

УЧЕТ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ РАЗГОНЕ МОБИЛЬНОГО РОБОТА И ЕГО ДВИЖЕНИИ В РЕЖИМЕ ДРИФТА

© 2024 г. Член-корреспондент РАН С. А. Решмин^{1,*}, М. Т. Бектыбаева^{1,2,**}

Поступило: 14.09.2023 г.

После доработки: 01.11.2023 г.

Принято к публикации: 10.12.2023 г.

Решена задача об эффективном управлении тягой полноприводного колесного робота после резкого поворота из-за внезапного появления на пути протяженного препятствия. При этом предполагается, что в процессе управления корпус параллелен препятствию, а передние колеса выровнены. Требуется обеспечить разгон вдоль препятствия и одновременно избежать бокового столкновения с ним. В основу решения положен так называемый закон линейного тангенса, адаптированный к учету фазовых ограничений. На конечном интервале времени получена скорость вращения колес во время бокового движения в режиме дрифта и последующего разгона на грани проскальзывания по прямой, которая находится максимально близко к границе препятствия. Также приведена соответствующая траектория. Исследована зависимость развиваемой в конце маневра продольной скорости от начального расстояния до препятствия и времени маневра. Определены левосторонние пределы углового ускорения колес и мощности в конце участка движения с проскальзыванием. Проведено сравнение найденной траектории с некоторыми другими траекториями, состоящими из криволинейного и прямолинейного участков. В результате численных расчетов показано, что она более эффективна.

Ключевые слова: максимизация скорости, колесные системы, траекторная оптимизация, закон линейного тангенса

DOI: 10.31857/S2686954324010087, **EDN:** ZTSFXL

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассматривается задача оптимизации движения полноприводного колесного робота при резком изменении направления траектории из-за появления препятствия (стенки). Предполагается, что после резкого изменения ориентации корпуса сохраняется его боковое движение с проскальзыванием колес, однако корпус уже повернут в нужном направлении, угловое вращение корпуса вокруг вертикальной оси уже прекратилось, причем передние колеса выровнены, т.е. не повернуты относительно корпуса. Таким образом, есть возможность набирать продольную скорость, не изменяя направления колес, двигаясь сначала вбок в режиме дрифта. Проблема

состоит в том, что рядом расположено препятствие, столкновения с которым желательно избежать, при этом максимизируя продольную скорость. Результаты решения соответствующей задачи оптимального управления могут использоваться в алгоритмах управления быстрыми колесными роботами и беспилотными транспортными средствами, например во время их участия в соревнованиях.

Во многих работах рассматривается задача управления динамикой колесных роботов, движущихся по горизонтальной поверхности. Тяга создается за счет вращения ведущих колес и их взаимодействия с поверхностью в условиях сухого трения. При помощи аналитических и численных методов, использующих средства теоретической механики и теории управления, исследованы задачи траекторной оптимизации. Актуальность рассматриваемых задач обусловлена нынешним бурным развитием беспилотных моделей робототехнических систем.

В большинстве ранее опубликованных работ [1–6] задачи о движении механических систем

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*E-mail: reshmin@ipmnet.ru

**E-mail: madi8991@mail.ru

изучаются в рамках моделей либо кулонова трения, либо в неголономной постановке, либо при учете увода колес.

В последнее время появились работы, значительно уточняющие модели сил сухого трения и пригодные для расчета движения колесных транспортных средств и анализа нежелательных колебаний колес [7–10].

Заметим также, что шины с малым весом, состоящие из набора упругих элементов и металлических упругих сеток, используются при создании легких колесных роботов, планетоходов, лунных роверов. Допущения о невесомости колес иногда используются при анализе движения с учетом трения, например устойчивости и неустойчивости режимов с прямолинейным движением [9, 10]. Нежелательные эффекты потери тяги при интенсивном старте изучались в [11, 12].

Особо следует отметить исследования, проводимые на кафедре СМ10 “Колесные машины” МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством Г.О. Котиева. Некоторые из них посвящены вопросам снижения энергозатрат колесных машин при прямолинейном движении по горизонтальной поверхности [13], методика также подтверждена экспериментальным исследованием [14]. Другие направлены на оптимизацию тяги, в т.ч. автомобилей с большим числом колес, в сочетании с оптимизацией траекторий движения при совершении маневра. Ведутся опытно-конструкторские работы по созданию семейства колесных машин высокой проходимости [15].

Прикладные результаты теории оптимального управления, в т.ч. те, которые могут использоваться для оптимизации траекторий колесного робота, например закон линейного тангенса, можно найти в книгах [16, 17, 18]. Более детально закон линейного тангенса и его применение для обеспечения минимального расхода топлива при выведении спутника при помощи ракетного ускорителя рассмотрен в [19]. Анализ задачи с переменной реактивной тягой приведен в [20].

