ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 515, с. 60–65

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И МОДЕЛИ МИЛНА–МАККРИ

© 2024 г. В. В. Веденяпин[1, *]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей [1–4]. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна и моделей типа Милна–Маккри. Предлагаются новые модели ускоренного расширения Вселенной без лямбды Эйнштейна.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона

DOI: 10.31857/S2686954324010093, **EDN:** ZTJYUI

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей [1–4]. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии-импульса в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна и моделей типа Милна–Маккри. Предлагаются новые модели ускоренного расширения Вселенной без лямбды Эйнштейна.

1. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in\mathbb{R}$ и заряду $e\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$ равно $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$. Рассмотрим действие:

$$\begin{gathered}S=-c\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\times\\ \times\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\,d^3xd^3vdmdedt-\\ -\frac{1}{c}\int ef(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)A_{\mu}u^{\mu}d^3xd^3vdmdedt+\\ +k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x+k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x,\end{gathered}\tag{1}$$

где c – скорость света, $u^0=c$ и $u^i=v^i$ $(i=1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0=ct$ и x^i $(i=1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu=0,1,2,3)$, $A_{\mu}(\boldsymbol{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)=\partial A_{\mu}(\boldsymbol{x},t)/\partial x^{\nu}-\partial A_{\nu}(\boldsymbol{x},t)/\partial x^{\mu}$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1=-\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2=-\frac{1}{16\pi c}$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_{μ}. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5–9, 19–21]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{gathered}k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=\\ =\int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}}}u^{\mu}u^{\nu}d^3vdmde-\\ -k_2\left(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}.\end{gathered}\tag{2}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в

[1] *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*

[*] *E-mail: vicveden@yahoo.com*

таком виде, видимо, в работах [9, 19–21]), второе (электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса) известно [1–2]. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [3–21]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e) d^3 v dm de. \quad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1–4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ-функции для одной частицы:

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e, t) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t)) \times \\ \times \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'(t)) \delta(m - m') \delta(e - e'). \end{gathered} \quad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1–4] выражения для всех слагаемых:

$$\begin{gathered} S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t) u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\boldsymbol{x}, t) u^\mu dt + \\ + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) \sqrt{-g} d^4 x. \end{gathered} \quad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1–4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

2. АНАЛИЗ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА (2)

Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия, рассматривалась, насколько нам известно, только в США. Обзор 1992 г. [10] по выводу уравнения Власова содержит пять принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то такая задача не ставилась [3, 4, 11], и уравнения постоянно теряли корень в первом слагаемом правой части уравнения (2). Таким образом, уравнения Власова–Эйнштейна оказались прекрасным тестом на схему вывода уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона [12–15], который, видимо, единственный такую задачу поставил и осознал ее важность. Однако уравнения Власова–Эйнштейна не поддались: схема вывода оказалась недостаточно простой. Наш подход, по сути, дает самый простой и прямой вывод уравнений электродинамики и общей теории относительности (ОТО), упрощая всю ОТО.

Мы получили кинетическую форму тензора энергии-импульса, но обычно используют его гидродинамическую форму, записывая ее в абстрактной форме [1–2]:

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = (\mathrm{p} + \mathrm{E}) \mathrm{U}^\mu \mathrm{U}^\nu + \mathrm{p} \mathrm{g}^{\mu\nu}.$$

Здесь p — давление, E — энергия, U — макроскопическая (гидродинамическая) скорость. Такое выражение появляется в кинетической теории из нерелятивистской формы первого слагаемого (2)

$$\int \mathrm{m} \mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{v}, \mathrm{m}, \mathrm{e}) \mathrm{u}^\mu \mathrm{u}^\nu \mathrm{d}^3 \mathrm{v} \mathrm{dm}.$$

Сравнение явной формулы (2) с этим выражением показывает, что такое выражение получается после гидродинамической подстановки в правую часть формулы (2)

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{v}, \mathrm{m}, \mathrm{e}) = \rho(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \mathrm{m}, \mathrm{e}) \delta(\mathrm{v} - \mathrm{V}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{e})),$$

