

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ПОПОЛНЕНИЯ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

© 2024 г. Н. С. Романовский^{1, *}

Представлено академиком РАН С.С. Гончаровым

Поступило 26.04.2024 г.

После доработки 06.06.2024 г.

Принято к публикации 06.06.2024 г.

Определяется делимое пополнение разрешимой группы Баумслага–Солитера $BS(1, n)$ и доказывается, что при некоторых ограничениях на n элементарная теория этого пополнения алгоритмически разрешима.

Ключевые слова: группа Баумслага–Солитера, разрешимая, элементарная теория

DOI: 10.31857/S2686954324030159, **EDN:** YAAFLA

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В работах автора и А.Г. Мясникова была развита алгебраическая геометрия над так называемыми жёсткими группами, а затем и теория моделей этих групп (см. обзор автора – глава 5 монографии [1]). Примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы, а также итерированные сплетения нескольких абелевых групп без кручения. Всякая m -жёсткая (ступени разрешимости m) группа вкладывается в делимую m -жёсткую группу. Оказалось, что теория делимых m -жёстких групп похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей, она полна, разрешима, ω -стабильна и обладает другими хорошими свойствами. Имеется также обобщение понятия жёсткой группы: в [2] были определены обобщённо жёсткие или r -группы. Для них, однако, многие вопросы алгебраической геометрии и теории моделей оказались более сложными, чем для жёстких групп.

В [3]–[4] изучались 2-ступенно разрешимые r -группы. Поскольку и в настоящей работе речь пойдёт в основном о 2-ступенно разрешимых группах, то удобно будет рассмотреть подкласс класса 2-ступенно разрешимых обобщённо жёстких групп, который в [4] обозначался через

$\mathcal{R}_2$. Прежде, чем его определить, напомним, что если в группе G есть абелева нормальная подгруппа C , то на C можно смотреть как на правый модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G/C]$, действие элемента

$$u = \alpha_1(g_1C) + \dots + \alpha_n(g_nC) \in \mathbb{Z}[G/C] (\alpha_i \in \mathbb{Z})$$

на $c \in C$ определяется формулой $c^u = (c^{g_1})^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (c^{g_n})^{\alpha_n}$, здесь $c^{g_i} = g_i^{-1}cg_i$.

Говорят, что 2-ступенно разрешимая группа G является *жёсткой* (2-*жёсткой*), если в ней есть нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \rho_3(G) = 1, \quad (1)$$

с абелевыми факторами $A = G / \rho_2(G)$, $\rho_2(G)$, причём группа A не имеет $\mathbb{Z}$ -кручения, а модуль $\rho_2(G)$ не имеет $\mathbb{Z}A$ -кручения.

Откажемся теперь от последнего ограничения и предполагаем, что модуль $\rho_2(G)$ может иметь $\mathbb{Z}A$ -кручение. Возьмём тогда аннулятор $\text{An}(\rho_2(G))$ модуля $\rho_2(G)$ в $\mathbb{Z}A$ и рассмотрим фактор-кольцо $R = \mathbb{Z}A / \text{An}(\rho_2(G))$. Понятно, что $\rho_2(G)$ можно рассматривать как R -модуль. Если в определении 2-жёсткой группы заменить условие “ $\rho_2(G)$ не имеет $\mathbb{Z}A$ -кручения” на “ $\rho_2(G)$ не имеет R -кручения и группа A канонически вкладывается в мультипликативную группу обратимых элементов R^* кольца R ,” то получим определение группы класса $\mathcal{R}_2$. В такой группе ряд (1), если вообще существует, определяет-

¹ Институт математики имени С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: rnmvski@math.nsc.ru

ся однозначно и называется *жестким*. Поэтому для его членов используется обозначение $\rho_i(G)$. Легко видеть, что кольцо R является областью целостности, а централизатор любого нетривиального элемента из $\rho_2(G)$ совпадает с $\rho_2(G)$. В частности, подгруппа $\rho_2(G)$ равняется централизатору любого неединичного коммутатора двух элементов и поэтому может быть определена в сигнатуре теории групп как $\exists$ -формулой, так и $\forall$ -формулой. В рассматриваемой ситуации будем говорить, что пара (A, R) ассоциируется с группой G . В ней по построению R — коммутативная область целостности, A — подгруппа без кручения из R^* , порождающая всё R как кольцо.

Разрешимая группа Баумслага—Солитера

$$BS(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n \rangle (n > 1)$$

не будет жесткой, но принадлежит классу $\mathcal{R}_2$. Для неё $R = \mathbb{Q}_n$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями n , $A = n^{\mathbb{Z}}$ — бесконечная циклическая группа с порождающим n , сама группа отождествляется с группой матриц

$$\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \mathbb{Q}_n & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа $G \in \mathcal{R}_2$ называется *делимой*, если A — делимая абелева группа (она тогда представляется в виде прямой суммы копий $\mathbb{Q}$), и модуль $\rho_2(G)$ является делимым R -модулем, тогда на $\rho_2(G)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем частных кольца R . Пусть $\mathcal{D}_2$ обозначает класс делимых групп из $\mathcal{R}_2$. Из [2] и [3] можно извлечь следующие факты.