Новые результаты по оптимальному изменению ориентации двухмассовой системы за счет относительного движения составляющих систему тел получены в [21]. Управление осуществлялось путем изменения направления силы взаимодействия основного несущего тела и несомой материальной точки.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение управляемого объекта в горизонтальной плоскости (рис. 1). Он представляет собой колесную систему с четырьмя ведущими невесомыми колесами. Центр тяжести занижен и располагается на уровне плоскости, по которой происходит движение. Указанные предположения сделаны для того, чтобы исключить перераспределение сил нормальных реакций между колесами в процессе движения с ускорениями и при прикладывании крутящего момента к колесам. Расстояния от центра масс до всех колес одинаковые. Корпус не вращается вокруг вертикальной оси, передние колеса тоже. Управление направлением тяги происходит исключительно за счет изменения угловой скорости вращения колес. Для всех четырех колес она в каждый момент времени одинакова, то есть все колеса ведущие. При такой постановке, если пренебречь размерами корпуса, можно заменить управляемый объект материальной точкой, на которую действует управляющая, ограниченная по модулю сила.

Сила тяги F ограничена максимальной величиной силы трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона:

$$|F| \leq fF_N, \quad F_N = mg, \quad (2.1)$$

где f — коэффициент сухого трения, F_N — сила нормальной реакции, m — масса объекта, g — ускорение свободного падения. Из (2.1) следует ограничение на модуль возможного ускорения:

$$\left| \frac{F}{m} \right| \leq a, \quad a = fg.$$

Далее предполагаем, что движение происходит с проскальзыванием или на грани проскальзывания:

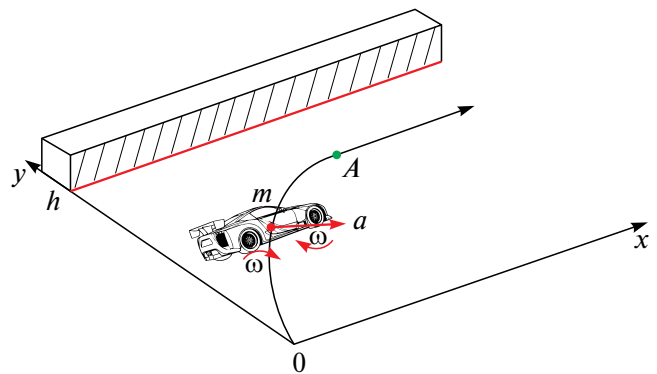


Рис. 1. Схема движения колесного объекта.

$$\left| \frac{F}{m} \right| = a.$$

При этом уравнения движения в горизонтальной плоскости в прямоугольной системе координат xu имеют вид

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u, \quad \dot{v}_y = a \sin u, \quad (2.2)$$

где u — угол, отсчитываемый от оси абсцисс, на который накладываем ограничения

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq u < 0 \quad \text{при} \quad v_y > 0, \\ u = 0 \quad \text{при} \quad v_y = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

считая кусочно-непрерывной функцией времени. Ситуация, когда $v_y < 0$, невозможна при положительной начальной боковой скорости v_{y0} . Ситуация, когда $0 < u < \pi$ при $v_y > 0$, соответствует нарастанию проекции скорости v_y , что невозможно. Ситуации, когда $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ при $v_y > 0$, а также когда $u = -\pi$ при $v_y = 0$, соответствуют вращению колес назад или их слишком медленному вращению вперед, что нецелесообразно.

Пусть заданы начальные координаты и начальные проекции скорости:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, \\ y(0) &= y_0 = 0, \\ v_x(0) &= v_{x0} = 0, \\ v_y(0) &= v_{y0} > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь нулевые значения координат и продольной скорости выбраны ради определенности. В фиксированный конечный момент T задано положительное значение координаты y , проекция скорости v_y считается нулевой:

$$y(T) = h > 0, \quad v_y(T) = 0, \quad (2.5)$$

величины $x(T)$, $v_x(T)$ не заданы. Считаем, что время процесса T может быть достаточно велико. Это условие соответствует маневру перед протяженным препятствием. Сформулируем две задачи управления.

Задача 1. На основе закона линейного тангенса [16] требуется построить эффективное

управление $u(t)$, которое переводит систему (2.2) за время T из начального состояния (2.4) в конечное состояние (2.5) и одновременно максимизирует, насколько это возможно, проекцию скорости v_x :

$$v_x(T) \rightarrow \max.$$

При этом требуется учесть смешанные ограничения (2.3) и фазовое ограничение

$$0 \leq y(t) \leq h, \quad (2.6)$$

а также указать такие конкретные множества значений T и v_{y0} , при которых поставленная задача имеет решение.

Задача 2. Управление и соответствующую траекторию, полученные при решении задачи 1, нужно при разных значениях T сравнить по эффективности с другими альтернативными стратегиями разгона, у которых такое же время окончания T , но терминальная координата $y(T)$ не обязательно равна h .

