ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 15–20

МАТЕМАТИКА

УДК 510.53, 510.65, 512.573, 512.577

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ ТЕОРИЙ ПОДМНОЖЕСТВ НЕКОТОРЫХ УНАРОВ

© 2024 г. Б. Н. Карлов[1, *]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 07.07.2023 г.
После доработки 08.02.2024 г.
Принято к публикации 14.02.2024 г.

В данной работе исследуются алгоритмические свойства унаров с разнозначной функцией. Мы доказываем, что теория любого такого унара допускает элиминацию кванторов при подходящем обогащении сигнатуры счётным множеством предикатных символов. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы элиминация кванторов была эффективной, и формулируется критерий разрешимости теорий таких унаров. С помощью полученного критерия приводится пример такого унара с разрешимой теорией, что теория унара его подмножеств неразрешима.

Ключевые слова: унар, теория, разрешимость, элиминация кванторов, алгебра подмножеств

DOI: 10.31857/S2686954324020035, **EDN:** XJBSFR

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений теории моделей является изучение различных операций над алгебраическими системами, таких как прямые и фильтрованные произведения, гомоморфизмы, построение факторсистем и т. п. Одним из классических результатов, полученных в этой области, является следующий: если теории нескольких алгебраических систем разрешимы, то теория их прямого произведения также разрешима (см. [1]). Элементами основного множества прямого произведения являются последовательности (конечные или бесконечные) элементов исходных систем, то есть упорядоченные множества элементов. Естественным аналогом прямого произведения является операция взятия всех или некоторых подмножеств основного множества исходной системы. В отличие от прямого произведения, такая операция строит неупорядоченные множества элементов. В частности, эта операция позволяет перейти от алгебры слов в некотором алфавите к алгебре языков. В работах [2, 3] были изучены булевы алгебры некоторых классов языков и было доказано, что булевы алгебры регулярных, контекстно-зависимых и рекурсивных языков изоморфны. В работах [4, 5] были изучены другие варианты теории регулярных языков. Было доказано, что теория регулярных языков неразрешима, даже если алфавит содержит единственный символ, а сигнатура содержит либо только конкатенацию, либо объединение и итерацию. Также в [4] установлено, что теория конечных подмножеств натуральных чисел со сложением неразрешима. Известно, что теория натуральных чисел с операцией сложения (арифметика Пресбургера) разрешима, так что этот результат показывает, что алгебра подмножеств может быть алгоритмически существенно сложнее, чем исходная алгебра.

Простейшим типом алгебраических систем являются унары — алгебры вида $\mathfrak{A} = (A, f)$, где f — одноместная функция. Разрешимость элементарной теории унаров была доказана в [6, 7], а в [7] также получен критерий элементарной эквивалентности унаров. В работе [8] описаны все полные теории унаров, допускающие элиминацию кванторов. В этой же работе приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы теория унара $\mathfrak{A}$ допускала элиминацию кванторов. Доказательства этих свойств унаров весьма нетривиальны. Так, элементарная классификация использует сложные формулы, описывающие структуру компонент унаров, а в доказательстве критерия элиминации кванторов используется понятие однородных моделей.

[1] *Тверской государственный университет, Тверь, Россия*
[*] *E-mail: bnkarlov@gmail.com*

Однако в некоторых частных случаях существуют значительно более простые доказательства. Например, в работе [9] получена элементарная классификация унаров с разнозначной функцией. Критерий элементарной эквивалентности формулируется в ней в терминах количества компонент разного типа. Некоторые исследования унаров связаны с операцией построения алгебры подмножеств. В [10] приведён пример унара с неразрешимой теорией и такого, что теория унара всех его конечных подмножеств разрешима, а в [9, 11] изучены последовательности унаров с разнозначной функцией, получающиеся в результате многократного применения операции взятия подмножеств.

