находятся нормализующие преобразования. Для этого надо ввести в тестируемый программный комплекс исходные гамильтонианы варианта 1 или варианта 2 и вычислять коэффициенты нормальных форм $n-$ го приближения. Для таутохронного гамильтониана H (например, (13)) все приближения нормальных форм выше второго должны быть нулями. Первое отличное от нуля приближение определит асимптотическую точность программного комплекса.

Другой подход определения таутохронных потенциалов демонстрируется в работе [3]. Он базируется на методе Ландау и Лифшиц [2] в разделе "Определение потенциальной энергии по периоду колебаний". Потенциал находится в неявной форме, но в двух случаях, приведенных в [3], возможна явная форма потенциала как функции координаты. Один случай совпадает с потенциалом (1) и с потенциалом, исследованным более подробно в последующей работе [4]. Выделение таутохронных движений среди уравнений степенного вида (5) и доказательство их единственности, видимо, является оригинальным.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит В.Ф. Журавлева за обсуждение результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания № 124012500443-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель Р.* Теоретическая механика. Т. 1. Физ. мат. лит. М., 1960 / *Appel P.* Traité de mécanique rationnelle – Tome premier statique-dynamique du point 1902.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Физ. мат. лит. М., 1965
3. *Osypowski E.T., Olsson M.G.* Isynchronous motion in classical mechanics // Am.J. Phys. 1987. V. 55. P. 720–725.
4. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* A Remark on Rational Isochronous Potentials Journal of Nonlinear Mathematical Physics Volume 12, Supplement 1. 2005. P. 179–183.
5. *Буданов В.М.* Об одной изохронной нелинейной системе. // Вестн. моск. ун-та. сер.1, математика. механика. 2013. № 6. С. 59–63. / V.M. Budanov, On a nonlinear isochronous system. Moscow Univ. Mech. Bull. 68, (2013).
6. *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. Ижевск; Издательский дом "Удмуртский университет", 1999, 408 с. / *Birkhoff D.* Dynamical Systems. Publisher, Edwards, 1927
7. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с./ Zhuravlev V.F. Fundamentals of Theoretical Mechanics. M.: FIZMATLIT, 2008. 304 c. (in Russian)
8. *Журавлев В.Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем. // ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365. / *Zhuravlev V. Ph.* Invariant normalization of non-autonomous Hamiltonian systems J. Applied Mathematics and Mechanics. 2004. V. 66. № 3. P. 356–365

ABOUT TAUTOCHRONIC MOVEMENTS

A. G. Petrov[a]

Presented by Academician of the RAS V. F. Zhuravlev

[a] *Ishlinsky Institute of Mechanics Problems of RAS, Moscow, Russia*

It is shown that a material point, under the influence of an attractive linear force and a repulsive force inversely proportional to the cube of the distance from the center of attraction, performs a periodic motion, the period of which does not depend on the initial data (tautochronic motion). The problem is reduced to a nonlinear autonomous second-order equation, the general solution of which is expressed in terms of elementary functions. It has also been proven that for other power laws of repulsive force, except for degrees 0, 1 and –3, the movement of a material point is not tautochronous.

Keywords: tautochronic motion, periodic solution, Hamiltonian system, Hamiltonian normal form method