ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 75–78

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5+519.213

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФИНИТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2024 г. А. Д. Манов[1, 2, *]

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 01.04.2024 г.
После доработки 31.04.2024 г.
Принято к публикации 27.05.2024 г.

В данной работе рассматривается экстремальная задача для положительно определенных функций на $\mathbb{R}^n$ с фиксированным носителем и фиксированным значением в начале координат (класс $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$). Требуется найти точную верхнюю грань функционала специального вида на множестве $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$. Данная задача является обобщением задачи Турана для функций с носителем в шаре. Нами получено общее решение данной задачи при $n \neq 2$. Как следствие, получены новые точные неравенства для производных целых функций экспоненциального сферического типа.

Ключевые слова: положительно определенные функции, экстремальные задачи, преобразование Фурье, целые функции экспоненциального сферического типа

DOI: 10.31857/S2686954324020118, **EDN:** XIIULK

Фиксируем некоторые обозначения: $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле, $\overline{\mathbb{B}_r}$ — его замыкание, $\widetilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ и $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$, $L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$ — пространство локально ограниченных п. в. на $\mathbb{R}^n$ функций.

Комплекснозначная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}^n$ ($f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$), если для любого $m \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i \overline{c_j} f\left(x_i - x_j\right) \geq 0. \tag{1}$$

Если $f \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, то из неравенства (1) при $m = 2$ вытекает, что $|f(x)| \leqslant f(0)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и функция f является *эрмитовой*, т. е. $f = \widetilde{f}$.

Пусть $r > 0$. Символом $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\varphi(0) = 1$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\mathbb{B}_r}$. Очевидно, что класс функций $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ не пуст. Например, если взять функцию $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такую, что $u(x) = 0$ при $|x| \geqslant r/2$ и $\|u\|_2 = 1$, то следующая функция принадлежит $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$:

$$\varphi(x) = \left(u * \tilde{u}\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x-t)\tilde{u}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Отметим, что при $n = 1$ из теоремы Боаса-Каца, Крейна (см., например, [1, theorem 3.10.2]) следует, что любая функция $\varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ представима в виде (2). При $n \geqslant 2$, это вообще говоря, не верно. Также стоит отметить, что в работе [2] найдены необходимые и достаточные условия предстовимости функции из класса $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ в виде самосвёртки.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу для положительно определённых функций $\varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$.

Задача 1. *Пусть $r > 0$ и функция $\rho \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$ является радиальной и вещественнозначной. Требуется найти следующую величину:*

$$M(n,\rho,r) := \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\rho(x)dx\right| : \varphi \in \mathfrak{F}_r\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}.$$

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

[2] *Донецкий государственный университет, Донецк, Донецкая народная республика*

[*] *E-mail: manov.ad@ro.ru*

Если $\rho(x) \equiv 1$, то величина $M(n,\rho,r)$ была найдена Зигелем [3] в 1935 году и независимо Боасом и Кацом (см. [4, theorem 5]) в 1945 году при $n = 1$. В этом случае,

$$M(n,\rho,r) = \mathrm{vol}(\mathbb{B}_{r/2}) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{2^n \Gamma(n/2+1)},$$

где $\mathrm{vol}(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. В этом случае, экстремальной функцией является свёртка характеристической функции шара $\mathbb{B}_{r/2}$ с собой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{B}_{r/2})}\left(\chi_{\mathbb{B}_{r/2}} * \chi_{\mathbb{B}_{r/2}}\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Результат Зигеля также был переоткрыт Д. В. Горбачевым [5] в 2001 году, другими методами.

Отметим, что в случае $\rho(x) \equiv 1$, задача 1 относится к классу экстремальных задач типа Турана. В данном типе задач требуется найти точную верхнюю грань значений интеграла $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx$ по всем функциям $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ с фиксированным значением в нуле, носитель которых содержится в фиксированном центрально симметричном выпуклом теле. На данный момент, помимо решения задачи Турана для случая шара, известны решения только для многогранников заполняющих пространство (см. работу В.В. Арестова, Е.Е. Бердышевой [6]), а также спектральных тел (см. работу Колунцакиса, Ревеса [7]). Отметим также работу А.В. Ефимова [9], в которой рассматривается один из вариантов задачи Турана для шара.

При $n = 1$ и более слабых условиях на функцию ρ аналог задачи 1 был рассмотрен автором в [10]. Нами доказана следующая теорема, которая даёт решение задачи 1 при $n \neq 2$.

Теорема 1. *Пусть* $n \neq 2$, $r > 0$ *и функция* $\rho \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *является радиальной и вещественнозначной. Определим оператор* $A_\rho : L_2(\mathbb{B}_{r/2}) \to L_2(\mathbb{B}_{r/2})$ *следующим образом:*

$$(A_\rho u)(t) := \int_{\mathbb{B}_{r/2}} \rho(t-x)u(x)dx, \quad u(x) \in L_2(\mathbb{B}_{r/2}).$$

Тогда A_ρ — компактный самосопряжённый оператор в $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$ и справедливо равенство:

$$M(n,\rho,r) = \|A_\rho\|, \tag{3}$$

где $\| A_\rho \|$ — норма оператора A_ρ в $L_2(\mathbb{B}_{r/2})$.

Из теоремы 1 следует, что решение задачи 1 сводится к нахождению наибольшего по модулю собственного значения оператора A_ρ. В частности, экстремальной функцией будет нормированная самосвёртка функции u, которая отвечает наибольшему по модулю собственному значению оператора. Отметим также, что теорема 1 является аналогом теоремы Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [11, Satz IV]).

Доказательство равенства (3) в теореме 1 проводится через оценки экстремальной величины в задаче 1 сверху и снизу. Основная сложность заключается в оценке сверху, которая преодолевается сведением задачи 1 к случаю радиальных положительно определённых функций и использованием следующей теоремы.

Теорема A (Рудин [12], Ефимов [13]). *Пусть* $n \neq 2$, $r > 0$ *и функция* $\varphi \in \mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$ *является радиальной. Тогда функция* φ *представима в виде равномерно сходящегося ряда:*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k * \widetilde{u_k}\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $u_k \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $u_k(x) = 0$ при $|x| \geqslant r/2$.

Замечание 1. *При* $n = 1$ *теорема выше вытекает из теоремы Боаса—Каца, Крейна. Рудин доказал теорему 1 при* $n \in \mathbb{N}$ *в предположении, что функция* φ *бесконечно дифференцируемая* (*см.* [12] *и* [1, theorem 3.10.4]). *В работе Эма, Гнайтинга, Ричардса* [*14*] *без доказательства отмечается, что в теореме Рудина достаточно предполагать только непрерывность функции* φ. *В работе А.В. Ефимова* [*13*] *содержится доказательство теоремы 1 при* $n \geqslant 3$.

Если $\rho(x)$ — многочлен, то задача 1 связана с задачей о точечных оценках производных целых функций экспоненциального сферического типа $\leqslant r$. Напомним, что целая функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется экспоненциальной сферического типа $\leqslant r$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся константа $A_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(r+\varepsilon)|z|},$$
$$z \in \mathbb{C}^n, \text{ где } |z| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2}.$$

Символом $W_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество целых функций экспоненциального сферического типа $\leqslant r$ таких, что их сужение на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, а символом $W_{p,r}^{+}(\mathbb{R}^n)$ —

подмножество неотрицательных на $\mathbb{R}^n$ функций из $W_{p,r}(\mathbb{R}^n)$. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $n,m \in \mathbb{N}$, $r > 0$, Δ *— оператор Лапласа,* L *— линейный дифференциальный оператор вида*

$$L := \sum_{k=0}^{m} a_k \Delta^k, \text{ где } a_k \in \mathbb{R} \text{ и } \rho(x) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k |x|^{2k},$$
$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любой функции $f \in W_{1,r}^{+}(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующее точное неравенство:

$$\|Lf\|_\infty \leqslant \frac{M(n,\rho,r)}{(2\pi)^n}\|f\|_1.$$

Рассмотрим некоторые примеры, когда можно выписать решения задачи 1 в явном виде.

Пример 1. *Пусть* $n \neq 2$, $r > 0$ *и* $\rho(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$. *В этом случае,*

$$M(n,\rho,r) = \frac{r^{n+2}\pi^{n/2}}{2^{n+1}\Gamma(n/2)}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{\sqrt{n(n+4)}}{n(n+4)}\right), \tag{4}$$
$$n \neq 2, r > 0.$$

Пример 2. *Пусть* $n = 1$, $r > 0$ *и* $\rho(x) = x^{2m}$, *где* $m \in \mathbb{N}$. *В этом случае,*

$$M(1,\rho,r) = \left(\frac{r}{2}\right)^{2m+1} |\lambda_{amax}|, \tag{5}$$

где λ_{amax} — наибольшее по модулю собственное значение матрицы:

$$A_m := \left(\frac{(-1)^{i+1} C_{2m}^{i-1}\left(1 + (-1)^{i-j}\right)}{2m + i - j + 1}\right)_{i,j=1}^{2m+1}.$$

Следствие 1. *Из теоремы 2 и примера 1 вытекает, что при* $n \neq 2$ *для любой функции* $f \in W_{1,r}^{+}(\mathbb{R}^n)$ *имеет место точное неравенство:*

$$\|\Delta f\|_\infty \leq \frac{M(n,\rho,r)}{(2\pi)^n}\|f\|_1, \tag{6}$$

где $M(n,\rho,r)$ определяется равенством (4).