В настоящей работе мы продолжаем изучать алгоритмические свойства унаров с разнозначной функцией. Мы даём прямое доказательство того, что теория любого такого унара допускает элиминацию кванторов при обогащении сигнатуры одноместными предикатными символами D_i, означающими возможность i-кратного применения обратной функции. Кроме того, мы формулируем необходимые и достаточные условия для того, чтобы элиминация кванторов была эффективной. Как следствие, мы получаем критерий разрешимости теорий унаров такого вида. Нашим основным результатом является следующий: существует унар $\mathfrak{A}$ с разнозначной функцией и такой, что теория унара $\mathfrak{A}$ разрешима, но теории унаров всех его подмножеств и всех его конечных подмножеств неразрешимы.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть A — произвольное множество, и пусть $f : A \to A$ — некоторая одноместная функция. f *разнозначна*, если из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$. Через f^i мы будем обозначать функцию, получающуюся композицией f с собой i раз, то есть

$$f^i(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{i\text{ раз}}(x)\ldots)).$$

В частности, $f^0(x) = x$ для всех x, то есть f^0 — тождественная функция.

Уноидом называется алгебраическая система $\mathfrak{A} = (A, f_1, \ldots, f_n)$, где f_i — одноместные функции. *Унар* — это уноид $\mathfrak{A} = (A, f)$. Мы будем изучать унары, в которых функция f является разнозначной. Основное множество такого унара распадается на несколько классов (возможно, бесконечно много) одного из следующих видов:

1. конечные классы мощности n:

$$C = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f(x_i) = x_{i+1}, \quad f(x_n) = x_1;$$

2. бесконечные классы типа целых чисел $\mathbb{Z}$:

$$C = \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}, \quad f(x_i) = x_{i+1};$$

3. бесконечные классы типа натуральных чисел ω:

$$C = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\},$$
$$f(x_i) = x_{i+1},$$
$$f(y) \neq x_0 \text{ ни для какого } y \in A.$$

В работе [9] было определено счётное семейство инвариантов, характеризующих унары с разнозначной функцией с точностью до элементарной эквивалентности. Через ω мы обозначаем множество натуральных чисел (включая 0).

Определение 1. *С унаром $\mathfrak{A} = (A, f)$ связывается функция*

$$\chi_{\mathfrak{A}} : \omega \cup \{\omega, \mathbb{Z}\} \to \omega \cup \{\infty\},$$

определяемая следующим образом:

1. $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = k$, если $\mathfrak{A}$ содержит конечное число $k \geqslant 0$ классов мощности n, в противном случае $\chi_{\mathfrak{A}}(n) = \infty$;

2. $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = k$, если $\mathfrak{A}$ содержит конечное число $k \geqslant 0$ классов типа ω, в противном случае $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega) = \infty$;

3. $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 1$, если для любого $n \geqslant 0$ в унаре $\mathfrak{A}$ имеется класс (конечный или бесконечный), содержащий более n элементов, в противном случае $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z}) = 0$.

Неформально говоря, $\chi_{\mathfrak{A}}(n)$ и $\chi_{\mathfrak{A}}(\omega)$ — это количество классов мощности n и типа ω соответственно. Символ ∞ означает, что количество классов данного типа бесконечно, при этом различные бесконечные мощности не различаются. Значение $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathbb{Z})$ равно 1 тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ имеются классы, содержащие сколь угодно много элементов.

Для произвольного унара $\mathfrak{A} = (A, f)$ через $\exp\mathfrak{A}$ обозначается унар, основным множеством которого является множество всех подмножеств множества A, а функция f определяется как результат поэлементного применения f: $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$. Через $\exp_{\text{fin}}\mathfrak{A}$ обозначается аналогичный унар, но содержащий только конечные подмножества множества A.