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Во-первых, предполагается, что начальная скорость v_{y0} не слишком большая:

$$0 < v_{y0} \leq \sqrt{2ah}. \quad (3.1)$$

Во-вторых, предполагается, что есть запас по времени маневра:

$$\begin{aligned} T > T_{\min} &= \frac{h - \frac{a}{2}\tau^2}{v_{y0}} + \tau = \\ &= \frac{h}{v_{y0}} + \frac{v_{y0}}{2a}, \quad \tau = \frac{v_{y0}}{a}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эти условия гарантируют, что найдутся законы управления, позволяющие избежать столкновения с препятствием, т.е. когда в процессе управления будет выполнено фазовое ограничение (2.6). Величина $T_{\min}$, стоящая в правой части неравенства (3.2), найдена из анализа предельного случая с минимально возможным временем движения. Пусть $T \approx T_{\min}$. Соответствующее управление состоит из двух этапов. Сначала колеса вращаются очень быстро, так что бокового торможения практически нет, система разгоняется с ускорением приближенно равным a вдоль прямой параллельной препятствию ($u \approx 0$).

Потом колеса вращаются с постоянной угловой скоростью v_x / R , при этом разгона нет, боковое торможение постоянно и с максимальным по модулю ускорением равным $-a$ ($u = -\pi / 2$). Смена режимов вращения происходит мгновенно, примерно в момент $T_{\min} - \tau$.

4. ЗАКОН ЛИНЕЙНОГО ТАНГЕНСА

При построении решения в задаче 1 сначала не будем принимать во внимание ограничения (2.3) и (2.6). Пусть управление выбрано в соответствии с так называемым законом линейного тангенса [16]:

$$u(t) = \arctg(-Ct + \operatorname{tg} u_0). \quad (4.1)$$

Здесь C и u_0 — некоторые постоянные, подлежащие определению. Как известно ([16]), управление вида (4.1) является оптимальным в аналогичной задаче без ограничений. Подставляя (4.1) в уравнения движения (2.2) и интегрируя их, получим

$$v_y = \frac{a}{C}(\sec u_0 - \sec u) + v_{y0}, \quad (4.2)$$

$$y = \frac{a}{2C^2} \left[(\operatorname{tg} u_0 - \operatorname{tg} u) \sec u_0 - (\sec u_0 - \sec u) \operatorname{tg} u - \ln \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u} \right] + v_{y0}t + y_0. \quad (4.3)$$

Формулы (4.2), (4.3) являются обобщением аналогичных формул из книги [16] на случай ненулевой начальной скорости. Если константы интегрирования C , u_0 связаны соотношением

$$C = \frac{2a(aT \sin u_0 + v_{y0})}{\cos u_0(a^2T^2 - v_{y0}^2)}, \quad (4.4)$$

то второе условие (2.5) будет автоматически выполнено. Отметим, что формула (4.4) использовалась ранее в [22, 23] в случае ненулевой начальной скорости. Применим теперь эту формулу для учета фазового ограничения.

5. НАХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ T , ПРИ ПРЕВЫШЕНИИ КОТОРОГО ПРОИСХОДИТ НАЕЗД НА ПРЕПЯТСТВИЕ

Если оптимальная траектория, учитывающая только терминальные условия (2.5), выходит за

ограничение (2.6), то в области $y(t) \geq h$ на траектории существуют две точки, где скорость v_y обращается в нуль. В одной из них координата y принимает максимальное значение, а в другой (терминальной) $y = h$. Между этими точками скорость v_y отрицательна. Значит, существует третья промежуточная точка, соответствующая минимуму скорости, в которой ее производная равна нулю: $\dot{v}_y = 0$, а следовательно, $u = 0$ в соответствии с последним уравнением (2.2).

Критическое значение времени процесса T , при превышении которого происходит наезд на препятствие, будем определять из условия

$$u(T) = 0, \quad (5.1)$$

из которого следует также, что

$$\operatorname{tg} u(T) = 0, \quad \sec u(T) = 1.$$

В этом случае первое условие (2.5) принимает вид:

$$\frac{a}{2C^2} [\operatorname{tg} u_0 \sec u_0 - \ln(\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0)] + v_{y0}T = h. \quad (5.2)$$

Здесь использовано выражение (4.3) для y и начальное условие $y_0 = 0$. Кроме того, из (4.1), (5.1) следует дополнительная связь между константами интегрирования C , u_0 и временем процесса T :

$$C = \frac{\operatorname{tg} u_0}{T}. \quad (5.3)$$

Отметим, что формула (5.3) появляется также в [19] при решении задачи оптимального управления с нефиксированным временем окончания.

Введем безразмерные обозначения

$$z = \frac{aT}{v_{y0}}, \quad (z \geq 1), \quad \alpha = \frac{2ah}{v_{y0}^2}, \quad (\alpha \geq 1). \quad (5.4)$$

Из (5.3) и (4.4) получаем выражения для необходимых тригонометрических функций:

$$\operatorname{tg} u_0 = -\frac{2z}{z^2 - 1}, \quad \sec u_0 = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}. \quad (5.5)$$

Подставим соотношения (5.3), (5.5) в (5.2). После преобразований получим трансцендентное относительно z уравнение:

$$\frac{z(z^2 - 3)}{2} + \left(\frac{z^2 - 1}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \alpha = 0. \quad (5.6)$$

Его следует решать численно. В итоге может быть найден корень z_* и соответствующее критическое значение $T_* = \frac{z_* v_{y0}}{a}$.

Докажем существование и единственность корня уравнения (5.6), а также укажем диапазон, в котором его нужно искать. Обозначим через $F(z)$ левую часть этого равенства и определим знак функции $F(z)$ при $z \rightarrow 1$ (т.е. на левом конце рассматриваемого интервала значений):

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \alpha - 1 \geq 0. \quad (5.7)$$

Подсчитаем и проанализируем производную:

$$F'(z) = (z^2 - 1) \left(2 + z \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \right) < 0, \quad (5.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F'(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} F'(z) = -\frac{2}{3}.$$

Здесь при определении знака производной при $z \rightarrow 1$ использован тот факт, что в выражении (5.8) первый множитель положительный, а второй отрицательный и стремится к $-\infty$.

Таким образом, из оценок (5.7) и (5.8) следует, что корень уравнения (5.6) существует. Он единственный, причем

$$z_* > 1 \text{ при } \alpha > 1,$$

как и требовалось в (5.4).

Пусть $\bar{z}$ — оценка сверху для z_* . Анализ показывает, что

$$F(z) - \alpha + \frac{2}{3}z < 0 \text{ при } z > 1.$$

Поэтому в качестве оценки можно выбрать

$$\bar{z} = \frac{3}{2}\alpha. \quad (5.9)$$

В результате указан отрезок, на котором следует искать корень z_* уравнения (5.6):

$$1 < z_* < \frac{3}{2}\alpha \text{ при } \alpha > 1.$$

Наглядно зависимость показана на рис. 2. При больших α решение z_* приближается к правому концу интервала:

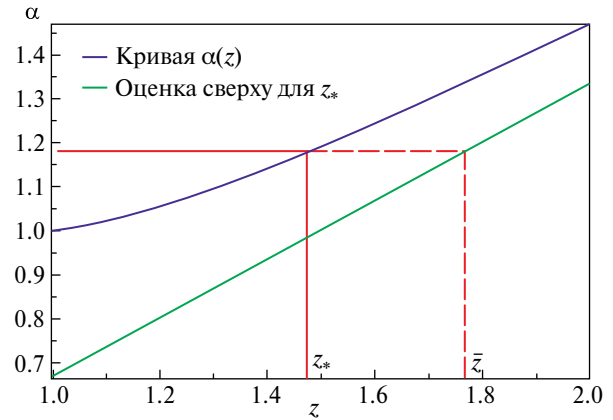


Рис. 2. График зависимости $\alpha(z)$.

$$z_* \approx \frac{3}{2}\alpha \text{ при } \alpha \rightarrow +\infty,$$

т.к.

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(F(z) - \alpha + \frac{2}{3}z \right) = 0.$$

Из проведенного анализа следует, что при уменьшении параметра α в уравнении (5.6) величина z_* уменьшается. То есть при уменьшении расстояния до препятствия h критическое время маневра T_* тоже уменьшается (см. (5.4)).

6. ВЫБОР СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И АНАЛИЗ ЕГО СВОЙСТВ И ЭФФЕКТИВНОСТИ

При $T = T_*$ соответствующая траектория, использующая закон линейного тангенса (4.1), оптимальна в задаче 1 (так же, как и в аналогичной задаче без ограничений [16]).

При $T < T_*$ выхода за ограничение (2.6) нет на всем рассматриваемом отрезке времени $0 \leq t \leq T$. Скорость v_y обращается в нуль только в конце процесса. Таким образом, ограничение (2.6) выполнено автоматически. Однако, как показано далее, ограничение (2.3) не всегда выполнено. Поэтому далее везде считаем, что $T \geq T_*$.

При $T > T_*$ выхода за ограничение (2.6) нет только на начальном отрезке времени $0 \leq t \leq t_*$ (скорее всего, в рассматриваемом случае всегда $t_* < T_*$, см. рис. 3), но ожидается нежелательный выход за это ограничение на заключительном отрезке времени $t_* < t \leq T$. Однако, чтобы избежать этого, закон управления (4.1) может быть модифицирован следующим образом. На

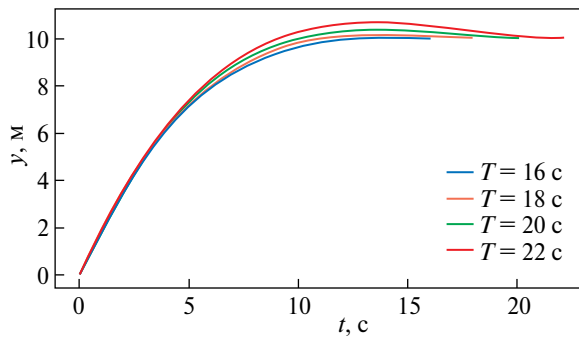


Рис. 3. Зависимость $y(t)$ для закона линейного тангенса при разных $T > T_*$.

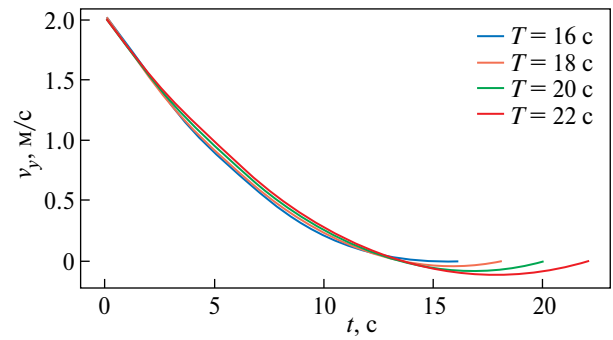


Рис. 4. Зависимость $v_y(t)$ для закона линейного тангенса при разных $T > T_*$.

отрезке времени $0 < t \leq T_*$ управление задается согласно (4.1), причем в соответствующих формулах (2.5), (4.4) время окончания процесса выбираем равным T_* , а не T . Здесь задаем закон управления по линейному тангенсу. Далее на интервале $T_* < t \leq T$ полагаем $u(t) \equiv 0$. Можно показать, что такое модифицированное управление является эффективным. Скорее всего, оно оптимально в задаче 1 (см. [19]).

Результаты расчетов. Установим следующие параметры рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} f &= 0.5098581065, g = 9.80665 \text{ м/с}^2, \\ a &= 5 \text{ м/с}^2, h = 10 \text{ м}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В соответствии с (3.1) выберем начальную вертикальную составляющую скорости:

$$0 < v_{y0} \leq 10,$$

например, $v_{y0} = 2 \text{ м/с}$. Проверим (3.2) и рассчитаем критическое значение длительности процесса:

$$\begin{aligned} T = 16 \text{ с: } v_{x_1}(T) &= 79.96443807, \quad v_{x_2}(T) = 79.96442926; \\ T = 18 \text{ с: } v_{x_1}(T) &= 89.96459481, \quad v_{x_2}(T) = 89.96442926; \\ T = 20 \text{ с: } v_{x_1}(T) &= 99.96498697, \quad v_{x_2}(T) = 99.96442926; \\ T = 22 \text{ с: } v_{x_1}(T) &= 109.96557807, \quad v_{x_2}(T) = 109.96442926. \end{aligned}$$

Видно, что при выбранных параметрах значение развиваемой скорости незначительно снизилось, но стали учитываться фазовые ограничения (2.6), а также смешанные ограничения (2.3).

Аналогичное моделирование движения было проведено для других начальных параметров

$$\begin{aligned} T &> T_{\min} = 5.2 \text{ с}, \\ T_* &= 14.99573168 \text{ с}. \end{aligned}$$

Для подтверждения результатов разд. 5 приведем графики $y(t)$ (рис. 3) для нескольких случаев, когда $T > T_*$, а управление использует обычный закон линейного тангенса. Видно, что, начиная с некоторых значений текущего времени t , происходит нарушение условия (2.6).

Соответственно этим траекториям приведем график зависимости боковой скорости от времени на рис. 4: появляются две точки, в которых v_y обращается в нуль. Между ними боковая скорость отрицательна, что противоречит смешанному ограничению (2.3).

Для соблюдения ограничений в каждый момент времени преобразуем управление так, как было предложено ранее, и построим новый график (рис. 5), для которого в каждый момент времени выполняется условие (2.6).

Далее остается сравнить значения функционалов для двух управлений в конечный момент времени T , подтвердив тем самым эффективность нового управления:

(рис. 6), в частности при варьировании расстояния до препятствия h и другом значении начальной скорости $v_{y0} = 5 \text{ м/с}$ при общей продолжительности движения $T = 10 \text{ с}$.

В таблице 1 отражены основные параметры для рис. 6, в частности значение функционала

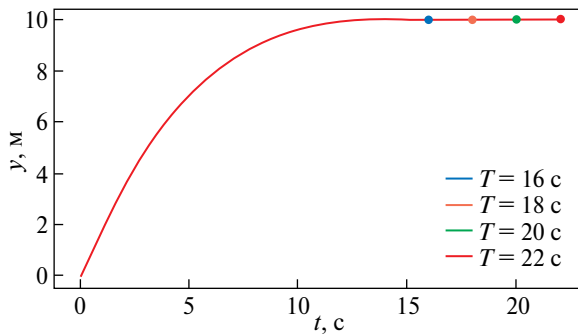


Рис. 5. Зависимость $y(t)$ для модифицированного управления при разных $T > T_*$.

в конечный момент времени T : с уменьшением расстояния до препятствия также уменьшается значение $v_x(T)$. Это связано с увеличением части ресурсов управления, которые стали расходоваться на подавление бокового движения, а не на разгон.