где $\mathrm{U}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{e}) = (\mathrm{c}, \mathrm{V}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{e}))$, а δ — дельта-функция Дирака. Кроме того, появился хороший кандидат вместо лямбды Эйнштейна: $\frac{\mathrm{k}_2}{\mathrm{k}_1} \left(\mathrm{F}_{\alpha\beta} \mathrm{F}^{\alpha\beta}\right)$. Это означает, что лямбду можно положить равной нулю, а наблюдающееся ускоренное расширение вселенной обеспечивается энергией взаимодействия электромагнетизма и гравитации, что, может быть, и является темной энергией. Позже мы это проверим в слаборелятивистском и нерелятивистском вариантах. Плазмы во вселенной много (как солнечного ветра), и для нее электрические поля больше магнитных. Не исключено, что этим можно объяснить и темную материю: в масштабах галактики электромагнитные поля могут быть неоднородными, а в масштабах вселенной выглядят однородными. Введение лямбды Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни. Но сейчас эта лямбда стала основным способом объяснять ускоренное расширение вселенной. Избавиться от лямбды или получить ее естественно есть основная задача тех, кто объясняет темную энергию. Наш анализ тензора энергии-импульса показывает, что в качестве темной энергии может быть энергия взаимодействия гравитационного поля с другими полями, в первую очередь с электромагнитным. Проверим знак второго слагаемого в уравнении Эйнштейна (2) для компоненты 00. Покажем, что это знакоопределенная величина, что полностью согласуется с выражениями в классических учебниках [1–4] для случая метрики Минковского–Лоренца. Действительно, выражение

$$-2\mathrm{F}^{\beta 0}\mathrm{F}^{\alpha 0}\mathrm{g}_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{00}$$

достаточно проверить на знак для диагональной метрики, приводя в точке метрику к диагональному виду. Имеем для этого выражения в случае метрики $\mathrm{g}_{\pm^2}=\mathrm{diag}\,(\mathrm{g}_0,\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2,\mathrm{g}_3)$ следующее:

$$-g_0^{-1}\Sigma(\mathrm{F}_{ij}^2\,g_i^{-1}g_j^{-1})+g_0^{-2}\Sigma(F_{0i}^2 g_i^{-1})$$

Это выражение меньше нуля при $g_0>0, g_i<0$. Значит, это выражение вносит тот же вклад, что и материя, и не годится для кандидата вместо лямбды Эйнштейна, вообще говоря. Ниже мы в случае аналогов электростатики исследуем знак соответствующего выражения.

В принципе, можно рассматривать космологическую задачу и в общем случае, но выражения будут громоздкими, поэтому рассмотрим примеры специальных (слабо)релятивистских систем, обобщающих модель Милна–Маккри.

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S=-cm\int(\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2}+\frac{U}{c})\,dt-$$
$$-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с гамильтонианом [1–4]:

$$H(x,q)=c\sqrt{(mc)^2+q^2}+U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S=-c\int m(\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2}+U)f(x,p,t,m)d\boldsymbol{p}dmd\boldsymbol{x}dt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2d\boldsymbol{x}dt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей:

$$\Delta U=4\pi\gamma\int mf(t,x,q,m,e)\,dqdmde-\frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона–Якоби по схеме работ [16–21] и получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(v^i(\nabla W)\rho\right)=0\\ \dfrac{\partial W}{\partial t}+c\sqrt{(mc)^2+(\nabla W)^2}+U=0,\\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\rho dmde-\dfrac{c^2\Lambda}{2}\end{cases}$$

где $v^i(q)=\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=\dfrac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$.

Мы получили выражение для скорости, из которого видно хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской:

$$g_{\alpha\beta}=diag\left(1+\frac{2U}{c^2},-1,-1,-1\right).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень:

$$S=-cm\int\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2+2U}\,dt-$$
$$'t-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2d\boldsymbol{x}dt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H=-cp_0(x,q,t)=c\sqrt{((mc)^2+q^2)\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(v^i\left(\nabla W\right)\rho\right) = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{\left((mc)^2 + \left(\nabla W\right)^2\right)\left(1 + \dfrac{2U}{c^2}\right)} = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int \dfrac{m\rho\left(m,x,t\right)}{\sqrt{c^2 - \left(v(\nabla W)\right)^2 + U}} dm - \dfrac{c^2\Lambda}{2} \end{cases}$$

где $v^i\left(q\right) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{cq^i\sqrt{1 + \dfrac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$.

Мы получили снова замкнутую систему уравнений, из которой видно происхождение корня в правой части уравнения Эйнштейна, а также выражение для скорости, из которой видно хаббловское расширение. И возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

Пример 3. Темная энергия без лямбды Эйнштейна.

