

О ЯДРАХ ИНВАРИАНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ. ЗАДАЧА ГРИНЕВИЧА–НОВИКОВА

© 2024 г. М. М. Маламуд^{1,*}, В. В. Марченко^{2,*}

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым

Поступило 25.01.2024 г.

После доработки 14.02.2024 г.

Принято к публикации 16.02.2024 г.

Согласно Березину–Фаддееву под оператором Шрёдингера с точечными взаимодействиями

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(x - x_j), \quad X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3, \quad \{\alpha_j\}_1^m \subset \mathbb{R},$$

понимают любое самосопряжённое расширение сужения $-\Delta_X$ оператора Лапласа $-\Delta$ на подмножество $\{f \in H^2(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = 0, 1 \leq j \leq m\}$ соболевского пространства $H^2(\mathbb{R}^3)$. В настоящей заметке изучаются расширения (реализации), инвариантные относительно группы симметрий множества $X = \{x_j\}_1^m$ вершин правильного m -угольника. Такие реализации $\mathbf{H}_B$ параметризуются специальными циркулянтными матрицами $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Мы описываем все такие реализации с нетривиальными ядрами. Решена задача Гриневича–Новикова о простоте нулевого собственного значения реализации $\mathbf{H}_B$ со скалярной матрицей $B = \alpha I$ и четным m . Показано, что при нечётном m нетривиальные ядра всех реализаций $\mathbf{H}_B$ со скалярными $B = \alpha I$ двумерны.

Кроме того, для произвольных реализаций ($B \neq \alpha I$) доказана оценка $\dim(\ker \mathbf{H}_B) \leq m - 1$ и описаны все инвариантные реализации с максимальной размерностью $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m - 1$. Одна из них – расширение Крейна – минимальное положительное расширение оператора $-\Delta_X$.

Ключевые слова: операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями, инвариантные операторы, реализация Крейна, кратность нулевого собственного значения

DOI: 10.31857/S2686954324020061, **EDN:** XIVXOS

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошо известно (см. [1, 2]), что положительный спектр оператора Шрёдингера $-\Delta + q$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, с убывающим потенциалом $q(x) = O(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, чисто абсолютно непрерывен. Однако, оператор $-\Delta + q$ может иметь (вложенное) нулевое собственное значение. Этот эффект для случая рациональных

потенциалов $q(x_1, x_2)$ обнаружен Таймановым и Царевым в [3] и [4], использовавшим для этого преобразование Мутара.

Для оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями,

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(x - x_j), \quad (1)$$

этот эффект обнаружен Гриневичем и Новиковым в [5].

Напомним, что согласно [6] под оператором Шрёдингера с точечными взаимодействиями $X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3$ понимают любую реализацию (самосопряжённое расширение) $\mathbf{H}_B$ трёхмерного оператора Лапласа в $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, суженного на область:

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия

*E-mail: malamud3m@gmail.com

**E-mail: wmarchenko@rambler.ru

$$\mathbf{H} = -\Delta \operatorname{dom}(-\Delta_X),$$

$$\operatorname{dom}(-\Delta_X) := \left\{ f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = \begin{cases} = 0, j \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \right\}. \quad (2)$$

Оператор (2) является замкнутым неотрицательным симметрическим оператором в $\mathfrak{H}$ с индексами дефекта $n_{\pm}(\mathbf{H}) = m$. Изучению спектральных свойств расширений $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_B^*$ (реализаций) таких операторов посвящено большое число работ (см., например, [7, 8, 9, 10] и цитируемую там литературу). Так, хорошо известно, (см. [8, 9]), что положительный спектр каждой реализации $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_B^*$ чисто абсолютно непрерывен, а отрицательный — конечен. В частности, положительные собственные значения отсутствуют. Считая, что $X = \{x_j\}_1^m (\subset \mathbb{R}^3)$ — множество вершин правильного многоугольника или многогранника, мы описали в [11] все реализации, инвариантные относительно группы симметрий множества X , включая все такие неотрицательные реализации.

В этой заметке мы продолжаем начатые в [11] исследования и описываем инвариантные реализации $\mathbf{H}_B$ выражения (1) с нетривиальными ядрами $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$.

