

ОБ УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

© 2024 г. Н. С. Даирбеков^{1, 2, *}, О. М. Пенкин^{1, 3, **}, Д. В. Савастеев^{3, ***}

Представлено академиком РАН И. А. Таймановым

Поступило 26.05.2024 г.

После доработки 21.06.2024 г.

Принято к публикации 05.07.2024 г.

Рассматриваются множества устранимые для гармонических функций на стратифицированном множестве с плоскими внутренними стратами. Установлено, что относительно замкнутые множества конечной $(n - 2)$ -меры Хаусдорфа являются устранимыми для ограниченных гармонических функций на n -мерном стратифицированном множестве, удовлетворяющем условию “усиленной прочности”.

Ключевые слова: стратифицированная мера, мягкий лапласиан, среднее значение, неравенство Харнака

DOI: 10.31857/S2686954324040015, **EDN:** YZPYUE

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных на стратифицированных множествах является относительно новым направлением современной математики. Систематические исследования дифференциальных уравнений на геометрических графах, представляющих собой одномерные стратифицированные множества, были начаты в конце 80-х годов и в настоящее время им посвящена огромная литература (см., например, [1, 2]). Уравнения в частных производных на стратифицированных множествах более высокой размерности изучены гораздо хуже. Началом исследований в этой области можно считать работу Р. Куранта [3], в которой рассмотрены колебания мембраны с приклеенным многоугольником из струн. Однако систематические исследования начались значительно позже и прогресс был достигнут благодаря введению понятия стратифицированной меры и дифференциальных операторов, связанных с ней (см. [1, 4]).

Многие факты теории эллиптических уравнений получили свои аналоги для уравнений на стратифицированных множествах. Среди них лемма о нормальной производной [1], принцип максимума [5, 6, 7], оценки нормы Гельдера [8], неравенство Харнака [9], теорема о среднем [10] и т.д.

Описание устранимых особенностей решений дифференциальных уравнений с частными производными в заданном функциональном классе традиционно привлекает внимание большого числа исследователей. Классическим результатом в этом направлении является теорема Карлесона об устранимости относительно замкнутого множества нулевой 2-емкости, в частности, относительно замкнутого множества конечной $(n - 2)$ -меры Хаусдорфа, для ограниченных гармонических функций на области евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (см., например, [11]).

В данной работе приводится аналог этой теоремы для ограниченных гармонических функций в смысле “мягкого лапласиана” на стратифицированном множестве с плоскими внутренними стратами.

Основной результат утверждает, что относительно замкнутое множество конечной $(n - 2)$ -меры Хаусдорфа является устранимым для ограниченных гармонических функций на n -мерном стратифицированном множестве, удовлетворяющем условию “усиленной прочности”. Для $n = 2$ ранее в работе [12] была установлена устрани-

¹ Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

² Университет SDU, Каскелен, Казахстан

³ Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

* E-mail: nurlan.dairbekov@gmail.com

** E-mail: o.m.penkin@gmail.com

*** E-mail: savasteev@gmail.com

мость 0-мерных страт (вершин) для гармонических функций на 2-мерном стратифицированном множестве.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Под *стратифицированным множеством* Ω мы понимаем связанное подмножество эвклидова пространства $\mathbb{R}^N$, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся связных подмногообразий (без края), называемых стратами. Множество всех страт обозначим через Σ , а сами страты через σ_{kj} :

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \sigma_{kj}.$$

Первый индекс показывает размерность страты, а второй является номером страты данной размерности. Предполагаются выполненными следующие требования на взаимные примыкания страт:

- замыкание $\bar{\sigma}_{kj}$ каждой страты компактно, а ее граница $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ является объединением некоторых страт в Σ ;
- для любых двух страт $\sigma_{kj}, \sigma_{mi} \in \Sigma$ пересечение замыканий $\bar{\sigma}_{kj} \cap \bar{\sigma}_{mi}$ либо пусто, либо состоит из некоторых страт набора Σ .

Всюду далее соотношение $\sigma_{kj} \prec \sigma_{mi}$ означает $\sigma_{kj} \subset \partial\sigma_{mi}$. В этом случае мы говорим, что страты *примыкают* друг к другу.

