

АЛГЕБРЫ РАМОНА, НЕВЁ–ШВАРЦА И УЗКИЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

© 2024 г. Д. В. Миллионщиков^{1, *}, Ф. И. Покровский^{2, **}

Представлено академиком С.П. Новиковым

Получено 11.11.2023 г.

После доработки 28.11.2023 г.

Принято к публикации 12.12.2023 г.

Построено два однопараметрических семейства узких по Зельманову и Шалеву положительно градуированных супералгебр Ли, порожденных двумя элементами и двумя соотношениями. Первое семейство содержит положительную часть R^+ алгебры Рамона, второе – положительную часть NS^+ алгебры Невё–Шварца. Результаты статьи обобщают на случай супералгебр Ли теорему Бенуа о задании положительной части алгебры Витта образующими и соотношениями.

Ключевые слова: супералгебра Ли, положительная градуировка, узкие алгебры, центральное расширение, алгебра Рамона, алгебра Невё–Шварца

DOI: 10.31857/S2686954324010064, **EDN:** ZTSTDA

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Супералгеброй Ли $\mathfrak{g}$ будем называть комплексное (вещественное) векторное пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, разложенное в прямую сумму двух своих подпространств $\mathfrak{g}_0$ (подпространство четных элементов) и $\mathfrak{g}_1$ (подпространство нечетных элементов), снабженное билинейным умножением $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, называемым суперкоммутатором и удовлетворяющим свойствам

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}] &\subset \mathfrak{g}_{\bar{i}+\bar{j} \pmod{2}}, \bar{i}, \bar{j} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}, \\ [x, y] &= -(-1)^{\bar{i}\bar{j}} [y, x], x \in \\ &\in \mathfrak{g}_{\bar{i}}, y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}, \bar{i}, \bar{j} \in \{0, 1\}, \\ (-1)^{\bar{i}\bar{k}} [[x, y], z] &+ (-1)^{\bar{k}\bar{j}} [[y, z], x] + \\ &+ (-1)^{\bar{j}\bar{i}} [[z, x], y] = 0, \\ x \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}, y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}, z \in \mathfrak{g}_{\bar{k}}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} &\in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ограничив суперкоммутатор на четную часть $\mathfrak{g}_0$ супералгебры Ли, мы получим обычную алгебру Ли.

В данной статье мы рассматриваем свойства двух важных примеров бесконечномерных градуированных супералгебр Ли, играющих фундаментальную роль в физической теории суперсимметрий: мы говорим об алгебрах Рамона R и Невё–Шварца NS , которые являются супераналогами алгебры Вирасоро. Обе эти супералгебры Ли могут быть определены как линейные оболочки четных базисных элементов $L_i, i \in \mathbb{Z}$, и нечетных G_r , а также четного центрального элемента C , удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [L_i, C] &= 0, [G_r, C] = 0, \\ [L_i, L_j] &= (i - j)L_{i+j} + \frac{i^3 - i}{12} \delta_{i+j, 0} C, \\ [L_i, G_r] &= \left(\frac{i}{2} - r \right) G_{r+i}, \\ [G_r, G_s] &= 2L_{r+s} + \frac{1}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s, 0} C. \end{aligned} \quad (2)$$

¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: dmitry.millionschikov@math.msu.ru

**E-mail: fedya-57@yandex.ru

1. Алгебра Рамона R отвечает случаю, когда индексы s элементов G_s являются целыми числами $\dots, G_{-2}, G_{-1}, G_0, G_1, G_2, \dots$.

2. Алгебра Невё–Шварца NS соответствует случаю, когда индексы s нечетных элемен-

тов G_s являются т.н. полуцелыми числами:
 $\dots, G_{\frac{3}{2}}, G_{\frac{1}{2}}, G_1, G_3, \dots$

Четные части R_0 и NS_0 этих двух супералгебр Ли изоморфны алгебре Вирасоро Vir .

(Супер)алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется $\mathbb{N}$ -градуированной, если существует ее разложение в прямую сумму линейных подпространств $\mathfrak{g}_i$, таких, что

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_i, [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, i, j \in \mathbb{N}.$$

Мы в случае супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ будем предполагать, что каждое однородное подпространство $\mathfrak{g}_i$ раскладывается в прямую сумму четного и нечетного подпространств

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_i &= \mathfrak{g}_{(\bar{0}, i)} \oplus \mathfrak{g}_{(\bar{1}, i)}, \mathfrak{g}_{(\bar{0}, i)} = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{(\bar{1}, i)} = \\ &= \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Положительно градуированная (супер)алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_i$ называется (супер)алгеброй Ли ширины d , если найдется такое d (наименьшее с таким свойством), что $\dim \mathfrak{g}_i \leq d, \forall i \in \mathbb{N}$ [9].