Перейдем к решению задачи 2. Представим результаты проверки эффективности траектории, найденной в разд. 5, 6 при решении задачи 1. Для нее полагаем $h = H = 10$ м, $v_{y0} = 5$ м/с, $T = T_*(H) = 5.93229614$ с. Сравнение этой траектории производилось с альтернативными траекториями, состоящими из двух участков: на первом применялось управление по линейному тангенсу (см. разд. 4), на втором управление выбиралось нулевым. Смена режимов происходила в момент τ . Оказалось, что не всегда управления с такой структурой являются допустимыми (согласно постановке задачи 1). Поэтому в процессе сравнения на это обращалось внимание. Таблица 2 отражает параметры, используемые при построении сравниваемых управлений. Общее время движения для всех траекторий $T = T_*(H)$ и общая начальная боковая скорость $v_{y0} = 5$ м/с заданы, при этом для каждой выбранной высоты $h \leq H = 10$ м менялся момент времени τ .

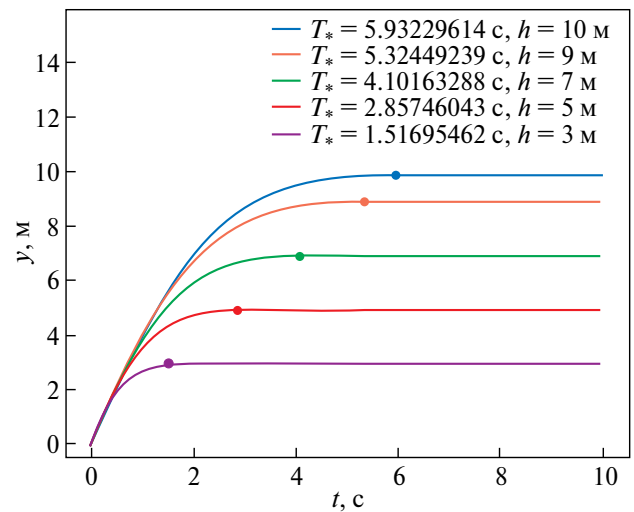


Рис. 6. Зависимость $y(t)$ для модифицированного управления при $T > T_*(h)$.

Он соответствует окончанию криволинейного участка траектории, после которого на отрезке $[\tau, T_*(H)]$ происходит равноускоренное движение вдоль оси x . Обратим внимание на строку таблицы, выделенную серым: она соответствует траектории, не удовлетворяющей ограничению (2.3), т.к. постоянная u_0 для нее оказалась положительна. Строка, соответствующая самой эффективной траектории, обведена более толстой линией.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕС И МОЩНОСТИ

Пусть R — радиус колеса, ω — угловая скорость его вращения. Выберем $\bar{T} = \frac{\bar{z}v_{y0}}{a}$, где значение $\bar{z}$ найдено в (5.9), в качестве момента окончания процесса разгона. Управление разделим на два этапа: до и после критического значения T_* . Сначала движение происходит по закону линейного тангенса, потом равноускоренно

Таблица 1. Основные параметры для модифицированного управления

h , м	T_* , с	u_0 , рад	C , с ⁻¹	$v_x(T)$, м/с
10	5.93229614	– 0.3339976	– 0.05849297	49.43487119
9	5.32449239	– 0.37129738	– 0.07312555	49.36947765
7	4.10163288	– 0.47827990	– 0.12639514	49.17739959
5	2.85746042	– 0.67328033	– 0.27913156	48.80327871
3	1.51695462	– 1.16565269	– 1.53710023	47.56404479

Таблица 2. Основные параметры для сравниваемых управлений

$h, \text{м}$	$T_*, \text{с}$	$\tau, \text{с}$	$u_0, \text{рад}$	$C, \text{с}^{-1}$	$v_x(T), \text{м/с}$
10	5.93229614	3	-0.03571600	-0.27695793	28.46491934
		4	-0.25268026	$-2.75412149 \cdot 10^{-9}$	29.02639745
		T_*	-0.33399764	-0.05849297	29.09635191
9	5.32449239	3	-0.11974753	0.16156079	28.68337465
		4	-0.32935972	-0.04139132	29.00572167
		T_*	-0.37129738	-0.07312555	29.03095837
7	4.10163288	2	0.32707602	1.15633617	27.29226208
		3	-0.40966564	-0.05312268	28.79034689
		T_*	-0.47827990	-0.12639514	28.83888031

вдоль направления x с максимальной тягой и на грани проскальзывания.