Предложение 1. *Всякая группа из класса $\mathcal{R}_2$ вкладывается в делимую.*

Предложение 2. *Всякая группа $G \in \mathcal{D}_2$ расщепляется в полупрямое произведение $A \cdot \rho_2(G)$.*

Предложение 3. *Существуют рекурсивные системы аксиом в сигнатуре теории групп, определяющие каждый из классов $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{D}_2$.*

Непосредственно проверяется полезное для реализации каких-то условий в виде формул

Предложение 4. *Пусть $G \in \mathcal{R}_2$ и (A, R) — ассоциированная с G пара. По определению всякий элемент из R может быть выражен через какие-то элементы $x_1, \dots, x_s$ из A , то есть представлен в виде линейной комбинации $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_q u_q$ мономов $u_1, \dots, u_q$ от $x_1^{\pm 1}, \dots, x_s^{\pm 1}$ с целыми коэффици-*

циентами $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Тогда формула от переменных $x_1, \dots, x_s$

$$\bigwedge_i (x_i \in A) \wedge (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_q u_q = 0)$$

интерпретируется над G в сигнатуре теории групп как $\forall$ -формула

$$\forall z_1 \forall z_2 \left(([z_1, z_2]^{u_1})^{\alpha_1} \dots ([z_1, z_2]^{u_q})^{\alpha_q} = 1 \right),$$

или как $\exists$ -формула

$$\exists z_1 \exists z_2 \left(([z_1, z_2] \neq 1) \wedge \left(([z_1, z_2]^{u_1})^{\alpha_1} \dots ([z_1, z_2]^{u_q})^{\alpha_q} = 1 \right) \right).$$

Имеется ввиду, что первоначальная формула выполняется на наборе $(a_1, \dots, a_s)$ элементов из A тогда и только тогда, когда интерпретация выполняется на любом наборе $(g_1, \dots, g_s)$, состоящем из образов элементов a_i в G .

Группа Баумслага—Солитера $BS(1, n) (n > 1)$ вкладывается в делимую группу

$$BSd(1, n) = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Q}} & 0 \\ \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}}) & 1 \end{pmatrix},$$

представленную матрицами над полем $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$.

Легко доказывается

Предложение 5. *Если группа $G \in \mathcal{D}_2$ содержит в качестве подгруппы $BS(1, n) (n > 1)$, то она содержит группу $BSd(1, n)$, которая будет наименьшей делимой подгруппой в G , содержащей $BS(1, n)$.*

Поэтому мы можем назвать $BSd(1, n)$ *делимым пополнением группы Баумслага—Солитера $BS(1, n)$* . Отметим, что эта группа будет полной в терминологии теории групп, то есть в ней из любого элемента (однозначно) извлекается корень любой натуральной степени.

Известная теорема Носкова [5] утверждает, что элементарная теория конечно порождённой разрешимой группы алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда группа почти абелева (является расширением абелевой группы с помощью конечной). В частности, теория группы $BS(1, n)$ неразрешима. Иная картина для делимого пополнения $BSd(1, n)$. Сформулируем полученные нами результаты, которые, правда, доказаны не для любого $n > 1$, а при условии $\circledast$:

найдётся простое число p такое, что p делит n и p^2 не делит n . Это условие позволяет использовать признак Эйзенштейна неприводимости над $\mathbb{Q}$ для любого многочлена $x^m - n$ ($m \in \mathbb{N}$).

Сначала обозначим через $\mathcal{B}_n$ класс групп $G \in \mathcal{D}_2$, содержащих в качестве подгруппы $\text{BSd}(1, n)$ и удовлетворяющих требованию: если (A, R) — ассоциированная с G пара и множество $\{n\} \cup Y$ составляет базу A как $\mathbb{Q}$ -группы, тогда элементы из Y алгебраически независимы (над $\mathbb{Z}$ в R). В этой ситуации R можно отождествить с групповой алгеброй над кольцом $\mathbb{Q}_n$ свободной абелевой $\mathbb{Q}$ -группы с базой Y . Группа G отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$, где V — некоторое векторное пространство над полем частных кольца R .

Теорема 1. При ограничении $\circledast$, если группа G элементарно эквивалентна группе $\text{BSd}(1, n)$, то $G \in \mathcal{B}_n$.

Из доказательства извлекается рекурсивная система аксиом Σ , которая определяет класс групп $\mathcal{B}_n$.

Теорема 2 При ограничении $\circledast$ теория класса $\mathcal{B}_n$, то есть определённая аксиомами Σ , является полной и разрешимой, она совпадает с теорией группы $\text{BSd}(1, n)$.

Мы планируем в дальнейшем показать, что изучаемая теория будет ω -стабильной, а также исследовать другие аспекты этой теории.

2. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ТЕОРЕМ 1 И 2

В доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи из работы [6], а в доказательстве теоремы 2 идеи из работы [7].

Пусть согласно условию теоремы 1 группа G элементарно эквивалентна $\text{BSd}(1, n)$. Тогда по предложению 3 $G \in \mathcal{D}_2$. Если (A, R) — ассоциированная с G пара, то по предложению 2 имеется расщепление $G = A \cdot \rho_2(G)$. Легко понять, что кольцо R содержит $\mathbb{Q}_n$ и $n \in A$, откуда группа $\text{BS}(1, n)$ содержится в качестве подгруппы в G , а тогда и группа $\text{BSd}(1, n)$ содержится в G (предложение 5). Группа A является делимой абелевой группой без кручения, пусть $\{n\} \cup Y$ — её база как $\mathbb{Q}$ -группы. Надо доказать, что элементы из Y алгебраически независимы.

Допустим противное, найдётся набор $(y_1, \dots, y_s)$ различных элементов из Y и нетривиальный многочлен $f(x_1, \dots, x_s)$ с целыми коэф-

фициентами, для которого $f(y_1, \dots, y_s) = 0$. По многочлену f мы строим некоторую $\exists$ -формулу σ_f без свободных переменных, это построение является наиболее принципиальным моментом в доказательстве теоремы 1. Затем доказывается, что формула σ_f истинна на группе G , но ложна на $\text{BSd}(1, n)$, в результате получается противоречие с элементарной эквивалентностью групп G и $\text{BSd}(1, n)$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что если группа $G \in \mathcal{D}_2$ содержит $\text{BSd}(1, n)$ и не принадлежит классу $\mathcal{B}_n$, то на ней истинна одна из формул вида σ_f , в то время как все такие формулы ложны на $\text{BSd}(1, n)$. По предложению 3 существует рекурсивная система аксиом Σ_1 в сигнатуре теории групп, которая определяет класс групп $\mathcal{D}_2$. Несложно определить систему аксиом Σ_2 , которая для группы $G \in \mathcal{D}_2$ реализует условие: G содержит в качестве подгруппы $\text{BS}(1, n)$ (тогда она содержит и $\text{BSd}(1, n)$). Обозначим также через Σ_3 — множество аксиом $\neg \sigma_f$ по всем нетривиальным целочисленным многочленам f от любого конечного числа переменных. Система аксиом $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ эквивалентна некоторой рекурсивной системе аксиом, которую обозначим через Σ . По построению группа $\text{BSd}(1, n)$ удовлетворяет аксиомам Σ . Доказывается, что система аксиом Σ в точности определяет класс $\mathcal{B}_n$.

Назовём размерностью группы $G \in \mathcal{B}_n$ с соответствующей парой (A, R) набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где d_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, d_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R . Несложно доказывается

Предложение 6. Две группы из класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Теорема 2 выводится из следующего утверждения.

Предложение 7. Пусть U — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, H — счётная группа из класса $\mathcal{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень, число n удовлетворяет условию $\circledast$. Тогда $d(G) = (2^{\omega}, 2^{\omega})$.

Из предложений 6 и 7 вытекает, что ультрастепени по неглавному ультрафильтру на счётном множестве любых двух счётных моделей теории класса $\mathcal{B}_n$ изоморфны, а тогда по теореме Кейслера—Шелаха эта теория полна и совпадает с теорией группы $\text{BSd}(1, n)$. Так как теория имеет рекурсивную аксиоматику, то она разрешима.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН I.1.1, проект 0314-2019-0001

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Groups and model theory: GAGTA Book 2. De Gruyter, 2021.
2. Романовский Н.С. Обобщённо жёсткие группы: определение, базисные факты, проблемы // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59. № 4. С. 891–896.
3. Романовский Н.С. Обобщённо жёсткие метабелевы группы // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 1. С. 194–200.
4. Романовский Н.С. Об универсальных теориях метабелевых обобщённо жёстких групп // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61. № 5. С. 1101–1107.
5. Носков Г.А. Об элементарной теории конечно порожденной почти разрешимой группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 3. С. 498–517.
6. Романовский Н.С. Группы, универсально эквивалентные разрешимой группе Баумслэга–Солитера // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63. № 1. С. 197–201.
7. Романовский Н.С. Делимые жёсткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория // Алгебра и логика. 2017. Т. 56. № 5. С. 593–612.
8. Marker D. Model Theory: an Introduction. New York: Springer-Verlag, 2002.
9. Hodges W. Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

ON ELEMENTARY THEORY OF COMPLETION OF SOLVABLE BAUMSLAG–SOLITAR GROUP

N. S. Romanovskiy^a

^a*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.S. Goncharov

We define a divisible completion of the solvable Baumslag–Solitar group $BS(1, n)$ and prove that under certain restrictions on n the elementary theory of this completion is decidable.

Keywords: Baumslag–Solitar group, solvable, elementary theory