Теория T — это множество формул первого порядка, замкнутое относительно логического следования. Формулы φ и ψ *эквивалентны* в теории T, если $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in T$. Эквивалентность формул обозначается $\varphi \equiv_T \psi$ или просто $\varphi \equiv \psi$, если теория ясна из контекста. Теория алгебраической системы $\mathfrak{A}$ — это множество всех формул истинных в $\mathfrak{A}$. Теория T допускает *элиминацию кванторов*, если для любой формулы φ существует бескванторная формула ψ такая, что $\varphi \equiv_T \psi$. Теория T допускает *эффективную* элиминацию кванторов, если существует алгоритм, который по произвольной формуле φ строит эквивалентную ей в теории T бескванторную формулу ψ.

3. ЭЛИМИНАЦИЯ КВАНТОРОВ В ТЕОРИИ УНАРА С РАЗНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Мы обогатим сигнатуру унара $\mathfrak{A}$ счётным множеством одноместных предикатов D_i ($i = 0,1,2,\dots$), которые определяются следующим образом:

$$D_i(x) \equiv (\exists y) x = f^i(y).$$

Таким образом, предикат $D_i(x)$ говорит, что из элемента x можно сделать по меньшей мере i шагов в направлении “против” функции f.

Введём специальное отношение $R_{\mathfrak{A}}$, описывающее строение унара $\mathfrak{A}$. Это отношение подсчитывает количество классов разных мощностей, но делает это менее точно, чем функция $\chi_{\mathfrak{A}}$.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, f)$ — унар, в котором функция f разнозначна. Через $R_{\mathfrak{A}}$ обозначается следующее отношение на множестве натуральных чисел:*

$$R_{\mathfrak{A}} = \{(n,k) : \chi_{\mathfrak{A}}(n) \ge k\}.$$

Мы считаем, что $\infty > n$ для любого $n \in \omega$.

Теперь мы приведём наш первый результат — возможность элиминации кванторов в теории унара $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, f)$ — унар, в котором функция f разнозначна. Тогда:*

1. теория унара $\mathfrak{A}$ допускает элиминацию кванторов в сигнатуре $\{f, D_i : i \in \omega\}$;

2. теория унара $\mathfrak{A}$ допускает эффективную элиминацию кванторов в сигнатуре $\{f, D_i : i \in \omega\}$ тогда и только тогда, когда отношение $R_{\mathfrak{A}}$ рекурсивно.

Схема доказательства. Чтобы доказать возможность элиминации кванторов, достаточно показать, как построить эквивалентную бескванторную формулу для формулы $(\exists x)\psi$, где ψ — конъюнкция атомных формул и их отрицаний (см. [12]). Рассмотрим формулу

$$\varphi = (\exists x)\left(\begin{array}{c}\bigwedge_{i=1}^{K} f^{k_i}(x) = f^{k'_i}(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{L} f^{l_i}(x) \neq f^{l'_i}(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{M} f^{m_i}(x) = f^{m'_i}(y_i) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{i=1}^{P} f^{p_i}(x) \neq f^{p'_i}(z_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{Q} D_{q_i}\left(f^{q'_i}(x)\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{R} \neg D_{r_i}\left(f^{r'_i}(x)\right)\end{array}\right),$$