Найдем угловую скорость вращения колес. При движении с проскальзыванием (по криволинейному участку) выполнены равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u &= -\frac{v_y}{\omega R - v_x}, \quad (0 \leq t \leq T_*), \\ v_x &= \frac{a}{C} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u} \right). \end{aligned}$$

Здесь числитель в верхней формуле соответствует проекции скорости проскальзывания при боковом торможении, знаменатель – проекции скорости проскальзывания при продольном разгоне; формула для продольной скорости v_x была получена в [16] при исследовании систем с ограниченной тягой. Отсюда следует

$$\omega = \frac{1}{R} \left(v_x - \frac{v_y}{\operatorname{tg} u} \right), \quad (0 \leq t \leq T_*). \quad (7.1)$$

Причем имеют место левосторонние пределы:

$$\lim_{t \rightarrow T_* - 0} \omega = \frac{v_x(T_*)}{R}, \quad (7.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow T_* - 0} \dot{\omega} = \frac{a}{2R}. \quad (7.3)$$

Угловая скорость на втором участке находится по формуле

$$\omega = \frac{v_x(T_*) + a(t - T_*)}{R}, \quad (T_* < t \leq \bar{T}). \quad (7.4)$$

Непрерывность функции $\omega(t)$ на стыке двух участков следует из (7.2), (7.4). Однако отсутствует гладкость. При прохождении времени через пороговое значение T_* угловая скорость $\omega(t)$, в соответствии с (7.3), (7.4), начинает расти в два раза быстрее.

Перейдем к анализу и подсчету подводимой приводом мощности P и ее части P_x , которая расходуется на разгон вдоль оси x . Приведем формулы для указанных величин:

$$P = F \cos u \omega R = m a \cos u \omega R, \quad (7.5)$$

$$P_x = F \cos u v_x = m a \cos u v_x. \quad (7.6)$$

Очевидно, что разность $P - P_x$ соответствует части мощности, расходуемой на диссипацию, вызванную компонентой силы трения F , действующей по оси x . Полная мощность не является гладкой функцией при $t = T_*$. Используя (7.1), (7.4), (7.5) находим левосторонний и правосторонний пределы:

$$\lim_{t \rightarrow T_* - 0} \dot{P} = \frac{ma^2}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow T_* + 0} \dot{P} = ma^2.$$

Таким образом, оказалось, что отношение полученных пределов тоже равно двум (как и в случае угловой скорости), что не является заранее очевидным фактом.

Результаты расчетов. Для определенности установим те же параметры f, g, a , что и в (6.1). Для начальной скорости $v_{y0} = 2 \text{ м/с}$, радиуса колеса $R = 0.4 \text{ м}$ и разных значений h на рис. 7 построены графики, соответствующие зависимостям (7.1) и (7.4).

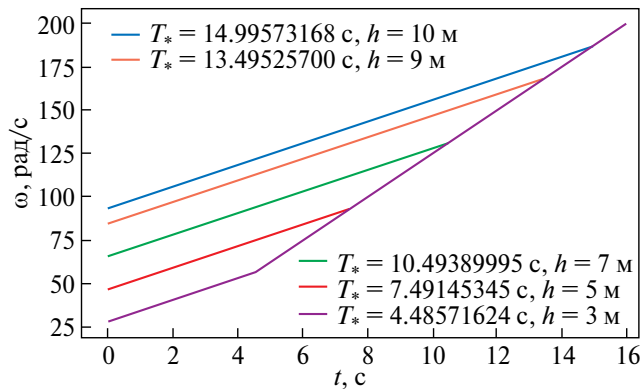


Рис. 7. Зависимость $\omega(t)$ для модифицированного управления при $T > T_*(h)$.

При всех значениях h слева к точкам изгиба, где $t = T_*(h)$, подходят кривые под одним и тем же углом α , а справа подходят прямые с одинако-

$$\lim_{t \rightarrow T_*^-} \dot{\omega} = \frac{a}{2R} = \tan \alpha = 6.25, \quad \lim_{t \rightarrow T_*^+} \dot{\omega} = \frac{a}{R} = \tan \beta = 12.5.$$

При всех t выражение для отношения мощностей (7.5), (7.6) выглядит так:

$$\frac{P_x}{P} = \frac{ma \cos u \cdot v_x}{ma \cos u \cdot \omega R} = \frac{v_x}{\omega R}.$$

Эта функция показана на рис. 8. Очевидно, что на втором участке вся мощность расходуется на увеличение кинетической энергии движения объекта.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача эффективного управления колесным роботом при скоростном маневре с проскальзыванием ведущих колес с целью уклонения от протяженного препятствия при его внезапном появлении и при одновременном наборе скорости робота. Предложена модификация оптимального управления по закону линейного тангенса, которая помогает на всем участке времени избежать столкновения с препятствием. Обнаружен эффект скачкообразного изменения темпа роста угловой скорости вращения ведущих колес при переходе от движения в режиме дрефта к прямолинейному равноускоренному движению вдоль препятствия. Рассчитаны энергетические характеристики привода объекта. При этом на первом участке модифицированного управления присутствуют потери энергии из-за неизбежного проскальзывания колес, на втором участке вся мощность расходуется только на увеличение

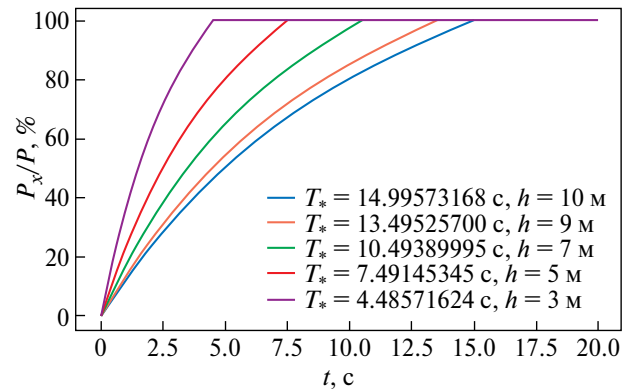


Рис. 8. Зависимость отношения части мощности, связанной с разгоном вдоль оси x , к полной мощности.