Множество Ω , как подмножество $\mathbb{R}^N$, наследует его стандартную топологию; все топологические понятия, встречающиеся далее, предполагаются отнесенными к данной топологии.

Множество Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega^\circ \cup \partial\Omega^\circ$ (“*внутренности*” и “*границы*”), в котором Ω° — связанное открытое подмножество Ω , состоящее из некоторых страт из Σ и удовлетворяющее равенству $\Omega^\circ = \Omega$, а оставшаяся часть $\partial\Omega^\circ = \Omega \setminus \Omega^\circ$ оказывается тогда топологической границей множества Ω° .

Определения стратифицированного множества и относящихся к нему понятий в более общей ситуации можно найти в [1]. Эти определения, в значительной степени, инспирированы работой [13].

В данной статье *все внутренние страты предполагаются плоскими* в следующем смысле: каждая страта $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ является подобластью

некоторого k -мерного аффинного подпространства $\mathbb{R}^N$.

Множество $\omega \subset \Omega$ назовем μ -измеримым, если каждое пересечение $\sigma_{kj} \cap \omega$ измеримо в смысле k -мерной меры Лебега на σ_{kj} . Нетрудно заметить, что множество $\mathcal{M}_\Omega$ всех μ -измеримых множеств является σ -алгеброй на Ω . *Стратифицированная мера* μ_Ω на Ω (точнее на $\mathcal{M}_\Omega$) определяется формулой:

$$\mu_\Omega(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \mu^k(\omega_{kj}),$$

в которой $\mu^k(\omega_{kj})$ обозначает k -мерную меру Лебега множества $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$. Измеримость функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ определяется стандартно: f является μ -измеримой, если лебеговы множества $L_f(c) = \{X \in \Omega : f(X) \leq c\}$ принадлежат $\mathcal{M}_\Omega$ при всех $c \in \mathbb{R}$. Нетрудно заметить, что интеграл Лебега μ -измеримой функции по μ -измеримому множеству ω сводится к сумме

$$\int_\omega f d\mu_\Omega = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \int_{\omega_{kj}} f d\mu^k.$$

Мы часто будем опускать Ω в обозначении μ_Ω , надеясь, что стратифицированное множество однозначно определяется контекстом.

Обозначение $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$ далее применяется к пространству касательных векторных полей F на Ω° , сужения $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$ которых на каждую страту $\sigma_{ki} \subset \Omega^\circ$ принадлежат пространству $C^1(\sigma_{ki})$.

Дивергенция векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega)$ в точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ задается формулой:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

где суммирование проводится по всем $(k+1)$ -мерным стратам σ_{k+li} , примыкающим к σ_{kj} . Здесь ∇_k в правой части обозначает оператор обычной, k -мерной, дивергенции, примененный к сужению $\vec{F}|_{\sigma_{kj}}$ на страту σ_{kj} , $\vec{v}_i$ — единичная внутренняя нормаль к σ_{kj} в σ_{k+li} в точке X , а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_{k+li}$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}$.

Так определенная дивергенция является точным аналогом классической. Можно показать, что, как и в обычной ситуации, дивергенция $\nabla \cdot \vec{F}(X)$, является плотностью потока векторного поля $\vec{F}$ в точке X , отнесенной к стратифицированной мере.

Для достаточно гладкой скалярной функции u градиент ∇u является касательным векторным полем (в этом случае ∇u представляет собой просто набор градиентов сужений u на страты), поэтому естественно определить лапласиан на стратифицированном множестве посредством формулы $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$. Так определенный лапласиан часто называют “жестким”. В данной работе мы рассматриваем только так называемый “мягкий” лапласиан, определяемый следующим образом.

Страта σ_{kj} называется свободной, если она не примыкает ни к какой страте большей размерности. Мягкий лапласиан функции u на Ω° определяется равенством

$$\tilde{\Delta}u = \nabla \cdot (p \nabla u),$$

где $p = 1$ на свободных стратах, $p = 0$ на остальных стратах.

Явное выражение мягкого лапласиана в точках свободных страт совпадает с обычным лапласианом.

Если же страта σ_{kj} не является свободной, но существуют свободные страты $\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}$, то тогда в точке $X \in \sigma_{kj}$ выражение для мягкого лапласиана имеет следующий вид:

$$\tilde{\Delta}u(X) = \sum_{\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}} \nabla u(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

в котором суммирование распространяется на все свободные страты $\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}$.