Приведем три примера бесконечномерных алгебр Ли ширины один.

- 1) $m_0 : [e_i, e_i] = e_{i+1}, \forall i \geq 2;$
- 2) $m_2 : \begin{cases} [e_i, e_i] = e_{i+1}, i \geq 2, \\ [e_2, e_j] = e_{j+2}, j \geq 3. \end{cases}$
- 3) $W^+ : [e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{N},$

Алгебра W^+ является положительной частью алгебры Витта W . В 1995 г. Бенуа, отвечая на вопрос Милнора [8] о существовании полной инвариантной аффинной структуры на нильпотентной группе Ли, в качестве промежуточного результата доказал интересную теорему, характеризующую жесткость положительной части алгебры Витта W^+ и алгебры m_2 . Этот результат также близок к теоремам Зельманова и Шалева [9] и Фиаловски [2]. Следуя Зельманову и Шалеву [9], мы будем называть узкими (супер)алгебры Ли ширины один или два.

Теорема 1 (Бенуа [1]). Рассмотрим однопараметрическое семейство алгебр Ли $\mathfrak{a}_r$, заданных двумя образующими e_1 и e_2 и двумя соотношениями

$$\begin{aligned} [e_2, [e_1, e_2]] &= [e_1, [e_1, [e_1, e_2]]], \\ [e_2, [e_2, [e_1, e_2]]] &= r[e_1, [e_1, [e_1, [e_1, e_2]]]], \end{aligned} \quad (4)$$

где r обозначает произвольное комплексное (вещественное) число.

Если $r \neq \frac{9}{10}, 1$, то $\mathfrak{a}_r$ является $\mathbb{N}$ -градуированной конечномерной алгеброй Ли.

1. Пусть $r = \frac{9}{10}$, тогда $\mathfrak{a}_r$ изоморфна положительной части W^+ алгебры Витта.

2. Пусть $r = 1$, тогда $\mathfrak{a}_r \cong m_2$.

3. Пусть $r \neq 0, \frac{9}{10}, 1, 2, 3$, тогда $\mathfrak{a}_r$ является 11-мерной положительно градуированной филиформной алгеброй Ли ширины один.

Филиформными называются нильпотентные конечномерные алгебры Ли $\mathfrak{g}$, имеющие максимально возможный для их размерности индекс нильпотентности $s = \dim \mathfrak{g} - 1$. Позднее было установлено, что случай $r = 3$ ведет к восьмимерной филиформной алгебре Ли, а случаи $r = 0, 2$ соответствуют двум различным 10-мерным филиформным алгебрам Ли [7].

$\mathbb{N}$ -градуированная (супер)алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ называется естественно градуированной, если $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, i \in \mathbb{N}$. В частности, естественно градуированная (супер)алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ порождается своей первой однородной компонентой $\mathfrak{g}_1$, которая, тем самым, не менее чем двумерна (если $\dim \mathfrak{g} > 2$). Градуировка называется естественной, т.к. $\mathfrak{g}$ изоморфна своей ассоциированной градуированной (супер)алгебре Ли $gr \mathfrak{g}$ относительно фильтрации идеалами $\mathfrak{g}^k$ нижнего центрального ряда. Несложно видеть, что W^+ и m_2 не допускают естественных градуировок, в отличие от m_0 .

Определим бесконечномерную супералгебру Ли $\mathfrak{M}_2$ с помощью бесконечного базиса $e_1, e_2, e_3, \dots$ четной части $(\mathfrak{M}_2)_{\bar{0}}$, базиса $f_1, f_2, f_3, \dots$ нечетной части $(\mathfrak{M}_2)_{\bar{1}}$ и коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [e_1, e_i] &= e_{i+1}, i \geq 2, [e_2, e_j] = e_{j+2}, j \geq 3; \\ [e_2, f_i] &= 0, [e_k, f_1] = -f_{k+1}, k \geq 3; \\ [e_1, f_i] &= f_{i+1}, i \geq 1; [e_2, f_j] = f_{j+2}, j \geq 2; \\ [f_1, f_1] &= e_2, [f_1, f_k] = \frac{1}{2}e_{k+1}, k \geq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Ее четная часть $(\mathfrak{M}_2)_{\bar{0}}$ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{m}_2$, а градуировка при помощи индексов супералгебры Ли $\mathfrak{M}_2 = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \langle e_i, f_i \rangle$ является естественной градуировкой постоянной ширины два.