вым наклоном β , которые не совпадают между собой, но визуальнo неразличимы:

кинетической энергии, что соответствует прямолинейному разгону без проскальзывания. Полученные результаты могут иметь приложение для построения алгоритмов безопасного и эффективного управления колесными робототехническими системами в условиях сухого трения и другими системами с ограниченной тягой.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в ИПМех РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А. Избранные задачи неголономной механики. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 289 с.
2. Девянин Е.А. О движении колесных роботов / Доклады научной школы-конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы». М., 1998. С. 169–200.
3. Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.
4. Мартыненко Ю.Г., Ленский А.В., Кобрин А.И. Декомпозиция задачи управления мобильным одноколесным роботом // Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар / Сб. работ под ред. А.В. Борисова и др. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 205–209.

5. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
6. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
7. Журавлев В.Ф. О плоских автоколебаниях колеса на консольной подвеске // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 3–8.
8. Журавлев В.Ф., Климов Д.М., Плотников П.К. Новая модель шимми // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 13–23.
9. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О колебаниях колесного экипажа при наличии трения // ДАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 627–630.
10. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О неустойчивости экипажа в вертикальной плоскости при прямолинейном движении с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 3–17.
11. Решмин С.А. Анализ условий потери тяги транспортного средства при интенсивном старте // Изв. РАН. ТИСУ. 2019. № 3. С. 24–33. DOI 10.1134/S000233881903017X
12. Решмин С.А. Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // ДАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 289–293. DOI 10.31857/S0869-56524843289-293
13. Бутарович Д.О., Косицын Б.Б., Котиев Г.О. Метод разработки энергоэффективного закона управления электробусом при движении по городскому маршруту // Труды НАМИ. 2017. № 2. С. 16–27.
14. Косицын Б.Б. Экспериментальное исследование энергоэффективного закона управления движением электробуса на городском маршруте // Журнал автомобильных инженеров. 2017. № 5. С. 15–23.
15. Косицын Б.Б., Чжэн Х., Газизуллин Р.Л. Модернизация управляющей и измерительной систем стенда “Грунтовый канал” и разработка математической модели движения колеса в условиях стенда // Труды НАМИ. 2021. № 1. С. 25–34. DOI 10.51187/0135-3152-2021-1-25-34
16. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
17. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
18. Деменков Н.П. Оптимальное управление в классическом вариационном исчислении. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 133 с.
19. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63. № 1. С. 5–32.
20. Исаев В.К. Принцип максимума Л.С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автомат. и телемех. 1961. Т. 22. Вып. 8. С. 986–1001.
21. Розенблат Г.М. Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99. DOI 10.31857/S2686954322040154
22. Бектыбаева М.Т., Решмин С.А. Методика решения задач оптимального управления механическими системами при ограничении на модуль управляющей силы // Modern European Researches. 2023. № 1 (Т. 1). С. 38–44.
23. Решмин С.А. Оптимальное управление силой тяги при скоростном маневрировании в условиях сухого трения // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 604–617.

ACCOUNTING FOR PHASE LIMITATIONS DURING INTENSE ACCELERATION OF A MOBILE ROBOT AND ITS MOTION IN DRIFT MODE

Corresponding Member of RAS S. A. Reshmin^a, M. T. Bektybaeva^{a, b}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *RUDN University, Moscow, Russian Federation*

The problem of effectively controlling the traction of an all-wheel drive wheeled robot after a sharp turn due to the sudden appearance of a long obstacle on the way has been solved. It is assumed that during steering the body is parallel to the obstacle and the front wheels are aligned. It is required to ensure acceleration along the obstacle and at the same time avoid a side collision with it. The solution is based on the so-called linear tangent law, adapted to consider phase restrictions. At a finite time interval, the speed of wheel rotation was obtained during lateral movement in drift mode and subsequent acceleration on the verge of slipping along a straight line, which is as close as possible to the boundary of the obstacle. The corresponding trajectory is also shown. The dependence of the longitudinal speed developed at the end of the maneuver on the initial distance to the obstacle and the time of the maneuver was studied. The left-side limits of wheel angular acceleration and power at the end of the sliding section are determined. The found trajectory is compared with some other trajectories consisting of a curved and straight section. As a result of numerical calculations, it is shown that it is more effective.

Keywords: velocity maximization, wheel systems, trajectory optimization, linear tangent law