

СУБЛОРЕНЦЕВА ГЕОМЕТРИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАРТИНЕ

© 2024 г. Ю. Л. Сачков^{1, *}

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе

Поступило 27.02.2024 г.

После доработки 28.03.2024 г.

Принято к публикации 10.04.2024 г.

Исследуются две задачи сублоренцевой геометрии на распределении Мартине. Для первой множество достижимости имеет нетривиальное пересечение с плоскостью Мартине, а для второй нет. Описаны множества достижимости, оптимальные траектории, сублоренцевы расстояния и сферы.

Ключевые слова: сублоренцева геометрия, геометрическая теория управления, распределение Мартине

DOI: 10.31857/S2686954324030068, **EDN:** YBFLEK

1. ВВЕДЕНИЕ

Субриманова геометрия изучает многообразия M , в которых расстояние между точками $q_0, q_1 \in M$ есть инфимум длин всех кривых, касающихся заданного распределения и соединяющих q_0 с q_1 [18, 19]. Детальнее, для распределения $\Delta \subset TM$ в каждом пространстве $\Delta_q \subset T_q M$ задано скалярное произведение g_q , и длина кривой $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, касающейся Δ , измеряется как в римановой геометрии. Если в каждом пространстве $\Delta_q \subset T_q M$ задать невырожденную квадратичную форму g_q индекса 1, то на многообразии M будет определена сублоренцева структура (Δ, g) . Здесь естественной является задача отыскания длиннейшей относительно g кривой, соединяющей заданные точки. Сублоренцева геометрия стремится построить теорию, подобную богатой теории субримановой геометрии, и находится в начале своего развития. Основы сублоренцевой геометрии заложены в работах М. Гроховского [20–25], см. также [26–29].

Простейшие задачи субримановой геометрии возникают на левоинвариантном контактном распределении в группе Гейзенберга и на распределении Мартине [18, 19, 33, 34].

Так же как и в субримановой геометрии, простейшая сублоренцева задача возникает на группе Гейзенберга, она полностью исследована [24, 30]. Цель данной работы — рассмотреть две

сублоренцевы задачи на распределении Мартине: описать оптимальный синтез, расстояние и сферы. В первой задаче конус будущего имеет нетривиальное пересечение с касательным пространством к поверхности Мартине; во втором случае это пересечение тривиально. Соответственно в первом случае сублоренцева геометрия существенно сложнее, см. заключение.

2. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА

Пусть $M = \mathbb{R}^3_{x,y,z}$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}$.

Распределение $\Delta = \text{span}(X_1, X_2) \subset TM$ называется распределением Мартине [18, 19, 33, 34]. Плоскость $\Pi = \{x = 0\} \subset M$ называется поверхностью Мартине.

Первая сублоренцева задача на распределении Мартине ставится как следующая задача оптимального управления [31, 32]:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad (1)$$

$$u = (u_1, u_2) \in U_1 = \{u_2 \geq |u_1|\}, \quad (2)$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \quad (3)$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_2^2 - u_1^2} dt \rightarrow \max. \quad (4)$$

Теорема 1. Множество достижимости системы (1), (2) из точки q_0 за произвольное неотрицательное время (каузальное будущее точки q_0) есть

$$\mathcal{A}_1 = \begin{cases} \varphi_3(\xi) \leq \eta \leq \varphi_1(\xi), & \xi \geq 0, \\ \varphi_4(\xi) \leq \eta \leq \varphi_2(\xi), & \xi \leq 0, \end{cases}$$

¹ Институт программных систем
имени А. К. Айламазяна РАН

*E-mail: yusachkov@gmail.com

где $\xi = x / y$, $\eta = (24z - 3x^2y - y^3) / (24y^3)$,
 $\varphi_1(\xi) = \xi(1 - \xi^2) / 8$, $\varphi_2(\xi) = \xi(\xi^2 - 1) / 8$,
 $\varphi_3(\xi) = \xi^3 / 6 - (3\xi^2 + 1) / 24$, $\varphi_4(\xi) = -\xi^3 / 6 - (3\xi^2 + 1) / 24$.