Теперь модифицируем нерелятивистское действие примера 1, добавив во втором слагаемом множителем даже не корень из определителя метрики, как это предписывается исходным релятивистским выражением (1), а произвольную функцию $\alpha(\mathrm{U})$:

$$S = \int\left[\frac{mv^2}{2} - e\eta - mU\right] f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e\right) \times \times d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmded + \frac{1}{8\pi} \times \int\left(\nabla\eta\right)^2 \alpha(\mathrm{U}) - - \frac{1}{8\pi\gamma}\int\left(\nabla U\right)^2 d\mathbf{x}dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int U dxdt. \tag{6}$$

Здесь поле η – поле темной энергии, e теперь ее заряд, α (U) – это функция, условия на которую мы хотим выяснить, чтобы получалось наблюдаемое в экспериментах ускоренное расширение. Варьируем по η и по U, получая дважды уравнения Пуассона с модификацией:

$$\begin{gathered} \alpha(\mathrm{U})\Delta\eta = -4\pi\int e\, f\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\, d\mathbf{v}dmde - (\nabla\eta, \nabla U)\frac{d\alpha}{dU} \\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\, f\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\, d\mathbf{v}dmde - \frac{1}{2}c\Lambda^2 - \frac{\gamma(\nabla\eta)^2}{2}\frac{d\alpha}{dU}. \end{gathered} \tag{7}$$

Мы видим, что появившееся слагаемое в правой части второго из уравнений (7) играет ту же роль, что и лямбда Эйнштейна при условии монотонного возрастания функции α (U). Такие же модификации можно предложить и в примерах 1 и 2. В случае электростатики функция

$$\alpha\left(\mathrm{U}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{U}{c^2}}}$$

монотонно убывает вместо монотонного возрастания, что согласуется с общим неравенством пункта 2. Эти модели могут быть полезными и при объяснении «искажений константы Хаббла» (Hubble constant tension, [25]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [3–15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнения гравитации, и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна была получена для скоростей [9] и для импульсов [19–21], что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона–Якоби. Здесь мы исследовали важные слаборелятивистские примеры [20–23] – обобщения моделей типа Милна–Маккри. В работах [19–21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где были выведена и обобщена модель Милна–Маккри [20–21]. На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна $\mathrm{U}\left(\mathrm{r}\right) = -\dfrac{\gamma}{\mathrm{r}} + \mathrm{ar}^2$ [24–25], где второе слагаемое связано с лямбда-членом Эйнштейна. Здесь мы исследовали тензор энергии-импульса и получили возможность описывать темную энергию и ускоренное расширение вселенной без лямбда-члена Эйнштейна: предложено три модели с различной степенью релятивизма. Представляет значительный интерес продолжить исследование предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слаборелятивистских приближений как аналитически и численно, так и в сравнении с экспериментами, в частности для описания космических напряжений [24–25] (Cosmic tension).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
3. *Choquet-Bruhat Y.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, University Press, 2015.
4. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН. 2013. Т. 47, С. 5–17.
8. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби // Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.
9. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Докл. РАН. 2020. Т. 495. С. 9–139.
10. *Huanchun Ye, Morrison P.J.* Action principles for the Vlasov equations // Phys Fluids B. 1992. Vol. 4. No. 4. P. 771–777.
11. *Rein G., Rendall A.D.* Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system // Ann. del'Inst. H. Poincarre, Physique Theorique. 1993. Vol. 59. P. 383–397.
12. *Kandrup H.E., Morrison P.J.* Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. Vol. 225. P. 114–166.
13. *Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J.* Theory and Applications of the Vlasov Equation // European Journal of Physics. D 69, 68 (3pp). 2015. March.
14. *Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C.* Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov–Einstein Systems // Physical Review. D 84, 024011 (11pp). 2011.
15. *Brizard A.J., Morrison P.J., Burby J.W., Guillebon de L., Vittot M.* Lifting of the Vlasov–Maxwell bracket by Lie-transform method // J. Plasma Phys. 2016. Vol. 82. 905820608. Cambridge University Press. doi:10.1017/S0022377816001161
16. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form) // Z. Phys. 1926. Vol. 40. P. 322–326.
17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998. 239с.
19. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 2021. Vol. 136. No. 670.
20. *Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свирщевский С.Р.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62:6. С. 1016–1029.
21. *Веденяпин В.В.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 504. С. 51–55.
22. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 1934. 5, 73.
23. *Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P.* BBGKY hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. Vol. 151. P. 318.
24. *Чернин А.Д.* Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
25. *Capozziello S., Gurzadyan V.G.* Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy // Eur. Phys. J. Plus. 2023. 138:184.

ON DERIVATION OF VLASOV–MAXWELL–EINSTEIN EQUATIONS FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, HAMILTON–JACOBI METHOD AND MILNE–MCCREE MODEL

V. V. Vedenyapin[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In classical texts equations for gravitation and electromagnetic fields are proposed without derivation of the right-hand sides [1–4]. Here we suggest the derivation of the right-hand sides and analyze momentum-energy tensor in the framework of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and Milne–McCree model. We propose new models of accelerated expansion of the Universe without Einstein lambda.

Keywords: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation