ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 517, с. 109–114

МАТЕМАТИКА

УДК 517.913

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЯКОБИ О ПОСЛЕДНЕМ МНОЖИТЕЛЕ

© 2024 г. Е. И. Кугушев[1, *], Т. В. Сальникова[1, **]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 05.03.2024 г.
После доработки 28.05.2024
Принято к публикации 05.06.2024

Для выполнения условий теоремы Якоби о последнем множителе требуется существование инвариантной меры и наличие достаточного количества независимых первых интегралов. В этом случае система локально интегрируется в квадратурах. Известны примеры систем, в которых для возможности интегрирования в квадратурах оказалось достаточно существования частных первых интегралов. При этом интегрирование в квадратурах происходит на уровнях частных первых интегралов.
В настоящей работе теорема Якоби о последнем множителе распространяется на общую ситуацию, когда среди первых интегралов присутствуют частные интегралы.

Ключевые слова: инвариантная мера, инвариантные множества, частные первые интегралы, интегрируемость в квадратурах

DOI: 10.31857/S2686954324030187, **EDN:** XZFDUZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической теореме Якоби о последнем множителе требуется существование инвариантной меры и наличие достаточного количества независимых первых интегралов. В этом случае система локально интегрируется в квадратурах. Обобщения и модификации теоремы Якоби о последнем множителе рассматривались в различных работах. Среди последних работ можно указать [8, 11] в которых обсуждается круг вопросов, связанных с условиями точной интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, выраженными через свойства тензорных инвариантов и полей симметрий. В [3] приводятся примеры систем, в которых для возможности интегрирования в квадратурах оказалось достаточно существования частных первых интегралов. При этом интегрирование в квадратурах происходит на уровнях частных первых интегралов.

В настоящей работе рассматривается общая ситуация, когда инвариантное множество, на котором система интегрируется в квадратурах, определяется как частный уровень некоторой функции на фазовом пространстве системы, т. е. на уровне частного интеграла системы.

2. ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА НА УРОВНЕ ЧАСТНОГО ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$v(x) = (v_1, \ldots, v_n)$ — векторное поле в R^n.

Точку $x_0 \in R^n$ будем называть *неособой*, если $v(x_0) \neq 0$.

Пусть $F(x), x \in R^n$ — гладкая функция в R^n. Для константы $a \in R$ обозначим через M_a *уровень* функции F:

$$M_a = \{x \in R^n : F(x) = a\}.$$

Точку $x_0 \in R^n$ будем называть *некритической*, если $dF(x_0) \neq 0$, т. е. градиент функции F отличен от нуля.

Определение. Множество $W \subseteq R^n$ называется *инвариантным* для уравнения (1), если любое решение $x(t)$ этого уравнения, начавшееся на W (т.е. $x(0) \in W$), остается на нем во все время существования решения: $x(t) \in W, \forall t$.

Определение. Будем говорить, что функция $F(x)$ — это *частный интеграл* системы (1) на уровне $a \in R$, если уровень M_a является инвариантным множеством.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
*E-mail: kugushevei@yandex.ru
**E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com

Утверждение 1.

Пусть $F(x)$ – частный интеграл системы (1) на уровне $a \in R$. Тогда в окрестности любой некритической и неособой точки $x_0 \in M_a$ существует гладкая функция $G(x)$, которая является первым интегралом системы (1), причем $F(x) = G(x)$ и $dF = dG$ на M_a (т.е. в точках $x \in M_a$).

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что $a = 0$, и $x_0 = 0$. Поскольку $x_0 = 0$ неособая точка, то в ее окрестности векторное поле $v(x)$ можно выпрямить. Введем вектор $e = (1,0,\ldots,0) \in R^n$. Для выпрямленного векторного поля и частного интеграла оставим те же обозначения. Поэтому, не нарушая общности, считаем, что в окрестности нуля имеем

$$v(x) = e = (1,0,\ldots,0).$$

Пусть $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*) \in M_0$ – точка из окрестности нуля, лежащая на уровне M_0. Решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальными условиями $x(0) = x^*$ имеет вид $x(t) = x^* + te$:

$$x_1(t) = x_1^* + t, \qquad x_2(t) = x_2^*,\ldots,x_n(t) = x_n^*.$$

Поскольку M_0 инвариантное множество, то для небольших по модулю значений t, точки $x(t)$ также лежат на M_0. В частности, при $t = -x_1^*$ имеем $x_1(t) = 0$, т.е. точка $(0,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ лежит на M_0.

Введем в окрестности нуля функцию $G(x) = F(x)\big|_{x_1=0} = F(0,x_2,\ldots,x_n)$. Это первый интеграл уравнения (1).

Обозначим через N_0 нулевой уровень функции $G(x)$ в окрестности нуля:

$$N_0 = \{x \in R^n : G(x) = 0\}.$$

Тогда $N_0 = M_0$. Действительно, пусть $x = (x_1,\ldots,x_n) \in N_0$, то есть пусть $G(x) = 0$. Поскольку $G(x)$ не зависит от x_1, то $G(0,x_2,\ldots,x_n) = G(x) = 0$. Тогда $F(0,x_2,\ldots,x_n) = G(x) = 0$, значит, $(0,x_2,\ldots,x_n) \in M_0$. В силу инвариантности M_0 точка $x = (0,x_2,\ldots,x_n) + x_1 e$ также лежит на M_0.

Обратно, пусть $x = (x_1,\ldots,x_n) \in M_0$, то есть пусть $F(x) = 0$. В силу инвариантности M_0 точка $(0,x_2,\ldots,x_n) = x - x_1 e$ также лежит на M_0. Значит, $F(0,x_2,\ldots,x_n) = 0$. Тогда $G(0,x_2,\ldots,x_n) = 0$. Поскольку $G(x)$ не зависит от x_1, то $G(x) = 0$, значит, $x \in N_0$.

$G(x)$ не зависит от x_1, следовательно, $\dfrac{\partial G}{\partial x_1} = 0.$

F – частный первый интеграл, поэтому $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, при $F(x) = 0$, то есть при $x \in M_0$. Поэтому $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial x}$ на M_0. Следовательно, $dF = dG$ на M_0.

Утверждение 1 доказано.

Замечание 1.

Пусть система (1) допускает инвариантную меру с гладкой плотностью, и $F(x)$ – частный интеграл этой системы на уровне $M_a = \{x : F(x) = a\}$. Пусть x_0 – некритическая и неособая точка системы (1), лежащая на этом уровне. Из утверждения 1 следует, что в окрестности точки x_0 существует первый интеграл $G(x)$ системы (1) такой что $G(x_0) = F(x_0) = a$, и его уровень $N_a = \{x : G(x) = a\}$ локально, в окрестности точки x_0, совпадает с уровнем $M_a = \{x : F(x) = a\}$ частного интеграла. На уровне N_a общего интеграла $G(x)$ существует инвариантная мера [12]. Следовательно, инвариантная мера с гладкой плотностью существует и на уровне M_a частного интеграла.

Из утверждения 1 следует, что общий интеграл $G(x)$ существует локально, поэтому и инвариантная мера на уровне частного интеграла существует локально. Однако при некоторых предположениях о невырожденности можно доказать и глобальное существование инвариантной меры на всем уровне M_a. В следующем утверждение следуем схеме соответствующих рассуждений [12].

Утверждение 2.

Пусть μ – инвариантная мера с гладкой плотностью для системы (1), пусть $F(x)$ – частный интеграл системы (1) на некритическом уровне $a \in R$. Тогда M_a – это гладкое многообразие. Пусть многообразие M_a не содержит особых точек векторного поля $v(x)$. Тогда ограничение системы (1) на уровень M_a имеет инвариантную меру ν. Если мера μ задается дифференциальной формой $\tilde{\mu}$, то ν задается дифференциальной формой $\tilde{\nu}$ такой, что для точек, лежащих на M_a

$$dF \wedge \tilde{\nu} = \tilde{\mu}. \tag{2}$$

Доказательство. Уровень M_a некритический, $gradF\big|_{M_a} \neq 0$. Локально, в окрестности любой точки $x \in M_a$, существует первый интеграл $G(x)$ (см. утверждение 1). Используя теорему о неявной функции, введем локальные координаты $y = (y_1,\ldots,y_n)$ такие, что $y_1 = G(x) - a$. Тогда локально M_a задается уравнением $y_1 = 0$.