Теорема 1. Рассмотрим супералгебру Ли τ_x , порожденную одной четной образующей e_1 и одной нечетной образующей f_1 , удовлетворяющими двум соотношениям

$$\begin{aligned} [e_1, [e_1, [f_1, f_1]]] &= x[f_1, [e_1, [e_1, f_1]]], \\ [e_1, [e_1, [e_1, f_1]]] &= [f_1, f_1], [e_1, f_1], \end{aligned} \quad (6)$$

где x обозначает произвольное комплексное число.

Если $x \neq \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$, то супералгебра Ли τ_x является конечномерной. При этом:

1) если $x = \frac{3}{8}$, то τ_x изоморфна положительной части R^+ алгебры Рамона;

2) если $x = \frac{1}{2}$, то τ_x изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{M}_2$ (5);

3) если $x \neq \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}$, то τ_x является 16-мерной естественно градуированной супералгеброй Ли ширины два. Ее четная часть $(\tau_x)_{\bar{0}}$ восьмимерна и изоморфна фактор-алгебре Ли $\mathfrak{a}_r / (\mathfrak{a}_r)^8$,

где $r = \frac{1}{2} \frac{60x^2 - 20x + 3}{(2x + 1)(6x - 1)}$, а $\mathfrak{a}_r$ — алгебра Ли из однопараметрического семейства (4) теоремы 1.

Заметим также, что конечномерные естественно градуированные так называемые филиформные супералгебры Ли исследовались в [4].

Определим еще одну бесконечномерную супералгебру Ли $\mathfrak{M}'_2$ с помощью бесконечного базиса $e_2, e_4, \dots, e_{2k}, \dots$ четной части $(\mathfrak{M}'_2)_{\bar{0}}$, базиса $f_1, f_3, \dots, f_{2p+1}, \dots$ ее нечетной части $(\mathfrak{M}'_2)_{\bar{1}}$ и коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [e_2, e_{2i}] &= e_{2i+2}, i \geq 2, [e_4, e_{2j}] = e_{2j+4}, j \geq 3; \\ [e_2, f_1] &= 0, [e_4, f_1] = f_5, [e_{2k}, f_1] = -f_{2k+1}, k \geq 3; \\ [e_2, f_{2i+1}] &= f_{2i+3}, i \geq 1, [e_4, f_{2j+1}] = f_{2j+5}, j \geq 1; \\ [f_1, f_1] &= e_2, [f_1, f_{2k+1}] = \frac{1}{2} e_{2k+2}, k \geq 1; \\ [f_3, f_3] &= e_6, [f_3, f_{2k+1}] = \frac{1}{2} e_{2k+4}, k \geq 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко видеть, что четная часть $(\mathfrak{M}'_2)_{\bar{0}}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{m}_2$, а градуировка $\mathfrak{M}'_2 = \langle f_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle f_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle \oplus \dots$ имеет ширину один.

Теорема 2. Супералгебра Ли $\mathfrak{n}_y$, заданная двумя нечетными образующими f_1, f_3 и двумя соотношениями

$$\begin{aligned} [f_1, [f_1, [f_1, f_3]]] &= -[f_3, f_3], \\ [[f_1, [f_1, f_3]], [f_1, [f_1, f_3]]] &= y[f_1, [f_1, [f_1, [f_1, [f_1, [f_1, f_3]]]]], y \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (8)$$

является положительно градуированной супералгеброй Ли ширины один. При этом ее градуировка не является естественной, а также:

1) если $y = -\frac{1}{6}$, то супералгебра Ли $\mathfrak{n}_y$ бесконечномерна и изоморфна положительной части NS^+ алгебры Невё—Шварца,

2) если $y = 0$, то $\mathfrak{n}_y$ бесконечномерна и изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{M}'_2$;