Следствие 2. *Из теоремы 2 и примера 2 вытекает, что при* $m \in \mathbb{N}$ *для любой функции* $f \in W_{1,r}^{+}(\mathbb{R})$ *имеет место точное неравенство:*

$$\left\|f^{(2m)}\right\|_\infty \leq \frac{M(1,\rho,r)}{2\pi}\|f\|_1, \tag{7}$$

где $M(1,\rho,r)$ определяется равенством (5).

Замечание 2. *В работе автора* [10] *было доказано, что для функций* $f \in W_{1,r}^{+}(\mathbb{R})$ *справедливы следующие точные неравенства:*

$$-\frac{r^3}{12\pi}\|f\|_1 \leq -f''(t) \leq \frac{r^3\left(5 + 3\sqrt{5}\right)}{120\pi}\|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Очевидно, что из (8) *вытекает неравенство* (6) *при* $n = 1$, *а также неравенство* (7) *при* $m = 1$.

Замечание 3. *Также стоит отметить, что И. И. Ибрагимовым в 1959 было доказано* (*см.* [15, следствие 2])*, что для функций* $f \in W_{1,r}(\mathbb{R})$, *не обязательно неотрицательных, выполняются следующие неравенства:*

$$\left\|f^{(m)}\right\|_\infty \leq \frac{r^{m+1}}{\pi(m+1)}\|f\|_1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Неравенство (9) *при* $m = 1$ *с константой* r^2/π *было доказано Кореваром в 1949* (*см.* [16]).

Неравенства вида (6), (7), (9) относятся к неравенствам типа Бернштейна—Никольского. Более подробную информацию о данном типе неравенств можно найти в статье Д. В. Горбачева [17].

Замечание 4. *Экстремальные задачи подобного типа имеют приложения в различных разделах математики, см. например [18, 19].*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 23-11-00153).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sasvári Z.* Multivariate Characteristic and Correlation Functions. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013.
2. *Akopyan R., Efimov A.* Boas—Kac roots of positive definite functions of several variables // Anal. Math. 2017. V. 43. N 3. P. 359—369.
3. *Siegel, C.L.* Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. V. 65. P. 307—323.
4. *Boas R.P., Jr., Kac. M.* Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. V. 12. N 1. P. 189—206.
5. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. 346—352.
6. *Arestov A.A., Berdysheva E.E.* The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. V. 8. N 3. P. 381—388.

7. *Kolountzakis M., Révész S.G.* On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131. P. 3423–3430.
8. *Révész S.G.* Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. V. 37. N 1. P. 15–50.
9. *Ефимов А.В.* Вариант задачи Турана для положительно-определенных функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 136–154.
10. *Манов А.Д.* Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 5. 161–171.
11. *Szász O.* Über harmonische Funktionen und L-Formen. // Math. Zeitschr. 1918. V. 1. P. 149–162.
12. *Rudin W.* An extension theorem for positive-definite functions // Duke Math. J. 1970. V. 37. P. 49–53.
13. *Ефимов А.В.* Аналог теоремы Рудина для непрерывных радиальных положительно определенных функций нескольких переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 172–179.
14. *Ehm W., Gneiting T., Richards D.* Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356. P. 4655–4685.
15. *Ибрагимов И.И.* Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 2. 243–256.
16. *Korevaar J.* An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde. 1949. V. 23. N 2. P. 55–62.
17. *Горбачев Д.В.* Точные неравенства Бернштейна – Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 5. С. 58–110.
18. *Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S.* Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // JAMA. 2020. V. 140. P. 161–185.
19. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сб. 2017. Т. 18. № 2. С. 34–53

ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR COMPACTLY SUPPORTED POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

A. D. Manov[a, b, *]

[a]*Saint Petersburg University, Saint Petersburg, Russia*

[b]*Donetsk State University, Donetsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

This article considers an extremal problem for positive definite functions on $\mathbb{R}^n$ with a fixed support and a fixed value at the origin (the class $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$). It is required to find the least upper bound of a special form functional over $\mathfrak{F}_r(\mathbb{R}^n)$. This problem is a generalization of the Turán problem for functions with support in a ball. We have obtained a general solution to this problem for $n \neq 2$. As a consequence, new sharp inequalities are obtained for derivatives of entire functions of exponential spherical type.

Keywords: positive-definite functions, extremal problems, Fourier transform, entire functions of exponential spherical type