Впервые такие реализации $\mathbf{H}_B$ для случая правильного m -угольника построены в [5]. Именно, в [5] доказано, что $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$, если m чётное, $B = \alpha_0 I$, и $\alpha_0 = -\sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{|x_j - x_1|}$. Более

того, в [5] высказана и проверена для чётных $m \leq 96$ гипотеза о том, что кратность нулевого собственного значения оператора $\mathbf{H}_B$ равна единице.

Здесь мы исследуем эту задачу в рамках теории расширений оператора H , применяя аппарат граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. определения в § 1). При этом даётся полное решение задачи, поставленной в [5]. Кроме того, мы дополняем результаты из [5], описав при чётном m все $B = \alpha I$, для которых $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$, и доказав, что $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = 2$ при $\alpha \neq \alpha_0$ (теорема 1). При нечётном m также описаны все α , для которых реализации $\mathbf{H}_B$ с $B = \alpha I$ имеют нетривиальные ядра, и показано, что эти ядра двумерны (теорема 2).

Нами также описаны инвариантные реализации $\mathbf{H}_B$ с ненулевым $\ker \mathbf{H}_B$ и матрицей B общего вида (теорема 3). Любопытно, что рас-

смотрение таких реализаций приводит к новым эффектам. Так, мы описываем все реализации с максимально возможной кратностью: $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m - 1$. При этом среди них обязательно содержатся неотрицательные, $\mathbf{H}_B \geq 0$, и, в частности, наименьшая из них — крайневская $\hat{\mathbf{H}}_K (\geq 0)$. Кроме того, при $B \neq \alpha I$ возникают несамосопряжённые реализации $\mathbf{H}_B (\Leftrightarrow B \neq B^*)$ с нетривиальными ядрами $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$.

2. ГРАНИЧНЫЕ ТРОЙКИ И ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ

Здесь мы, следуя [12, 13, 9, 14, 30], приводим основные понятия и факты теории граничных троек. Пусть A — симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий равные дефектные числа $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$.

Определение 1. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой H — вспомогательное гильбертово пространство, а $\Gamma_0, \Gamma_1 : \operatorname{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$ — линейные отображения, называют граничной тройкой оператора A^* , если

(i) имеет место следующая абстрактная формула Грина:

$$\begin{aligned} (A^* f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^* g)_{\mathfrak{H}} &= \\ &= (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$f, g \in \operatorname{dom}(A^*);$$

(ii) отображение $\Gamma := (\Gamma_0, \Gamma_1)^T : \operatorname{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Определение 2. Расширение $\tilde{A} \supset A$ называют собственным, если $A \subset \tilde{A} \subset A^*$.

Предложение 1. [13] Пусть A — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с индексами дефекта $n_{\pm}(A) = m$, $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка оператора A^* . Тогда отображение

$$B \rightarrow A_B = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0) \quad (4)$$

задаёт биективное соответствие между множеством $\mathcal{S}(H)$ замкнутых линейных операторов B в $\mathcal{H}$ и множеством замкнутых собственных расширений A_B оператора A , дизъюнктивных с $A_0 := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$, т. е. таких, что $\operatorname{dom} A_B \cap \operatorname{dom} A_0 = \operatorname{dom} A$.

Определение 3. [13] Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* . Оператор-функцию $M(\cdot)$, определяемую равенством

$$M(z)\Gamma_0 f = \Gamma_1 f, \quad \text{где } f \in \mathfrak{N}_z = \ker(A^* - zI), \quad (5)$$

называют функцией Вейля, соответствующей тройке Π .

3. ТРЁХМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Предложение 2. [9] Пусть $\mathbf{H}$ — минимальный оператор Шрёдингера (2) и пусть $\xi_0 := \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m, \xi_1 := \{\xi_{1j}\}_{j=1}^m \in \mathbb{C}^m$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Оператор $\mathbf{H}$ — замкнутый и симметрический с индексами дефекта $n_{\pm}(\mathbf{H}) = m$.