Наконец, если страта не является свободной и не примыкает ни к каким свободным стратам на единицу большей размерности, то на такой страте $\Delta u = 0$ автоматически.

Определение 1. Для открытого множества $U \subset \Omega^\circ$ обозначим через $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(U)$ множество функций $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- u непрерывна на U ,
- для каждой свободной страты σ_{ni} сужение $u|_{U \cap \sigma_{ni}}$ дважды непрерывно дифференцируемо, а градиент ∇u этого сужения имеет непрерывное продолжение в каждую точку $X \in U \cap \sigma_{n-1j}$ любой внутренней страты σ_{n-1j} , примыкающей к σ_{ni} .

Функция $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ называется гармонической на U , если $u \in \tilde{C}_{\text{loc}}^2(U)$ и u удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Delta}u(X) = 0$$

для всех $X \in U$.

Как отмечалось во введении, для эллиптических уравнений на стратифицированных множествах получены аналоги многих результатов из теории таких уравнений на областях эвклидова пространства. Для результатов настоящей работы ключевую роль играют аналоги теоремы о среднем и неравенства Харнака.

Шар $B_r(X_0) = \{X \in \Omega : d(X, X_0) < r\}$, относительно внутренней метрики $d(\cdot, \cdot)$ на Ω , называется допустимым, или, подробнее, открытым шаром допустимого радиуса $r > 0$ с центром в точке $X_0 \in \Omega^\circ$, если r меньше расстояния от X_0 до всех страт, замыкания которых не содержат X_0 . В этом случае множество $S_r(X_0) = \{X \in \Omega : d(X, X_0) = r\}$ называется допустимой сферой. Допустимые шары и сферы наследуют естественную стратификацию из Ω . Например, для допустимой сферы S все непустые пересечения $\sigma_{kj} \cap S$, $\sigma_{kj} \in \Sigma$, являются ее $(k-1)$ -мерными стратами. Стратифицированная мера μ_S на стратифицированной сфере S определяется также, как на произвольном стратифицированном множестве.

Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность n . В этом случае $p = 1$ на всех n -мерных стратах и обращается в нуль на всех других стратах из Σ .

Для $X_0 \in \Omega^\circ$ и допустимой сферы $S_r(X_0)$ рассмотрим среднее значение по сфере:

$$M[S_r(X_0)]u = \frac{1}{|S_r(X_0)|_p} \int_{S_r(X_0)} p d\mu_S,$$

где $|S_r(X_0)|_p = \int_{S_r(X_0)} p d\mu_S$.

Теорема А (о среднем [10]). Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность, u — гармоническая функция на Ω° , $X_0 \in \Omega^\circ$ и $S_r(X_0)$ — допустимая сфера. Тогда

$$M[S_r(X_0)]u = u(X_0).$$

Замечание 1. Аналогичное утверждение верно, если вместо средних по допустимым сферам рассмотреть средние по допустимым шарам.

Следующее утверждение является точным аналогом классического неравенства Харнака.

Теорема В ([9]). Пусть Ω — стратифицированное множество, а K — произвольный компакт в Ω° . Тогда для каждой неотрицательной гармонической в Ω° функции u выполняется неравенство

$$\sup_{X \in K} u(X) \leq C \inf_{X \in K} u(X)$$

с константой $C = C(K, \Omega^\circ)$, не зависящей от u .

3. ТЕОРЕМА ОБ УСТРАНИМОЙ ОСОБЕННОСТИ

Для стратифицированного множества Ω обозначим через Σ^k объединение всех внутренних страт размерности k и обозначим через Σ_k объединение всех внутренних страт размерности, не превосходящей k :

$$\Sigma^k = \bigcup_j \Sigma_{kj}, \quad \Sigma_k = \bigcup_{l=0}^k \Sigma^l.$$

Назовем Ω *усиленно прочным* (размерности n), если все свободные страты имеют одну и ту же размерность n и для любой точки $X \in \Sigma_{n-2}$ существует такой допустимый радиус $r > 0$, что множество $B_r(X) \setminus \Sigma_{n-2}$ связно.

Следующая теорема является основным результатом данной статьи.