где y_i и z_i — переменные отличные от x. Непосредственно проверяется, что при $a > b$ формула $D_a(f^b(x))$ эквивалентна $D_{a-b}(x)$, а в противном случае она истинна. Кроме того, $D_a(x) \wedge D_b(x) \equiv D_{\max\{a,b\}}$, поэтому конъюнкцию формул $D_{q_i}(f^{q'_i}(x))$ можно заменить на одну формулу вида $D_q(x)$. Аналогично конъюнкцию формул $\neg D_{r_i}(f^{r'_i}(x))$ можно заменить на одну формулу вида $\neg D_r(x)$. Так как функция f разнозначна, то формулы $f^a(y) = f^b(z)$ и $f^{a+c}(y) = f^{b+c}(z)$ эквивалентны для любых целых чисел a, b, c. Следовательно, можно добиться, чтобы в неравенствах $f^{p_i}(x) \neq f^{p'_i}(z)$ все показатели при f в левых частях были одинаковыми. Формула $f^a(x) = f^b(x)$ эквивалентна формуле $x = f^{|a-b|}(x)$, а формула $x = f^a(x) \wedge x = f^b(x)$ эквивалентна формуле $x = f^{\gcd(a,b)}(x)$, где через gcd обозначен наибольший общий делитель. Следовательно, конъюнкцию формул $f^{k_i}(x) = f^{k'_i}(x)$ можно заменить на одну формулу вида $x = f^k(x)$. Аналогично каждое неравенство $f^{l_i}(x) \neq f^{l'_i}(x)$ эквивалентно неравенству $x \neq f^{|l_i - l'_i|}(x)$. Если в формуле есть хотя бы одно равенство вида $f^m(x) = t$, где терм t не содержит переменной x, то можно всюду увеличить показатели при f по меньшей мере до m, используя свойства отношений D_q и D_r, а также эквивалентность формул $f^a(y) = f^b(z)$ и $f^{a+m}(y) = f^{b+m}(z)$. После этого квантор элиминируется заменой $f^m(x)$ на t и добавлением $D_m(t)$ в качестве нового члена конъюнкции.

Таким образом, остаётся устранить квантор в формуле вида

$$(\exists x)\left(x = f^k(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{L} x \neq f^{l_i''}(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{P} f^N(x) \neq f^{p_i''}(z_i) \wedge D_q(x) \wedge \neg D_r(x)\right),$$

где некоторые члены конъюнкции могут отсутствовать. Эта формула утверждает, что существует элемент x такой, что $f^N(x)$ не совпадает с некоторыми фиксированными элементами $f^{p_i''}(z_i)$, при этом накладываются некоторые ограничения на классы, которым может принадлежать x. Формула $x = f^k(x)$ утверждает, что x принадлежит конечному классу, мощность которого является делителем числа k. Каждая из формул $x \neq f^{l_i''}(x)$ утверждает, что x принадлежит либо бесконечному классу, либо конечному классу, мощность которого не является делителем числа l_i''. Формула $D_q(x)$ утверждает, что x либо принадлежит классу типа отличного от ω, либо находится в классе типа ω на расстоянии большем или равном q от его начального элемента. Аналогично формула $\neg D_r(x)$ утверждает, что x находится в классе типа ω на расстоянии менее r от начала.

Устранение квантора теперь выполняется по следующей схеме: выделить среди элементов $f^{p_i''}(z_i)$ те, которые могут попасть в те же классы, что и $f^N(x)$, и перебрать все “существенно разные” варианты их расположения в этих классах. Если x должен находиться в конечном классе одной из мощностей $n_1,\ldots,n_h$ и суммарный размер таких классов больше P, то x заведомо существует. Если же их суммарный размер не превосходит P, то существует лишь конечно много вариантов расположения $f^{p_i''}(z_i)$ внутри этих классов, поэтому их можно просто перебрать. Если x должен находиться в классе типа ω, то квантор устраняется аналогично. Если число классов типа ω больше P или для x не задана верхняя граница расстояния до первого элемента класса, то x всегда существует. Если же число классов типа ω не превосходит P и расстояние от x до начала ограничено, то нужно написать конечную дизъюнкцию, которая говорит, что хотя бы один элемент на таком же расстоянии от начала, что и x, не совпадает ни с одним $f^{p_i''}(z_i)$. Наконец, формула может не накладывать ограничений на тип класса, которому принадлежит x. В этом случае формула истинна, если количество различных элементов среди $f^{p_i''}(z_i)$ меньше мощности основного множества. Но число разбиений конечного множества на подмножества равных элементов конечно, поэтому все такие разбиения можно перебрать.