Покажем, что найдется форма $\tilde{\nu}$ ранга $n-1$ такая, что для точек, лежащих на M_a

$$\tilde{\mu} = dG \wedge \tilde{\nu}. \tag{3}$$

Пусть $\alpha(y)$ — плотность меры μ в координатах y. Запишем уравнения (1) в координатах y:

$$\dot{y}_1 = f_1(y) = 0, \quad \dot{y}_2 = f_2(y), \quad \dots \quad , \quad \dot{y}_n = f_n(y). \tag{4}$$

Согласно теореме Лиувилля,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\alpha f_j)}{\partial y_j} = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial(\alpha f_j)}{\partial y_j} = 0. \tag{5}$$

Локально в координатах y имеем $\tilde{\mu} = \alpha(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, где $\alpha(y)$ некая функция (плотность меры). Поскольку $dG = dy_1$, то уравнение (3) в координатах y принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} = dy_1 \wedge \acute{\nu} = \alpha(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \\ = dy_1 \wedge (\alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) есть сумма двух слагаемых:

$$\acute{\nu} = \alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n + dy_1 \wedge \lambda,$$

где λ — произвольная $(n-2)$-форма. Второе слагаемое оказывается равным нулю при ограничении на M_a. Поэтому

$$\acute{\nu}\,|_{M_a} = \alpha(y)\,|_{y_1=0}\, dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Ограничение системы (4) на M_a имеет вид

$$\dot{y}_2 = f_2\,|_{y_1=0}, \dots, \dot{y}_n = f_n\,|_{y_1=0}.$$

Проверка того, что $\acute{\nu}\,|_{M_a}$ — форма инвариантной меры, или, другими словами, что $\alpha\,|_{y_1=0}$ — плотность инвариантной меры в координатах y, теперь сводится к применению теоремы Лиувилля и использованию равенства (5).

Посмотрим, что происходит на пересечении координатных окрестностей. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ — другие координаты (вместо x). Уровень M_a некритический $(\operatorname{grad} F|_{M_a} \neq 0)$. Локально в окрестности любой точки $z \in M_a$ существует первый интеграл $G^*(z)$ (см. утверждение 1). Используя теорему о неявной функции, введем локальные координаты $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ такие, что $y_1^* = G^*(z) - a$. Тогда локально M_a задается уравнением $y_1^* = 0$.

Аналогично вышеизложенному, локально в координатах y^* имеем $\tilde{\mu} = \beta(y^*) dy_1^* \wedge \dots \wedge dy_n^*$, где $\beta(\tilde{y})$ некая функция (плотность меры). Поскольку $dG^* = dy_1^*$, то уравнение (3) в координатах y^* принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} = dy_1^* \wedge \hat{\nu}^* = \beta(y^*) dy_1^* \wedge \dots \wedge dy_n^* = \\ = dy_1^* \wedge (\beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*). \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом (6) получаем

$$\begin{aligned} dy_1 \wedge (\alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n) = \\ = dy_1^* \wedge (\beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*). \end{aligned}$$

По утверждению 1 в точках M_a выполнено $dG = dF$ и $dG^* = dF$. Следовательно, в точках M_a имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} = dy_1 \wedge \hat{\nu} = dy_1 \wedge (\alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n) = \\ = dy_1 \wedge (\beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*). \end{aligned}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\nu} = \alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n + dy_1 \wedge \lambda = \\ = \beta(y^*) dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^* + dy_1 \wedge \lambda^*, \end{aligned}$$

где λ и λ^* — произвольные $(n-2)$-формы. При этом вторые слагаемые оказываются равными нулю при ограничении на M_a. Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{\nu}\,|_{M_a} = \alpha(y)\,|_{y_1=0}\, dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n = \\ = \beta(y^*)\,|_{y_1^*=0}\, dy_2^* \wedge \dots \wedge dy_n^*. \end{aligned}$$

Таким образом, форма $\acute{\nu}$ определена на уровне M_a глобально.