Теорема 2.

• Для любой точки $q_1 \in A_1$ в задаче (1)–(4) существует оптимальная траектория.

• Если $q_1 \notin \Pi$, то оптимальная траектория единственна (с точностью до параметризации); в противном случае существуют ровно две оптимальные траектории, симметричные относительно плоскости Π .

• Экстремальные траектории параметризуются эллиптическими функциями Якоби. Они оптимальны вплоть до первого пересечения с плоскостью Π .

• Анормальные траектории, начинающиеся с дуги на плоскости Π , меняют каузальный тип: сначала они времениподобные, затем светоподобные. Остальные экстремальные траектории сохраняют каузальный тип.

Сублоренцево расстояние $d(q_0, q_1)$ между точками $q_0, q_1 \in M$ определяется как супремум длины (4) для всех траекторий системы (1), (2), соединяющих q_0 с q_1 , если такая траектория существует; в противном случае $d(q_0, q_1) := 0$.

Теорема 3.

• Сужение сублоренцева расстояния $q \mapsto d(q_0, q)$ на A_1 непрерывно, вещественно аналитично на $(\text{int} A_1) \setminus \Pi$, и однородно порядка 1 относительно дилатаций

$$\delta_k : (x, y, z) \mapsto (kx, ky, k^3 z), \quad k > 0, \quad (x, y, z) \in M. \quad (5)$$

• Существуют точки множества ∂A_1 , в которых сублоренцево расстояние $q \mapsto d(q_0, q)$ имеет разрыв первого порядка.

Сублоренцева сфера с центром q_0 радиуса $R > 0$ есть $S_{q_0}(R) := \{q \in M \mid d(q_0, q) = R\}$. В силу равенства $\delta_k(S_{q_0}(R)) = S_{q_0}(kR)$, $k, R > 0$, достаточно описать единичную сферу $S := S_{q_0}(1)$. Обозначим $S_n = S \cap \text{int} A_1$, $S_a = S \cap \partial A_1$.

Теорема 4.

• Множество S_n (соотв. S_a) заполнено концами оптимальных нормальных (соотв. анормальных) траекторий длины 1, начинающихся в q_0 .

• Сфера S есть топологическое многообразие с краем S_a , гомеоморфное замкнутой полуплоскости $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$.

• Сфера S есть стратифицированное пространство с вещественно-аналитическими стратами $S_n^\pm := S_n \cap \{x \gtrless 0\}$, $S_n^0 := S \cap \Pi$, $S_a^\pm := S_a \cap \{x \gtrless 0\}$, $S_a^0 := S_a \cap \Pi = \{(0, 1, 0)\}$. При этом существуют диффеоморфизмы $S_n^\pm \rightarrow \mathbb{R}^2$; $S_n^0, S_a^\pm \rightarrow \mathbb{R}$.

• При гомеоморфном вложении сферы S в полуплоскость $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$ указанные страты отображаются следующим образом: $S_n^\pm \rightarrow \{a \gtrless 0, b > 0\}$, $S_n^0 \rightarrow \{a = 0, b > 0\}$, $S_a^\pm \rightarrow \{a \gtrless 0, b = 0\}$, $S_a^0 \rightarrow \{a = b = 0\}$.

3. ВТОРАЯ ЗАДАЧА

Вторая сублоренцева задача на распределении Мартине ставится как задача оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad (6)$$

$$u = (u_1, u_2) \in U_2 = \{u_1 \geq |u_2|\}, \quad (7)$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \quad (8)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max. \quad (9)$$

Теорема 5. Множество достижимости системы (6), (7) из точки q_0 за произвольное неотрицательное время (каузальное будущее точки q_0) есть

$$A_2 = \{(x, y, z) \in M \mid x \geq |y|, z^1(x, y) \leq z \leq z^2(x, y)\},$$

где $z^1(x, y) = ((x + y)^3 - 4x^3) / 24$, $z^2(x, y) = (4x^3 - (x - y)^3) / 24$.