Теорема 1 (об устранимой особенности). Пусть Ω — усиленно прочное стратифицированное множество размерности n , $S \subset \Omega^\circ$ — относительно замкнутое подмножество конечной $(n-2)$ -меры Хаусдорфа и $u : \Omega^\circ \setminus S \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная гармоническая функция. Тогда и можно продолжить до гармонической функции на всем Ω° .

Условие усиленной прочности существенно. Рассмотрим, для примера, стратифицированное множество Ω составленное из двух плоских треугольников, имеющих одну общую вершину σ_{01} и не имеющих других общих точек (см. рис. 1). Положим $\partial\Omega^\circ = \emptyset$, т. е., $\Omega^\circ = \Omega$. Функция u , равная 0 на одном треугольнике и 1 на другом, является гармонической на $\Omega \setminus \sigma_{01}$, но не имеет продолжения до гармонической функции на Ω .

Теорема 1 является прямым следствием следующих двух лемм.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 функцию u можно продолжить до ограниченной гармонической функции на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$.

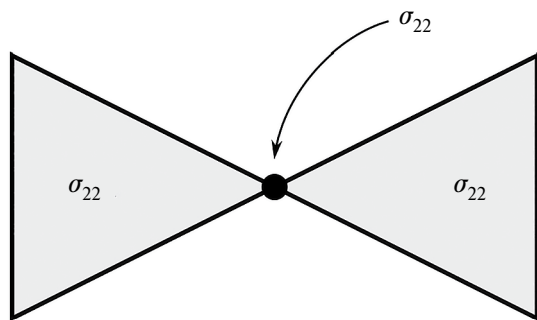


Рис. 1.

Лемма 2. Пусть Ω — усиленно прочное стратифицированное множество размерности n , а $u : \Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная гармоническая функция. Тогда и можно продолжить до гармонической функции на всем Ω° .

Для двумерных стратифицированных множеств утверждение леммы 2 было ранее установлено в [12].

Лемма 1 выводится из стандартной теоремы об устранимых особенностях для ограниченных гармонических функций на областях эвклидова пространства. Доказательство леммы 2 более сложно и опирается на вышеприведенные теоремы 1 и 2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке МНВО РК (проект AP14871251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М: Физматлит, 2005.
2. Kuchment P. Quantum graphs: I. Some basic structures. // Waves Random Media. 2004. V. 14. P. 107–128.
3. Courant R. Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen. // Acta Math. 1926, V. 49. P. 1–68.
4. Penkin O.M. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 219). Marcel Dekker. 2001. P. 183–191.
5. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированном множестве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 8. С. 1107–1113.
6. Мироненко Ф.Д. Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка” // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 6. С. 1263–1278.
7. Мироненко Ф.Д., Назаров А.И. Локальная оценка максимума типа Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка” // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 50, Зап. научн. сем. ПОМИ, 519, ПОМИ, СПб. 2022. С. 105–113.
8. Медведев К.М., Назаров А.И. Оценка нормы Гельдера для решения дивергентного эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Алгебра и анализ. 2024. Т. 36. № 1. С. 170–194.
9. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Неравенство Харнака для гармонических функций

- на стратифицированном множестве // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 5. С. 971–981.
10. *Ощепкова С.Н., Пенкин О.М.* Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 3. С. 417–426.
 11. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М: Мир, 1971.
 12. *Савастеев Д.В.* Теорема об устранимой особенности для гармонической функции на двумерном стратифицированном множестве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 1. С. 108–116.
 13. *Pham F.* Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur, 1967.

ON REMOVABLE SINGULARITIES OF HARMONIC FUNCTIONS ON A STRATIFIED SET

N. S. Dairbekov^{a, b}, O. M. Penkin^{a, c}, D. V. Savasteev^c

Presented by Academician of the RAS I. A. Taimanov

^a*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, the Republic of Kazakhstan*

^b*SDU University, Kaskelen, the Republic of Kazakhstan*

^c*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

We consider sets removable for bounded harmonic functions on a stratified set with flat interior strata. We establish that relatively closed sets of finite Hausdorff $(n - 2)$ -measure are removable for bounded harmonic functions on an n -dimensional stratified set satisfying the “strong sturdiness” condition.

Keywords: stratified measure, soft Laplacian, mean value, Harnack inequality