(ii) Сопряжённый оператор $\mathbf{H}^*$ задаётся соотношениями

$$\text{dom}(\mathbf{H}^*) = \left\{ f = \sum_{j=1}^m \left(\xi_{0j} \frac{e^{-|x-x_j|}}{|x-x_j|} + \xi_{1j} e^{-|x-x_j|} \right) + f_H : \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{C}^m, f_H \in \text{dom}(\mathbf{H}) \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}^* f = - \sum_{j=1}^m \left(\xi_{0j} \frac{e^{-|x-x_j|}}{|x-x_j|} + \xi_{1j} \left(e^{-|x-x_j|} - \frac{2e^{-|x-x_j|}}{|x-x_j|} \right) \right) - \Delta f_H. \quad (7)$$

(iii) Совокупность $\Pi = \{\mathbf{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f := \{\Gamma_{0j} f\}_{j=1}^m = \\ &= 4\pi \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} f(x) |x - x_j| \right\}_{j=1}^m = 4\pi \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Gamma_1 f := \{\Gamma_{1j} f\}_{j=1}^m = \left\{ \lim_{x \rightarrow x_j} \left(f(x) - \frac{\xi_{0j}}{|x-x_j|} \right) \right\}_{j=1}^m, \quad (9)$$

образует граничную тройку для оператора $\mathbf{H}^*$.

(iv) соответствующая функция Вейля $M(\cdot)$ имеет вид

$$M(z) = \left(\frac{i\sqrt{z}}{4\pi} \delta_{jk} + \tilde{G}\sqrt{z}(x_j - x_k) \right)_{j,k=1}^m, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (10)$$

$$\text{где } \tilde{G}\sqrt{z}(x) = \begin{cases} \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{4\pi|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad \text{Здесь } \delta_{jk} \text{ — символ}$$

Кroneкера, а $\sqrt{\cdot}$ — ветвь корня, определённая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ условием $\sqrt{1} = 1$;

(v) существует сильный предел $M(0) := s\text{-}\lim_{z \uparrow 0} M(z)$ в $\mathbb{C}^m$ и $M(0) = M(0)^*$;

(vi) $\mathbf{H}_0 := \mathbf{H}^* \upharpoonright \ker \Gamma_0 = \hat{\mathbf{H}}_F = -\Delta$ совпадает с фридриховым (наибольшим положительным) расширением оператора $\mathbf{H}$. Кроме того, $\mathbf{H}_{M(0)} = \mathbf{H}^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_0) = \hat{\mathbf{H}}_K$ — крайновское (наименьшее положительное) расширение $\mathbf{H}$.

Замечание 1. Реализация $\mathbf{H}_B$, соответствующая выражению (1), в граничной тройке (8)–(9) задаётся равенством (4) с диагональной матрицей $B = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

4. ИНВАРИАНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

Определение 4. Пусть $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — некоторое движение пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющее множество $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^3$. Будем называть его симметрией множества X . Пусть оператор $U : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ определён равенством

$$Uf(x) = f(u(x)), \quad (11)$$

Оператор $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называют инвариантным относительно симметрии u , если $U\text{dom}(A) = \text{dom}(A)$ и выполнено равенство $AU = UA$.

Если это равенство выполнено для всех симметрий u множества X , то говорят, что A инвариантен относительно группы S_X всех симметрий множества X .

Легко видеть, что $\mathbf{H}$ инвариантен относительно любой симметрии множества X .

5. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В случае если X — множество вершин правильного m -угольника, множество реализаций $\mathbf{H}_B$ оператора $\mathbf{H}$, инвариантных относительно

группы D_m всех симметрий X , параметризуется (см. [11]) циркулянтными матрицами B вида

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \dots & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_5 & a_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (12)$$

Матрица (12) является тёплицевой и симметрической, а элементы $a_1, a_2, \dots, a_m$ её первой строки связаны соотношениями $a_{j+1} = a_{m-j+1}$ для всех $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

В случае правильного m -угольника функция Вейля $M(\cdot)$ имеет ту же структуру, что и матрица (12):

$$M(z) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} i\sqrt{z} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \dots & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} \\ \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & i\sqrt{z} & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} & \dots & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} \\ \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & i\sqrt{z} & \dots & \frac{e^{ir_4\sqrt{z}}}{r_4} & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & \frac{e^{ir_2\sqrt{z}}}{r_2} & \frac{e^{ir_3\sqrt{z}}}{r_3} & \dots & \frac{e^{ir_1\sqrt{z}}}{r_1} & i\sqrt{z} \end{pmatrix}, \quad r_j = |x_{j+1} - x_1|. \quad (13)$$

Здесь мы изучаем реализации оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями (1) $\mathbf{H}_B (= \mathbf{H}_B^*)$, задаваемые в граничной тройке (8) – (9), равенством (4) с граничными скалярными матрицами вида $B = \alpha I \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Наш первый результат дополняет результат Гриневича – Новикова из [5].