Если отношение $R_{\mathfrak{A}}$ рекурсивно, то возможно алгоритмически описать вышеперечисленные варианты, поэтому элиминация кванторов оказывается эффективной. Если же $R_{\mathfrak{A}}$ нерекурсивно, то эффективная элиминация невозможна, поскольку можно написать формулу, утверждающую, что $\mathfrak{A}$ содержит не менее чем k классов мощности n. □

Из этой теоремы получается критерий разрешимости теории унара $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, f)$ — унар, в котором функция f разнозначна. Теория унара $\mathfrak{A}$ разрешима тогда и только тогда, когда отношение $R_{\mathfrak{A}}$ рекурсивно.*

4. ПРИМЕР УНАРА С НЕРАЗРЕШИМОЙ ТЕОРИЕЙ ПОДМНОЖЕСТВ

Теорема 2 позволяет построить пример унара, теория которого алгоритмически проще теории унара его подмножеств. Сначала установим одно свойство рекурсивных множеств.

Теорема 3. *Существует рекурсивное множество X такое, что множество простых делителей всех чисел из X нерекурсивно.*

Доказательство. Для натурального числа x обозначим через M_x машину Тьюринга с номером x. Пусть SELF — множество номеров самоприменимых машин Тьюринга:

$$\mathrm{SELF} = \{x \in \omega : M_x \text{ останавливается на своем входе } x\}.$$

Известно (см. [12]), что это множество нерекурсивно. Обозначим через p_i i-е по счёту простое число: $p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots$. Множество X определяется следующим образом:

$$X = \left\{ p_i^j : M_i \text{ останавливается на своём номере ровно за } j \text{ шагов} \right\}.$$

Это множество рекурсивно. Действительно, чтобы проверить, принадлежит ли число n множеству X, сначала нужно узнать, является ли n степенью простого числа. Если нет, то $n \notin X$. Если же $n = p_i^j$, то нужно запустить машину Тьюринга M_i на входе i на j шагов и проверить, остановится ли она.

Обозначим через Y множество простых делителей всех чисел из множества X. Если машина Тьюринга M_i самоприменима, то $p_i^j \in X$ для некоторого $j > 0$, а значит, $p_i \in Y$. Если же M_i не является самоприменимой, то $p_i^j \notin X$ ни для какого j. Следовательно, $p_i \notin Y$, так как все элементы X являются степенями простых чисел и не могут делиться на p_i. Итак, мы доказали, что $i \in \mathrm{SELF}$ тогда и только тогда, когда $p_i \in Y$. Следовательно, Y нерекурсивно. □

Теперь мы можем доказать наш главный результат.

Теорема 4. *Существует унар $\mathfrak{A} = (A, f)$, в котором функция f взаимно однозначна, и такой, что теория унара $\mathfrak{A}$ разрешима, а теории унаров $\exp\mathfrak{A}$ и $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$ неразрешимы.*

Доказательство. Пусть X — множество из теоремы 3. Определим унар $\mathfrak{A}$ следующим образом: $\mathfrak{A}$ содержит ровно один класс мощности n для любого $n \in X$ и не содержит других классов. Пара (n, k) принадлежит $R_{\mathfrak{A}}$ в одном из двух случаев: либо $k = 0$, либо $n \in X$ и $k = 1$. Так как множество X рекурсивно, то отношение $R_{\mathfrak{A}}$ также рекурсивно, а значит, по теореме 2 теория унара $\mathfrak{A}$ разрешима.