Утверждение 2 доказано.

Замечание 2.

Дифференциальные уравнения, допускающие частные первые интегралы, можно найти в задачах динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [2, 3, 6].

Имеется еще один класс уравнений, допускающих частные первые интегралы. Пусть на движение лагранжевой системы наложена линейная по скоростям связь. Уравнения движения такой системы — это уравнения Лагранжа второго рода с множителями. Если множители найти как функции обобщенных координат и скоростей, то получатся уравнения в исходном фазовом пространстве, для которых наложенные связи будут частными первыми интегралами, линейными по скоростям. Можно показать наличие инвариантной меры на уровнях этих интегралов в случае интегрируемых связей. Если же связи неинтегрируемы, то, как показано в [5], наличие инвариантной меры на этих уровнях нетипично.

3. ТЕОРЕМА ЯКОБИ О ПОСЛЕДНЕМ МНОЖИТЕЛЕ

Первое обобщение теоремы Якоби о последнем множителе на случай существования частных интегралов дано в работе С.А.Чаплыгина [10]. Приведем его в формулировке работы [7].

Утверждение 3.

Предположим, что в окрестности неособой точки $\mathbf{x}_0$ система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ имеет инвариантную меру с гладкой плотностью $\rho(\mathbf{x}) > 0$. Пусть $F_1,\ldots,F_k$ — общие, а $F_{k+1},\ldots,F_{n-2}$ — частные первые интегралы, такие, что

$$\dot{F}_i = \sum_{j=k+1}^{n-2} g_{ij} F_j^{n_{ij}}, \tag{8}$$

где $\dot{F}_i = (\mathrm{grad} F_i, \mathbf{v})$ — производная в силу системы, g_{ij} — функции класса C^1, величины $n_{ij} \geq 0$ и $n_{ii} > 1$. Если функции $F_1,\ldots,F_n$ независимы, то система интегрируема в квадратурах на уровне частных первых интегралов.

Динамические уравнения Эйлера—Пуассона движения твердого тела с неподвижной точкой допускают инвариантную меру с постоянной плотностью. Поэтому для нахождения квадратур, дающих общее решение уравнений Эйлера—Пуассона, достаточно найти еще один общий первый, либо частный первый интеграл, независимый от трех классических интегралов (энергии, площадей и геометрического). Примеры нахождения и анализа квадратур в таких системах см. в [2, 3, 6]. Однако, в этих случаях условия теоремы Чаплыгина о последнем множителе не выполняются.

В работе [7] задача об интегрируемости систем с инвариантной мерой при наличии общих и частных интегралов рассмотрена в гамильтоновом формализме, когда число первых интегралов равно числу степеней свободы гамильтоновой системы. Условия (8) заменены на условия коммутируемости интегралов и обращения в ноль их попарных скобок Пуассона. Доказанное общее утверждение позволяет сформулировать обобщение теоремы Чаплыгина о последнем множителе в применении к уравнениям Эйлера—Пуассона в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой. Условия (8) заменяются на условия коллинеарности градиентов интеграла энергии и производной в силу системы частного интеграла на их совместном уровне. Обобщение теоремы Якоби применяется к случаю Горячева-Чаплыгина и другим задачам.

Замечание 3. В рамках теоремы Якоби о последнем множителе размерность совместного уровня равна двум, и для анализа динамики системы на этом уровне можно воспользоваться общей теоремой Колмогорова о динамических системах с инвариантной мерой на двухмерном торе [9].

4. ДИНАМИКА НА ДВУМЕРНЫХ ЧАСТНЫХ УРОВНЯХ

Пусть система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ порядка n обладает инвариантной мерой с гладкой положительной плотностью и имеет $n-2$ общих или частных первых интеграла $F_1,\ldots,F_{n-2}$, для которых выполнены условия Утверждения 2. Рассмотрим совместный уровень первых интегралов

$$M_a = \{\mathbf{x} : F_i(\mathbf{x}) = a_i, \quad i = 1,\ldots,m-2\}$$

(для краткости рассуждений считаем, что он связен, иначе возьмем его связную компоненту).