Теорема 1. Пусть $m = 2l$ и H_B – реализация, задаваемая матрицей $B = \alpha I \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Тогда:

(i) $\mathbf{H}_B$ имеет нулевое собственное значение в точности тогда, когда α равно одному из чисел

$$\alpha_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{e^{\frac{2ij\pi k}{m}}}{r_j} = \bar{\alpha}_k, \quad k \in \{1, \dots, l\};$$

(ii) При этом для $B_k = \alpha_k I$ выполнено: $\dim(\ker \mathbf{H}_{B_k}) = 2$ при $k \neq l$ и $\dim(\ker \mathbf{H}_{B_l}) = 1$;

(iii) Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_k^\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \frac{e^{\pm \frac{2ij\pi k}{m}}}{|x - x_j|}, \quad k \in \{1, \dots, l\}. \quad (14)$$

Замечание 2. В работе [5] (пример 2) рассматривается случай правильного m -угольника в случае чётного m с вершинами в точках $\{x_j\}_1^m$. Именно, там изучается реализация $\mathbf{H}_B$ с матрицей

$$B = \beta_0 I \text{ при } \beta_0 = -\sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{|x_j - x_1|} \text{ и доказано, что}$$

$\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$. Там же высказана гипотеза о том, что $\dim \ker \mathbf{H}_B = 1$ при всех $m \geq 2$, и указано, что она проверена при $2 \leq m \leq 96$. Так как $\beta_0 = \alpha_l$, то при $k = l = \frac{m}{2}$ теорема 1 подтверждает справедливость указанной гипотезы.

Более того, теорема 1, показывая, что для остальных реализаций $\mathbf{H}_{B_k}$ с нетривиальным ядром $\dim \ker \mathbf{H}_{B_k} = 2$, демонстрирует исключительность реализации $\mathbf{H}_{B_l}$, исследованной в [5].

Теорема 2. Пусть $m = 2l + 1$ и реализация $\mathbf{H}_B$ определяется матрицей $B = \alpha I \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Тогда:

(i) H_B имеет нулевое собственное значение в точности тогда, когда α равно одному из чисел

$$\alpha_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{e^{\frac{2ij\pi k}{m}}}{r_j} = \bar{\alpha}_k, \quad k \in \{1, \dots, l\}.$$

(ii) При этом $\dim(\ker \mathbf{H}_{B_k}) = 2$, а соответствующие собственные функции равны

$$\psi_k^\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \frac{e^{\pm \frac{2ij\pi k}{m}}}{|x - x_j|}, \quad k \in \{1, \dots, l\}. \quad (15)$$

Укажем зависящий от k порядок убывания на бесконечности собственных функций (14), (15).

Предложение 3. Пусть $l = \frac{m}{2}$ при чётном m и $l = \frac{m-1}{2}$ при нечётном m . При каждом $k \in \{1, \dots, l\}$ для собственных функций (14) и (15) имеет место оценка

$$\psi_k^\pm(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{k+1}}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Это предложение обобщает формулу (20) из [5] и совпадает с ней при $k = l = \frac{m}{2}$.

6. ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

Здесь мы приведем описание всех инвариантных реализаций $\mathbf{H}_B$, имеющих ненулевое ядро $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$. Подчеркнем, что граничные матрицы B здесь пробегают совокупность всех матриц вида (12), а не только скалярных $B = \alpha I_m$.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{H}_B$ — реализация, определяемая матрицей B вида (12). Тогда:

(i) $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ в точности тогда, когда выполнено одно из условий:

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{m-1} \left(a_{j+1} - \frac{1}{4\pi r_j} \right) e^{\frac{2ij\pi k}{m}}, \quad k \in \{1, \dots, l\}, \quad (17)$$

в которых числа $a_1, \dots, a_m$ связаны соотношениями

$$a_{m-j} = a_{j+2} \quad \text{где} \quad j \in \{0, \dots, m-2\}.$$

(ii) При этом подпространство $\ker \mathbf{H}_B$ порождено собственными функциями вида (14), (15) (в зависимости от четности) и удовлетворяющими оценке (16).