Теорема 6. Для любой точки $q_1 \in A_2$ в задаче (6) – (9) существует единственная оптимальная траектория (с точностью до параметризации). Экстремальные траектории параметризуются эллиптическими функциями Якоби, оптимальны на всей своей области определения, и сохраняют каузальный тип.

Теорема 7. Сублоренцево расстояние $q \mapsto d(q_0, q)$ непрерывно на M , вещественно аналитично на $\text{int} A_2$, и однородно порядка 1 относительно дилатаций (5).

Теорема 8.

• Сфера S заполнена концами оптимальных нормальных траекторий длины 1, начинающихся в q_0 .

• Сфера S диффеоморфна $\mathbb{R}^2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первая задача принципиально отличается от второй следующими особенностями оптимального синтеза:

- некоторые оптимальные траектории меняют каузальный тип;
- экстремальные траектории имеют точки разреза на поверхности Мартине Π ;
- оптимальный синтез двузначен на Π ;
- сублоренцево расстояние негладко на Π и терпит разрыв первого рода в некоторых точках границы множества достижимости $\partial\mathcal{A}_1$;
- сублоренцева сфера есть многообразие с краем.

Эти особенности связаны с нетривиальным пересечением множества достижимости $\mathcal{A}_1$ (каузального будущего начальной точки q_0) и поверхности Мартине Π .

Оптимальный синтез во второй задаче качественно не отличается от синтеза в сублоренцевой задаче на группе Гейзенберга [30].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications // Amer. Math. Soc. 2002.
2. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019.
3. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 2002. V. 50.
4. *Grochowski M.* Normal forms of germs of contact sub-Lorentzian structures on $\mathbb{R}^3$. Differentiability of the sub-Lorentzian distance // J. Dynam. Control Systems. 2003. V. 9. № 4.
5. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 57. № 9. P. 885–900.
6. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. (N.Y.) 2011. V. 177. № 3. P. 383–394.
7. *Grochowski M.* On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ // Geometric Singularity Theory. Banach Center Publications, Institute of Mathematics. Warsaw: Polish Academy of Sciences, 2004. V. 65.
8. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // Journal of Dynamical and Control Systems. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
9. *Chang D.-C., Markina I. and Vasil'ev A.* Sub-Lorentzian geometry on anti-de Sitter space // J. Math. Pures Appl. 2008. V. 90. P. 82–110.
10. *Korolko A. and Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19. P. 864–889.
11. *Grong E., Vasil'ev A.* Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1, 1)$ and on its universal cover // J. Geom. Mech. 2011. V. 3. № 2. P. 225–260.
12. *Grochowski M., Medvedev A., Warhurst B.* 3-dimensional left-invariant sub-Lorentzian contact structures // Differential Geometry and its Applications. 2016. V. 49. P. 142–166.
13. *Sachkov Yu. L., Sachkova E. F.* Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group // Journal of Dynamical and Control Systems. 2023. V. 29. P. 1129–1159.
14. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Геометрическая теория управления. Физматлит, 2005. Перевод: Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer, 2004.
15. *Сачков Ю. Л.* Введение в геометрическую теорию управления. М.: URSS, 2021. Расширенный перевод: Sachkov Yu. Introduction to geometric control. Springer, 2022.
16. *Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I.* Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case // J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 1997. V. 2. P. 377–448.
17. *Сачков Ю. Л.* Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях // УМН. 2023. Т. 78. № 1 (469). С. 67–166.

SUB-LORENTZIAN GEOMETRY ON THE MARTINET DISTRIBUTION

Yu. L. Sachkov^a

^aA. K. Ailamazyan Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences

Two problems of sub-Lorentzian geometry on the Martinet distribution are studied. For the first, the reachability set has a nontrivial intersection with the Martinet plane, but for the second it does not. Reachable sets, optimal trajectories, sub-Lorentzian distances and spheres are described.

Keywords: Sub-Lorentzian geometry, geometric control theory, Martinet distribution