Поскольку в точках $\mathbf{x} \in M_a$ первые интегралы независимы, то M_a является гладким двумерным многообразием с векторным полем $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на нем.

Можно показать, что если фазовое пространство системы ориентируемо, то неособые уровни гладких функций также являются ориентируемыми многообразиями. В этом случае M_a также ориентируемо.

Пусть ориентируемое двумерное многообразие M_a компактно и векторное поле v на нем не имеет особых точек. Тогда, в соответствии с известным утверждением из топологии, M_a является двумерным тором T^2 (см., например, [4]).

Динамику системы на нем проясняет следующее утверждение [9]:

Теорема Колмогорова. Пусть на двумерном торе T^2 задано гладкое неособое векторное поле, и соответствующая система дифференциальных уравнений допускает инвариантную меру с гладкой плотностью. Тогда на торе можно ввести угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$, в которых система будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\omega_1}{\nu(\varphi_1,\varphi_2)}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_2}{\nu(\varphi_1,\varphi_2)},$$

где ω_i — некоторые константы, и ν — плотность инвариантной меры. После замены времени $d\tau = \nu^{-1} dt$ система приобретет вид

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \omega_2.$$

Если в некоторых угловых координатах $u, v \bmod 2\pi$ на торе система имела вид

$$\dot{u} = f_1(u,v), \quad \dot{v} = f_2(u,v),$$

и плотность инвариантной меры задавалась функцией $\rho(u,v)$, то

$$\omega_i = \frac{1}{\mu}\int_{T^2} \rho f_i du dv, \quad \mu = \int_{T^2} \rho du dv, \qquad i = 1,2.$$

Если ω_i соизмеримы, то любая траектория на торе будет периодической. В несоизмеримом случае движение условно-периодическое, любая траектория будет заполнять тор всюду плотно.

В качестве модельного примера рассмотрим гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Пусть $(q,p) \in R^4$ — канонические координаты $W(q,p)$ — произвольная гладкая функция. Пусть $F(q,p)$ и $G(q,p)$ — гладкие функции, такие что $\{F,G\} = 0$, где $\{\cdot\}$ — скобка Пуассона. Пусть функции F и G функционально независимы на уровне $F = 0$. Составим функцию Гамильтона $H(q,p) = WF + G$. Производная функции F в силу системы равна

$$\dot{F} = \{H,F\} = \{WF,F\} + \{G,F\} = F\{W,F\}.$$

Функция F является частным интегралом системы на своем нулевом уровне. Проверим функциональную независимость функций H и F на этом уровне

$$\begin{aligned}\mathrm{grad} H &= F \mathrm{grad} W + W \mathrm{grad} F + \\ &+ \mathrm{grad} G = W \mathrm{grad} F + \mathrm{grad} G\end{aligned}$$

Поскольку по предположению векторы $\mathrm{grad}F$ и gradG не коллинеарны на уровне $F = 0$, то не коллинеарны и векторы $\mathrm{grad}H$ и $\mathrm{grad}F$. Значит, функции H и F независимы на уровне $F = 0$. Уравнения Гамильтона допускают инвариантную меру с постоянной плотностью. При $F = 0$ имеем $H = G$. Пусть для константы h совместный уровень $\{H = h, F = 0\}$ имеет компактную связную компоненту, на которой вектор фазовой скорости не обращается в ноль. Тогда эта компонента представляет собой инвариантный двухмерный тор, и в данном случае применима теорема Колмогорова.