(iii) Нулевое собственное значение оператора $\mathbf{H}_B$ имеет максимальную кратность, если и только если выполнены все l условий (17). Это имеет место в точности тогда, когда $a_{j+1} = a_1 + \frac{1}{4\pi r_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

В следующей теореме приводится явное описание всех инвариантных реализаций $\mathbf{H}_B$, имеющих максимальную кратность нулевого собственного значения.

Теорема 4. Пусть $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля вида (13). Пусть также

$E_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — матрица, все элементы которой равны 1. Тогда:

(i) Размерность ядра $\ker \mathbf{H}_B$ каждой инвариантной реализации $\mathbf{H}_B$, определяемой матрицей B вида (12), не превосходит $m-1$, т. е. $\dim(\ker \mathbf{H}_B) \leq m-1$;

(ii) Кратность нулевого собственного значения реализации $\mathbf{H}_B$ максимальна, т. е.

$$\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m-1, \quad (18)$$

тогда и только тогда, когда матрица B имеет вид

$$B = B(a) := aE_m + M(0), \quad a \in \mathbb{C};$$

(iii) $\mathbf{H}_{B(a)} = \mathbf{H}_{B(a)}^*$ и обладает свойством (18) в точности тогда, когда $a \in \mathbb{R}$;

(iv) $\mathbf{H}_{B(a)} \geq 0$ и обладает свойством (18) в точности тогда, когда $a \geq 0$;

(v) В частности, при $a = 0$ расширение $\mathbf{H}_{B(0)} = \mathbf{H}_{M(0)} = \widehat{\mathbf{H}}_K (\geq 0)$ является крайновским (наименьшим положительным) и обладает свойством (18).

7. ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

В случаях $m = 3$, $m = 4$ для инвариантных реализаций $\mathbf{H}_B$ мы описываем все возможные размерности ядер $\ker \mathbf{H}_B$.

Пусть $m = 3$, а B — произвольная граничная матрица вида (12), порождающая инвариантное относительно D_3 расширение $\mathbf{H}_B$, т. е.

$$B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}. \quad (19)$$

Теорема 5. Реализация $\mathbf{H}_B$ с граничной матрицей B вида (19) имеет ненулевое ядро $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$

в точности тогда, когда $a - b = -\frac{1}{4\pi r}$, где r — сторона треугольника.

При этом $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = 2$, а соответствующие собственные функции равны

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_2|} \right), \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_3|} \right). \end{aligned}$$

8. ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ КВАДРАТА.

Рассмотрим случай $m = 4$. Матрица B , определяющая инвариантное относительно D_4 расширение $\mathbf{H}_B$, имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}. \quad (20)$$

Теорема 6. Реализация $\mathbf{H}_B$ с граничной матрицей B вида (20) имеет ненулевое ядро $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ в точности тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(i) \ a - c = -\frac{1}{4\pi r_2},$$

$$(ii) \ a - 2b + c = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где r_1 — сторона, a r_2 — диагональ квадрата. При этом

$$\dim(\ker \mathbf{H}_B) = \begin{cases} 1, & \text{если выполнено (ii), но нарушено (i);} \\ 2, & \text{если выполнено (i), но нарушено (ii);} \\ 3, & \text{если выполнены оба условия (i) и (ii).} \end{cases}$$

Соответствующие собственные функции равны

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_3|} \right),$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - x_2|} - \frac{1}{|x - x_4|} \right),$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_2|} + \frac{1}{|x - x_3|} - \frac{1}{|x - x_4|} \right).$$

Замечание 3. Подчеркнем, что элементы матриц B в теоремах 5 и 6 комплексны. Поэтому матрицы B и, значит, порождаемые ими реализации $\mathbf{H}_B$ со свойством $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$ не обязательно самосопряжённые. Но для скалярных матриц $B = \alpha I$, условие $\alpha \in \mathbb{R}$, т. е. условие $B = B^*$, необходимо для свойства $\ker \mathbf{H}_B \neq \{0\}$.