В [11] было показано, что мощности конечных классов унара $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$ исчерпываются делителями чисел вида $\mathrm{lcm}(n_1, \ldots, n_h)$, где n_i — мощности конечных классов унара $\mathfrak{A}$, причём для каждого такого делителя имеется хотя бы один класс соответствующей мощности. Поэтому унар $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$ содержит класс мощности p_i тогда и только тогда, когда p_i является делителем одного из элементов множества X. Бесконечные подмножества элементов унара $\mathfrak{A}$ добавят в унар $\exp\mathfrak{A}$ классы типа $\mathbb{Z}$, но количество и мощности конечных классов останутся такими же, что и в унаре $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$. Следовательно, унары $\exp\mathfrak{A}$ и $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$ содержат класс мощности p_i тогда и только тогда, когда $p_i \in Y$, где Y — множество всех простых делителей элементов из X. Так как Y нерекурсивно, то отношения $R_{\exp\mathfrak{A}}$ и $R_{\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}}$ также нерекурсивны. Значит, по теореме 2 теории унаров $\exp\mathfrak{A}$ и $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$ неразрешимы. □

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы доказали, что существуют такие унары с разрешимой теорией, что теории унаров всех или только конечных подмножеств неразрешимы. В связи с этим возникают некоторые естественные вопросы.

1. Справедлив ли аналогичный результат для унаров со связным основным множеством? Ясно, что функция f в таком унаре не может быть разнозначной.

2. Как может меняться степень неразрешимости теории при переходе от унара к унару его подмножеств? В частности, если теория унара $\mathfrak{A}$ принадлежит T-степени $\mathbf{a}$, то всегда ли теории унаров $\exp\mathfrak{A}$ и $\exp_{\mathrm{fin}}\mathfrak{A}$ имеют степень неразрешимости не больше чем $\mathbf{a}'$, где $\mathbf{a}'$ — скачок степени $\mathbf{a}$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mostowski A.* On direct products of theories // Journal of Symbolic Logic. 1952. V. 17. N 3. P. 1–31. https://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70257-5
2. *Marini C., Simi G., Sorbi A., Sorrentino M.* A note on algebras of languages // Theoretical Computer Science. 2011. V. 412. P. 6531–6536. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.08.022
3. *Коновалов А.С., Селиванов В.Л.* Булевы алгебры регулярных языков // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 6. С. 676–711.
4. *Dudakov S.M.* On undecidability of concatenation theory for one-symbol languages // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. N 2. P. 168–175. https://doi.org/10.1134/S1995080220020055
5. *Dudakov S., Karlov B.* On decidability of theories of regular languages // Theory of Computing Systems. 2021. V. 65. N 3. P. 462–478. https://doi.org/10.1007/s00224-020-09995-4
6. *Ehrenfeucht A.* Decidability of the theory of one function // Notices of the American Mathematical Society. 1959. V. 6. P. 268.
7. *Иванов А.А.* Полные теории унаров // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 1. С. 48–73.
8. *Иванов А.А.* О полных теориях унаров // Сибирский математический журнал. 1986. Т. 27. № 1. С. 57–69.

9. *Карлов Б.Н.* Об элементарной эквивалентности некоторых уноидов и уноидов их подмножеств // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. Т. 3. С. 18–32. https://doi.org/10.26456/vtpmk620
10. *Дудаков С.М.* Об алгоритмических свойствах алгебры конечных подмножеств некоторых уноидов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. Т. 4. С. 108–116. https://doi.org/10.26456/vtpmk550
11. *Карлов Б.Н.* О некоторых свойствах уноидов подмножеств // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 года. Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью “Вэлборн”, 2022. С. 1594–1600.
12. *Monk J.D.* Mathematical logic. New York: Springer, 1976. 542 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9452-5

ON UNDECIDABILITY OF SUBSET THEORIES OF SOME UNARS

B. N. Karlov[a, *]

[a] *Tver State University, Tver, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

This paper is dedicated to studying of the algorithmic properties of unars with an injective function. We prove that the theory of every such unar admits quantifier elimination if the language is extended by a countable amount of predicate symbols. Necessary and sufficient conditions are established for the quantifier elimination to be effective, and a criterion of decidability of theories of such unars is formulated. Using this criterion we build a unar such that its theory is decidable, but the theory of the unar of its subsets is undecidable.

Keywords: unar, theory, decidability, quantifier elimination, subset algebra