3) если $y \neq -\frac{1}{6}, 0, 1, -1, -\frac{1}{2}$, то $\mathfrak{n}_y$ является 14-мерной супералгеброй Ли. Ее четная часть $(\mathfrak{n}_y)_{\bar{0}}$ изоморфна семимерной фактор-алгебре Ли $\mathfrak{a}_r / (\mathfrak{a}_r)^7$, где $\mathfrak{a}_r$ — это алгебра Ли из однопараметрического семейства (4) теоремы 1, с параметром $r = \frac{3y^2 + 3y + 1}{(1 - y)(2y + 1)(1 + y)}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательства теорем 1, 2 однотипны, и они могут быть проведены как при помощи техники центральных расширений [5, 7], так и напрямую, в духе доказательства теоремы 1, основанного на последовательном применении (супер)тождества Якоби [1]. Поясним последний тезис на примере теоремы 2. Рассмотрим супералгебру Ли $\mathfrak{g}$, порожденную двумя нечетными образующими f_1, f_3 . Определим элементы $g_i, i \geq 1$ по следующему правилу (заметим, что из (супер)тождества Якоби следует, что $[f_1, [f_1, f_1]] = 0$):

$$g_1 = f_1, g_2 = [f_1, f_1], g_3 = f_3, g_{k+1} = [f_1, f_k], k \geq 3.$$

Определим вес элемента g_i как значение его индекса i для всех $i \geq 1$. Соотношения (8) можно переписать в виде $[g_3, g_3] = -g_6, [g_5, g_5] = yg_{10}$, и они будут связывать между собой элементы одинакового веса. Так же как и в [1], будем последовательно выписывать всевозможные (супер)тождества Якоби $J(g_i, g_j, g_k) = 0$ суммарного веса $6 \leq i + j + k \leq 17$. Анализ полученных соотношений и приводит к ответу. Отметим отдельно, что при $y = -\frac{1}{6}$ изоморфизм с положительной частью NS^+ алгебры Невё–Шварца NS может быть задан на образующих $f_1 \rightarrow G_{\frac{1}{2}}, f_3 \rightarrow G_{\frac{3}{2}}$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование Д.В. Миллионщикова выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00143, <https://rscf.ru/project/23-11-00143/> в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук, и его результатом является теорема 1. Результатом исследования Ф.И. Покровского является теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benoist Y.* Une nilvariété non affine // J. Diff. Geom. 1995. Vol. 41. P. 21–52.
2. *Фиаловски А.* Классификация градуированных алгебр Ли с двумя образующими // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. Т. 38. № 2. P. 62–64.
3. *Bouarroudj S., Navarro R.M.* Cohomologically rigid solvable Lie superalgebras with model filiform and model nilpotent nilradical // Communications in Algebra. 2021. Vol. 49. No. 12. P. 5061–5072.
4. *Camacho L.M., Navarro R.M., Sánchez J.M.* On Naturally Graded Lie and Leibniz Superalgebras // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2020. Vol. 43. P. 3411–3435.
5. *Миллионщиков Д.В.* Филиформные $\mathbb{N}$ -градуированные алгебры Ли // УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 197–198.
6. *Миллионщиков Д.В.* Естественно градуированные алгебры Ли медленного роста // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 6. С. 111–160.
7. *Миллионщиков Д.В.* Узкие положительно градуированные алгебры Ли // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483. № 5. С. 492–494.
8. *Milnor J.* On fundamental groups of complete affinely flat manifolds // Adv. Math. 1977. Vol. 25. P. 178–187.
9. *Shalev A., Zelmanov E.I.* Narrow Lie algebras: A coclass theory and a characterization of the Witt algebra // J. Algebra. 1997. Vol. 189. P. 294–331.

RAMOND, NEVEU-SCHWARZ ALGEBRAS AND NARROW LIE SUPERALGEBRAS

D. V. Millionshchikov^a, Th. I. Pokrovsky^b

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S. P. Novikov

Two one-parameter families of positively graded Lie superalgebras generated by two elements and two relations that are narrow in the sense of Zelmanov and Shalev are considered. The first family contains the positive part R^+ of the Ramon algebra, the second one contains the positive part NS^+ of the Neveu-Schwarz algebra. The results of the article are super analogues of Benoist's theorem on defining the positive part of the Witt algebra by generators and relations.

Keywords: Lie superalgebra, positive grading, narrow algebras, central extension, Ramond algebra, Neveu-Schwarz algebra