Рассмотрим конкретный пример — возмущенный плоский гармонический осциллятор. Пусть $W(q,p)$ — произвольная гладкая функция. Положим

$$F = p_1 q_2 - p_2 q_1 - 1,$$
$$G = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$

Это интеграл кинетического момента и функция Гамильтона плоского гармонического осциллятора, поэтому $\{F,G\} = 0$, в чем можно убедиться и прямым вычислением. Проверим независимость F и G. Имеем

$$\mathrm{grad}F = (-p_2, p_1, q_2, -q_1), \qquad \mathrm{grad}G = (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

Возьмем скалярное произведение этих векторов. На уровне $F = 0$ имеем

$$(\mathrm{grad}F, \mathrm{grad}G) = 2(q_2 p_1 - q_1 p_2) = 2. \qquad (9)$$

На уровне $G = h > 1$ имеем имеем $\|\mathrm{grad}G\|^2 = 2h > 2$ Поскольку $\|\mathrm{grad}F\| = \|\mathrm{grad}G\|$, то на уровне $G = h > 1$ имеем $\|\mathrm{grad}F\|^2 = \|\mathrm{grad}G\|^2 > 2$. Тогда из (9) следует, что при $h > 1$ на совместном уровне $\{G = h > 1, F = 0\}$ векторы $\mathrm{grad}F$ и $\mathrm{grad}G$ не коллинеарны. Значит, на этом совместном уровне функции F и G независимы.

Уровень $G = h > 1$ компактен и представляет собой трехмерную сферу S^3 радиуса $\sqrt{2h}$. На уровне $F = 0$ имеем $H = G$. Поэтому совместный уровень $\{H = h > 1, F = 0\}$ совпадает с совместным уровнем $\{G = h > 1, F = 0\}$ и все его связные компоненты — это двухмерные торы.

Для гамильтониана $H = FW + G$ выпишем уравнения Гамильтона на уровне $F = 0$

$$\dot{q} = H_p = WF_p + G_p, \qquad \dot{p} = -H_q = -WF_q - G_q.$$

На совместном уровне $\{G = h > 1, F = 0\}$ вектор фазовой скорости отличен от нуля, поскольку векторы $\mathrm{grad}F$ и $\mathrm{grad}G$ не коллинеарны.

На совместном уровне $\{H = h > 1, F = 0\}$ выполнены все условия теоремы Колмогорова. Таким образом, множество $\{H > 1, F = 0\}$ расслаивается на инвариантные двухмерные торы, и при некотором выборе координат (возможно, с заменой времени) движение на этих торах будет условно периодическим.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанные в работе утверждения обобщают известные классические теоремы о существовании инвариантной меры на системы с частными интегралами. Эти результаты дают больше возможностей для анализа поведения таких динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. М.: Издательский центр “Академия», 2010. 434 с.
2. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
3. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 424 с.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. Т. 2: Геометрия и топология многообразий. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 296 с.
5. *Козлов В.В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 3. С. 85–107.
6. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ РХД, 2000. 248 с.
7. *Козлов В.В.* О некоторых свойствах частных интегалов канонических уравнений // Вестник МГУ. Сер. мат.-мех. 1973. № 1. С. 81–84.
8. *Козлов В.В.* Теорема Эйлера–Якоби–Ли об интегрируемости // Нелинейная динам. 2013. Т. 9. № 2. С. 229–245.
9. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
10. *Чаплыгин С.А.* О принципе последнего множителя // Математический сборник. 1900. Т. 21. № 3. С. 479–489. – В кн.: *Чаплыгин С.А.* Собрание сочинений. Т. 1, М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
11. *Nucci M.C., Leach P.G.L.* Jacobi’s Last Multiplier and the Complete Symmetry Group of the Euler–Poinsot System // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2002. V. 9. № 2. P. 110–121.

GENERALIZATION OF JACOBI'S THEOREM ON THE LAST MULTIPLIER

E. I. Kugushev[a], T. V. Salnikova[a]

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

To satisfy the conditions of Jacobi's theorem on the last multiplier, it is needed the existence of invariant measure and the presence of a sufficient number of independent first integrals. In this case, the system is locally integrated in quadratures. There are known the examples of systems in which it turned out that for the possibility of integration in quadratures it is sufficient the existence of partial first integrals. In this case, integration in quadratures occurs at the levels of partial first integrals.

In this paper, Jacobi's theorem on the last multiplier is extended to the general situation, when among the first integrals there are partial integrals.

Keywords: invariant measure, invariant sets, particular first integrals, integrability in quadratures