Из-за недостатка места мы опускаем описание аналогичных результатов для правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$. Эти результаты планируются опубликовать в другой работе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования первого автора выполнены за счёт гранта Российского научного фонда №23-11-00153.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
2. Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. Т. 3. М.: Мир, 1982. 443 с.
3. Тайманов И.А., Царев С.П. Двумерные операторы Шрёдингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным L_2 -ядром // УМН. 2007. Т. 62. № 3 (375). С. 217–218.
4. Тайманов И.А., Царев С.П. Двумерные рациональные солитоны, построенные с помощью преобразований Мутара, и их распад // ТМФ. 2008. Т. 157. № 3. С. 188–207.
5. Гриневиц П.Г., Новиков Р.Г. Многоточечные рассеиватели со связанными состояниями при нулевой энергии // ТМФ. 2017. Т. 193. № 2. С. 309–314.
6. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
7. Гриневиц П.Г., Новиков Р.Г. Спектральное неравенство для уравнения Шрёдингера с многоточечным потенциалом // УМН. 2022. Т. 77. № 6 (468). С. 69–76.
8. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics: texts and monographs in Physics. Berlin–New York: Springer, 1988. 452 p.
9. Goloschapova N., Malamud M., Zastavnyi V. Radial Positive definite functions and spectral theory of Schrödinger operators with point interactions // Math. Nachr. 2012. V. 285. N 14–15. P. 1839–1859.
10. Malamud M.M., Schmudgen K. Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions // J. Funct. Anal. 2012. N 263 (10). P. 3144–3194.
11. Маламуд М.М., Марченко В.В. Инвариантные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями в вершинах правильного многогранника // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 3. С. 471–477.
12. Деркач В.О., Маламуд М.М. Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи. Киев, 2017. 612 с.
13. Derkach V.A., Malamud M.M. Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. 1991. N 95. P. 1–95.
14. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений, Киев: Наукова думка, 1984. 284 с.
15. Schmüdgen K. Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space. Dordrecht–Heidelberg–New York–London: Springer, 2012.

ON KERNELS OF INVARIANT SCHRÖDINGER OPERATORS WITH POINT INTERACTIONS. GRINEVICH–NOVIKOV PROBLEM

M. M. Malamud^{a,*}, V. V. Marchenko^{b,**}

^a*RUDN University, Moscow, Russia*

^b*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

According to Berezin and Faddeev, a Schrödinger operator with point interactions

$$-\Delta + \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta(x - x_j), \quad X = \{x_j\}_1^m \subset \mathbb{R}^3, \quad \{\alpha_j\}_1^m \subset \mathbb{R},$$

is any self-adjoint extension of the restriction $-\Delta_X$ of the Laplace operator $-\Delta$ to the subset $\{f \in H^2(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = 0, 1 \leq j \leq m\}$ of the Sobolev space $H^2(\mathbb{R}^3)$. The present paper studies the extensions (realizations) invariant under the symmetry group of the vertex set $X = \{x_j\}_1^m$ of a regular m -gon. Such realizations $\mathbf{H}_B$ are parametrized by special circulant matrices $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. We describe all such realizations with non-trivial kernels. A Grinevich–Novikov conjecture on simplicity of a zero eigenvalue of the realization $\mathbf{H}_B$ with a scalar matrix $B = \alpha I$ and an even m is proved. It is shown that for an odd m non-trivial kernels of all the realizations $\mathbf{H}_B$ with scalar $B = \alpha I$ are two-dimensional. Besides, for arbitrary realizations ($B \neq \alpha I$) the estimate $\dim(\ker \mathbf{H}_B) \leq m - 1$ is proved, and all the invariant realizations of the maximal dimension $\dim(\ker \mathbf{H}_B) = m - 1$ are described. One of them is the Krein realization, which is the minimal positive extension of the operator $-\Delta_X$.

Keywords: Schrödinger operators with point interactions, invariant operators, Krein realization, multiplicity of zero eigenvalue